SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E 1426
(71)
1837
KAT

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

★

„In fața noastră stă sarcina construcției și o veți duce la îndeplinire numai dacă vă veți însuși toate cunoștințele moderne..."

V. I. LENIN

(Din cuvântarea ținută la cel de al III-lea Congres al Uniunii Tineretului Comunist din Rusia)

★ ★ ★

IANUARIE 1953

1

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*« Lenin a trăit, Lenin trăieşte, Lenin va trăi »*	1
2.	*S'au împlinit 150 ani dela naşterea marelui matematician Iánoş Bolyai, de Conf. Univ. I. Toth*	2
3.	*Tensiunea superficială, de Conf. Univ. C. Rabega*	8
4.	*Chestiuni de examen*	16
5.	*Probleme rezolvate (547, 550, 553, 561, 563, 573)*	17
6.	*Probleme propuse (735—762)*	19
7.	*Exerciţii propuse pentru învăţământul elementar...*	21
8.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	22

ANUL IV 1 IAN. 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 1 Ianuarie 1953

„LENIN A TRĂIT, LENIN TRĂIEŞTE, LENIN VA TRĂI"

„Păstraţi amintirea lui Ilici, iubiţi-l şi studiaţi-l pe învăţătorul şi conducătorul nostru, Ilici.

Luptaţi împotriva duşmanului dinăuntru şi dinafară şi sdrobiţi-l, aşa precum ne învaţă Ilici.

Creaţi o viaţă nouă, un fel nou de viaţă, o cultură nouă, aşa precum ne învaţă Ilici.

Nu ocoliţi niciodată munca măruntă, căci din munca măruntă se clădeşte tot ce e măreţ, iată unul din importantele precepte ale lui Ilici".

I. V. STALIN

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

La 21 Ianuarie 1953, oamenii muncii din lumea întreagă comemorează 29 ani dela moartea lui Vladimir Ilici Lenin, marele geniu şi învăţător al omenirii muncitoare, întemeietorul Partidului Comunist al Uniunii Sovietice şi al Statului Sovietic. Printre primele acte ale Puterii Sovietice alcătuite de Lenin, în zilele glorioase de după Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie, a fost şi decretul asupra păcii. Steagul păcii, ridicat de V. I. Lenin şi purtat cu mână sigură de continuatorul său, I. V. Stalin, a devenit stindardul sub care luptă din ce în ce mai hotărît, sutele de milioane de oameni cinstiţi din lumea întreagă.

V. I. Lenin

Inima lui Lenin a încetat să bată la 21 Ianuarie 1924. Dar V. I. Lenin continuă să trăiască prin tovarăşul Stalin, Lenin al zilelor noastre. Sub steagul lui Lenin, sub conducerea lui Stalin, popoarele sovietice au construit socialismul şi azi păşesc în mod victorios spre comunism. Sub semnul învăţăturii lui Lenin şi Stalin, popoarele din ţările democrat-populare — printre care şi ţara noastră — eliberate de către glorioasele Armate Sovietice, construiesc în mod victorios socialismul. Insufleţiţi de învăţăturile lui Lenin şi Stalin, popoarele din ţările înrobite de către capitalism luptă din ce în ce mai hotărît, pentru o pace trainică, pentru democraţie populară. Iată de ce, prin munca şi prin lupta noastră luminată de geniul lui Lenin şi Stalin, adeverim cuvintele poetului Maiacovschi „Lenin a trăit, Lenin trăieşte, Lenin va trăi".

S'AU ÎMPLINIT 150 ANI DELA NAȘTEREA MARELUI MATEMATICIAN IANOȘ BOLYAI

Conf. Univ. ***Imre Toth***

1.

Descoperirea geometriei neeuclidiene a însemnat o adevărată revoluție în științele matematice și a produs transformări radicale în concepția noastră despre natură. Fără geometria neeuclidiană nu s'ar fi putut desvolta mai departe nu numai geometria dar nici fizica: fără geometria neeuclidiană nu ar fi putut lua naștere teoria relativității.

Intemeierea geometriei neeuclidiene este strâns legată de numele a doi oameni de știință geniali: N. I. Lobacevschi și Iánoș Bolyai.

Matematicianul căruia îi revine meritul nemuritor de a fi publicat cel dintâi o lucrare despre noua geometrie a fost Nicolai Ivanovici Lobacevschi. La 23 Februarie 1826 și-a expus N. I. Lobacevschi noua concepție la o ședință a Facultății de Matemtică-Fizică a Universității din Kazan, iar cu trei ani mai târziu, în 1829, a apărut în «Vestitorul Kazanului» lucrarea sa «Despre principiile geometriei» în care era expus noul sistem al geometriei. Cu doi ani după apariția lucrării lui Lobacevschi, deci în 1831, a apărut la Târgu-Mureș o broșură în limba latină, de abia 26 de pagini, intitulată pe scurt: «Primul supliment, în care este expusă știința absolut adevărată a spațiului, independent de adevărul sau de falsitatea axiomei a XI-a a lui Euclid». Autorul se iscălea: Jánoș Bolyai, locotenent major. Această lucrare era o ediție separată («separata») a unui supliment adăugat de el unei lucrări matematice mai vaste a tatălui său, care a și apărut în 1832 la Târgu Mureș. Lucrarea lui Iánoș Bolyai conținea o expunere foarte concentrată a geometriei neeuclidiene. Departe de Lobacevschi, neștiind în acea vreme nimic de existența marelui geometru rus, tânărul geometru maghiar a ajuns la aceleași rezultate ca și el. Coincidența izbitoare a rezultatelor lui Lobacevschi și Bolyai este unul din exemplele cele mai elocvente cum apar aceleași idei în capete diferite — atunci când condițiile obiective pentru apariția lor sunt coapte. Lucrarea lui Jánoș a devenit cunoscută în literatura științifică sub titlul latin prescurtat «Appendix» («supliment»). Ea era caracterizată, după moartea autorului — ca «cele mai minunate douăzeci și șase pagini din istoria matematicii». Renumitul geometru sovietic V. F. Kagan, a caracterizat opera lui Bolyai ca fiind, împreună cu lucrarea lui Lobacevschi, una din cele mai frumoase perle ale literaturii matematice — iar pe autorul ei ca fiind unul din clasicii științei mondiale.

2.

Pe unul din pereții unei case vechi din centrul orașului Cluj este așezată o placă de marmoră, pe care scrie că în această casă s'a născut în 1802 Jánoș Bolyai «Euclidul maghiar». Străduța în care se află casa în care s'a născut marele geometru, poartă azi numele său: Strada Bolyai.

La 15 Decembrie 1952 s'au împlinit 150 de ani de când acest geometru genial a văzut lumina zilei. Tatăl său era Farkaș Bolyai, el însuși matematician de seamă, om de știință și de artă talentat, prieten intim al renumitului matematician german Carl Friedrich Gauss.

Începând din 1804 Farkaș Bolyai lucra ca profesor de matematică la renumitul colegiu din Târgu-Mureș, una din cele mai vechi școli medii din țara noastră, unde a predat matematica aproape 50 de ani, până la pensionarea lui.

Tânărul Jánoș Bolyai a fost educat de tătăl său. Farkaș Bolyai era un om de știință cu vederi largi, pătruns de idei înaintate în problemele educației. Talentele deosebite ale lui Jánoș pe tărâmul geometriei s'au manifestat de timpuriu. N'avea încă 13—14 ani și cunoștea algebra superioară, geometria analitică, calculul diferențial și integral. Un talent deosebit a manifestat și în muzică: era un violonist virtuos și vioara a rămas până la sfârșitul vieții sale una din cele mai pasionate preocupări ale sale.

Tatăl său a vrut ca tânărul ajuns la vârsta de 15 ani să-și continue studiile matematice la Universitatea din Göttingen, sub conducerea personală a prietenului său, Gauss. In 1816 a scris o scrisoare vechiului său prieten, în care și-a expus această dorință. Dar scrisoarea a rămas fără răspuns. Atitudinea lui Gauss a produs o decepție amară la tânărul Jánoș, care aștepta cu înfrigurare să-l cunoască pe marele matematician — supranumit de tatăl său «Colosul din Göttingen».

Tânărul din Târgu-Mureș se gândea tot timpul cu mândrie că-și va putea continua studiile sub conducerea sa. Dar visurile s'au spulberat — și trebue să spunem — că nu a fost prima decepție

provocată de marele matematician german. Tânărul Jánoș, încă nu bănuia, că Colosul din Göttingen avea să-i provoace deziluzii și mai profunde. Deși acum era profund întristat și se simțea nedreptățit și ofensat că nu-și putea urma studiile sub conducerea lui Gauss, mai târziu și-a dat seama, că în fond nu a pierdut nimic, și că a avut numai de câștigat, lucrând sub îndrumarea tatălui său.

Peste doi ani, în 1818, Farkaș reușește să obțină sprijin material și-și trimite fiul la Viena, unde se înscrie ca student la Academia Tehnică Militară. Condițiile materiale ale lui Farkaș erau foarte modeste, și singur nu putea suporta cheltuielile taxelor școlare și ale întreținerii fiului său la Viena. In anii studenției Jánoș s'a luptat mereu cu lipsuri, și era adesea ajutat de alți prieteni săraci, care admirau talentul său.

La Academie, Jánoș s'a remarcat repede prin talentul său deosebit. Era unul din cei mai buni studenți ai școlii. Matematician strălucit, violonist virtuos, excelent șahist, Jánoș a mânuit cu aceeași măestrie și oțelul strălucit al spadei: ca tânăr student și mai târziu ca ofițer a luptat în nenumărate dueluri, dar nu a fost învins niciodată.

In 1822 a absolvit Academia cu rezultate strălucite, iar în 1823 a fost înaintat la gradul de sublocotenent și mutat în fortărețele Timișoarei.

Jánoș nu a stat mult timp în armată. Nu a putut suporta atmosfera stupidă și înăbușitoare a armatei austriace. Deși a fost repede înaintat în grad, devenind pe rând locotenent, locotenent major și pe urmă căpitan, totuși nu au reușit să facă din el un soldat al împăratului dela Viena. Primea sarcini inferioare: elaborarea unor proiecte pentru repararea unor grajduri, magazii, băi sau spitaluri militare și altele asemănătoare. Jánoș Bolyai era însă atras spre știință și viața înăbușitoare din armată îl sufoca. Cerea mereu eliberarea sa din cadrul armatei, dar cererile sale nu au fost ascultate.

3.

Incă depe băncile Academiei a început să se ocupe Jánoș de una din cele mai renumite probleme ale geometriei contemporane, cunoscută sub numele de «problema paralelelor». Oamenii de știință progresiști și contemporani cu Bolyai căutau să demonstreze pe cale logică postulatul paralelelor al lui Euclid (cunoscut adesea și sub denumirea de axioma a XI-a), pornind dela cele mai elementare proprietăți ale dreptei. Precum se știe, renumitul învățat grec Euclid, a reușit să sistematizeze o parte însemnată din cunoștințele noastre geometrice, cu circa 2000 de ani înaintea erei noastre. Euclid a arătat că cea mai însemnată parte a proprietăților geometrice ale figurilor plane compuse din drepte și cercuri poate fi dedusă pe cale pur logică din cinci proprietăți elementare ale acestor figuri. Aceste cinci proprietăți elementare se numesc postulatele sistemului geometric. Ele provin din realitate și nu pot fi obținute decât pe calea experienței. Marele merit al lui Euclid constă, între altele, în aceea că a arătat, că majoritatea proprietăților geometrice pot fi deduse dintr'un număr redus de proprietăți elementare, pe cale rațională, fără să mai avem nevoe de cercetări experimentale directe speciale. Astfel de exemplu, putem deduce din aceste cinci postulate că unghiurile opuse la vârf sunt egale, sau că suma pătratelor catetelor unui triunghiu dreptunghic este egală cu pătratul ipotenuzei, bazându-ne numai pe proprietățile elementare exprimate în postulate și pe legile gândirii logice, și neavând nevoe să facem măsurători speciale și directe pe figură.

Printre aceste proprietăți elementare, dar esențiale ale figurilor, Euclid înșiră referitor la drepte următoarele: prin două puncte trece o singură dreaptă; (primul postulat); un segment de dreaptă poate fi prelungit peste orice limită în linie dreaptă (al doilea postulat) și în fine al cincilea postulat se referă la condițiile de întretăiere a două drepte care se găsesc în același plan; două drepte oarecari (a, b) situate în același plan, și tăiate de o a treia dreaptă, secantă (c) se întâlnesc de acea parte a secantei de care suma unghiurilor interne este mai mică decât două unghiuri drepte

$$\alpha + \beta < 2R$$

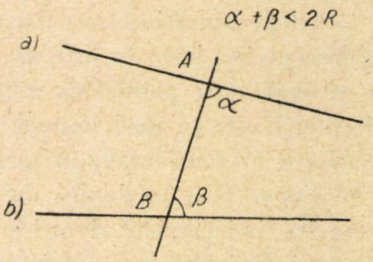


Fig. 1

Dreptele a și b nu se întâlnesc atunci când $\alpha + \beta = 2R$. In acest caz ele se numesc drepte paralele: $a \parallel b$.

In mod special dacă $\beta = R$, totdeauna, atunci unghiul α se numește (după Lobacevschi) unghiu de paralelism și se notează cu $\pi(AB)$.

Postulatul 5 cere așadar ca *atunci când*

$$a \parallel b \quad \pi(AB) = R.$$

Printre postulatele lui Euclid, postulatul paralelelor ocupă un loc deosebit. Inainte de toate el

diferă de celelalte prin caracterul său mai complicat. Conținutul acestui postulat nu ne apare imediat ca un adevăr evident și înțelegerea lui necesită urmărirea, cel puțin în gând, a dreptelor, peste orice limită. Afară de aceasta postulatul paralelelor are o importanță deosebită pentru geometria practică, căci tocmai de aici decurg proprietățile practice cele mai importante ale figurilor; cum sunt teoremele referitoare la asemănarea figurilor, proprietatea că unghiurile și « mărimea » unei figuri sunt independente (două triunghiuri asemenea au unghiurile respectiv egale, independent de mărimea relativă a laturilor), teoremele referitoare la rapoartele metrice, teorema lui Pitagora și altele.

Față de acest postulat, încă depe vremea grecilor s'a ridicat întrebarea, dacă proprietatea exprimată în el nu poate fi oare dedusă și ea pe cale logică, din celelalte proprietăți ale dreptei înșirate în primele două postulate fără să avem nevoe de a vedea și de a studia figura pe calea simțurilor.

Grecii aveau cunoștință despre existența asimptotelor hiperbolei și știau că ramura de hiperbolă și asimptota nu se întretaie niciodată, și totuși suma unghiurilor interne formate cu o secantă este *mai mică* decât 2R.

$$\alpha = \pi\,(AB) < R.$$

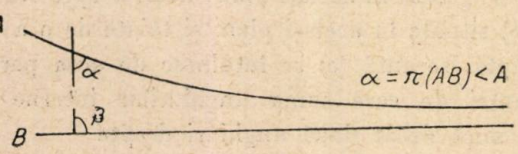


Fig. 2

Nivelul scăzut al cunoștințelor a făcut posibilă, ca această descoperire, justă în sine, să le sugereze ideea falsă că unghiul de paralelism $\pi\,(AB)$ numai în cazul dreptelor este în mod necesar un unghiu drept, și deaceea ei considerau, în mod cu totul greșit, că mărimea R a unghiului de paralelism trebue să rezulte, independent de orice constatare empirică, numai din celelalte proprietăți, elementare, ale dreptei, și trebue să fie dedusă pe cale pur logică. In căutarea acestei deducții constă « *problema paralelelor* ».

In decursul celor două mii de ani, dela Euclid până la Lobacevschi și Bolyai, mulți matematicieni de seamă au încercat rezolvarea problemei paralelelor, dar fără nici un rezultat.

Este adevărat, că problema nu a devenit celebră decât abia în ultimele decenii ale secolului al XVIII-lea. Până la 1760, precum reiese din datele culese de renumitul istoric al matematicii V. Bobînin, interesul față de această problemă era relativ scăzut. In special comentatorii și traducătorii lui Euclid s'au ocupat de ea. Problema privea doar perfecționarea logică a sistemului euclidian și nu era legată direct de practică. Dintre matematicienii mai de seamă ale celor două milenii, numai doi s'au interesat de ea: renumitul matematician tadjic Nasreddin Tusi (secolul XIII) și matematicianul englez John Wallis (secolul XVII), dar și aceștia cu ocazia traducerii și comentării lui Euclid.

Poziția problemei s'a schimbat radical după 1760. Incepând dela această dată a început să se manifeste față de ea un interes deosebit: toți matematicienii de seamă ai epocii au fost preocupați de găsirea demonstrației căutate, au apărut lucrări după lucrări tratând despre problema paralelelor. Problema paralelelor a ajuns dintr'odată în centrul atenției lumii științifice.

Cauza acestui interes viu trebue căutată în împrejurări exterioare matematicii, și anume în lupta ce se dădea pe frontul filosofiei între curentul științific al materialismului și între curentul idealist, potrivnic științei.

Filosofia idealistă susținea că cunoștințele noastre nu provin din realitate ci din conștiința noastră, și pentru a-și întări afirmațiile idealiștii se refereau în mod special la geometrie, susținând, în mod cu totul greșit, că geometria ar fi exemplul științei care-și construește obiectul nu pornind dela natură, dela realitate, ci independent de realitate, pornind dela conștiința subiectivă. Trebue să spunem că materialismul din acea epocă, deși se lupta vitejește, în general, contra acestei teorii false, în mod special, în domeniul geometriei nu a fost în stare să apere în mod consecvent poziția științifică justă materialistă, și în acest domeniu a cedat terenul teoriilor idealiste.

Matematicienii epocii au acceptat în general cu destulă ușurință teza cu totul falsă, că primele postulate ale lui Euclid sunt atât de simple, încât nu avem nevoe de nici o experiență pentru a ne convinge de adevărul lor și că ele ni s'ar impune ca adevăruri necesare « a priori » independente de experiență. Dacă această teză falsă a fost admisă cu ușurință și superficialitate referitor la primele postulate, nu era aceeași situație și cu postulatul paralelelor. Dimpotrivă, părerea unanimă a lumii științifice era că acest postulat nu ni se impune ca un adevăr necesar, a priori, independent de experiență, ci că dimpotrivă, fără a vedea figura, fără o experiență elementară nu ne putem convinge de caracterul adevărat al acestui postulat. Căutarea de a deduce pe cale pur logică postulatul paralelelor din celelalte postulate, a însemnat,

în mod cu totul eronat, în ochii filosofiei idealiste contemporane încercarea de a demonstra că postulatul paralelelor nu provine din realitate, ci el ar fi doar o consecință logică, a unor adevăruri independente de realitate.

Datorită acestor împrejurări, importanța problemei paralelelor a crescut dintr'odată. Demonstrarea logică a postulatului paralelelor era menită în ochii idealiștilor să întărească învățăturile lor: problema paralelelor a jucat un rol crucial în lupta dintre materialism și idealism. Deși deducerea postulatului din celelalte postulate, nu ar fi însemnat întărirea teoriei idealiste, deoarece, se poate dovedi că și celelalte postulate provin din realitate, dar imposibilitatea de a demonstra postulatul însemna în orice caz că el provine din realitate și însemna deci falimentul teoriei idealiste a spațiului.

A trecut an după an, dar demonstrația căutată nu a putut fi găsită. Eforturile celor mai însemnați geometri și matematicieni s'au dovedit a fi zadarnice. Nereușita acestor încercări a produs o adevărată criză în domeniul matematicii. Problema paralelelor a fost considerată ca rușinea și scandalul geometriei.

4.

Meritul nemuritor al lui Lobacevschi și Bolyai constă în aceea că au găsit calea justă de ieșire din această criză, rezolvând problema paralelelor într'un fel neașteptat de matematicienii contemporani: ei nu au demonstrat ceeace se căuta în general: cum poate fi dedus postulatul paralelelor din postulatele dreptei pe cale pur logică, ci dimpotrivă, au arătat că postulatul paralelelor nu poate fi demonstrat niciodată, că el nu poate fi dedus pe cale logică din celelalte postulate, că *din punct de vedere logic,* el este *independent* de celelalte proprietăți ale dreptei, nefiind o consecință necesară a acestora.

Tânărul Jánoș Bolyai și-a dat seama, încă din 1823, de zădărnicia încercărilor de a demonstra postulatul paralelelor. El a arătat imposibilitatea demonstrării postulatului demonstrând că problemele geometrice curente pot fi rezolvate și independent de postulatul paralelelor, făcând abstracție de acesta. Incă atunci a pus el bazele unui nou sistem geometric și plin de însuflețire și de încredere a comunicat descoperirea tatălui său: «din nimic am creat o altă lume, nouă...»

In 1825—1826 a alcătuit o lucrare scrisă despre noul sistem geometric, pe care l-a trimis tatălui său și unui fost profesor de al său dela Academia Militară. Ideile sale însă nu au găsit înțelegerea dorită. Bătrânul Bolyai le-a considerat deadreptul absurde. El însuși s'a ocupat zeci de ani cu căutarea demonstrației paralelelor și încercările sale proprii greșite l-au orbit într'atâta încât nu era în stare să înțeleagă acum o soluție, care mergea pe un drum opus celor încercate, și considerate de el ca singurele direcții juste.

Dar tânărul Jánoș Bolyai a știut că are dreptate și nu s'a lăsat abătut din cale. Una din trăsăturile de bază ale caracterului său era iubirea nemărginită a adevărului «atât moral cât și științific» după cum accentua el însuși.

In decursul anilor următori a elaborat în amănunțime sistemul său.

Teoremele expuse aici erau *independente* de faptul dacă acceptăm postulatul paralelelor sau dacă îl respingem: ele sunt deci, după expresia lui Jánoș «absolute» adică independente de postulatul paralelelor. Sistemul întreg purta denumirea de «știința absolut adevărată a spațiului».

Știința absolută a spațiului conținea în esență acele proprietăți ale figurilor geometrice care pot fi deduse pe cale logică din primele patru postulate ale lui Euclid.

Jánoș Bolyai a mers însă și mai departe. Nu s'a mulțumit să facă abstracție de postulatul paralelelor ci a înlocuit acest postulat cu o afirmație deadreptul contrarie și arătând că consecințele logice deduse din această nouă afirmație nu sunt în contradicție cu consecințele celorlalte patru postulate euclidiene, adică cu «știința absolută a spațiului». Această nouă afirmație introdusă de Bolyai era, că dreptele a și b pot deveni paralele și în cazul când suma unghiurilor interne $\alpha + \beta$ este mai mică decât două unghiuri drepte, sau când unghiul de paralelism

$$\pi(AB) < R$$

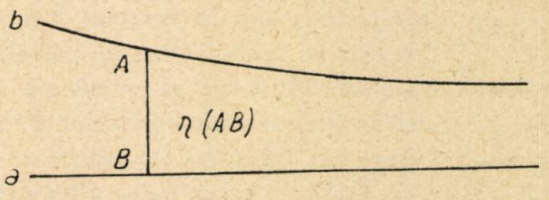


Fig. 3

Această afirmație era contrară intuiției imediate și experienței superficiale. Ea avea o serie de consecințe paradoxale, neobișnuite și contrarii proprietăților analoage din geometria obișnuită. Astfel de consecințe erau, că dreptele paralele se apropie una de alta: «asimptotic»; pe urmă că suma unghiurilor unui triunghiu este *mai mică* decât $2R$; iar aria triunghiurilor depinde de suma unghiurilor: cu cât aria este mai mică cu atât

suma unghiurilor se apropie mai mult de $2R$. O altă consecinţă interesantă este că pot exista triunghiuri în care suma unghiurilor este egală cu zero. Aceste triunghiuri sunt formate din trei drepte paralele între ele: şi totuşi au o arie finită. Aria lor se bucură însă de proprietatea deosebită că constitue limita superioară a ariilor triunghiurilor. In geometria lui Euclid ariile triunghiurilor nu au o limită superioară: ele cresc peste orice limită atunci când laturile cresc. In fine o consecinţă deosebit de importantă este că în general, în figurile rectilinii distanţele şi mărimile metrice nu sunt independente de unghiurile din figură. Dar oricât de neobişnuite să fi fost aceste proprietăţi, ele nu dovedeau falsitatea ipotezei

$$\pi(AB) < R$$

deoarece, nici una din aceste teoreme nu era în contradicţie cu vreuna din consecinţele primelor patru postulate: pornind dela primele patru postulate nu putem ajunge niciodată la concluzia că paralelele *nu* se apropie, sau că distanţele şi unghiurile sunt independente, etc. Acest sistem geometric neeuclidian a fost denumit de Bolyai sistemul S. Lobacevschi l-a denumit « geometrie imaginată » sau « pangeometrie ». In literatura modernă el poartă denumirea de sistem hiperbolic.

Invers, dacă postulatul paralelelor ar fi o consecinţă logică a primelor patru postulate, atunci înlocuirea lui cu o afirmaţie contrarie ar duce neapărat la o contradicţie logică formală, internă, în interiorul sistemului geometric, format din sistemul absolut şi din consecinţele acestei afirmaţii contrarii postulatului al 5-lea. Lipsa unei contradicţii formale, logice, în interiorul acestui sistem ar dovedi în mod plastic independenţa postulatului al 5-lea de celelalte proprietăţi ale dreptei. Lipsa de contradicţie logică în sistemul S (hiperbolic) dovedea deci în acelaşi timp că postulatul paralelelor nu poate fi dedus niciodată pe cale logică din celelalte postulate ale lui Euclid. Pentru a stabili adevărul sau falsitatea lui trebue să recurgem neapărat la consultarea directă a naturii, la experienţe directe. Aceasta era cea mai importantă concluzie la care a ajuns atât Lobacevschi cât şi Bolyai.

In 1832 a apărut la Târgu-Mureş cartea lui Farkaş Bolyai, împreună cu « suplimentul » (Appendix) scris de Jánoş, din care s'au scos deja un număr de exemplare în 1831. Ediţia din 1832 a « Appendixului » este neschimbată, dar titlul lucrării poartă o precizare esenţială faţă de ediţia din 1831. In noul titlu Jánoş Bolyai găseşte necesar să scoată în evidenţă concluzia finală cea mai importantă a descoperirii sale, şi anume, că adevărul sau falsitatea postulatului paralelelor nu poate fi decisă niciodată « a priori » adică independent de experienţă.

Exact la aceeaşi concluzie a ajuns şi Lobacevschi. El a mers mai departe, propunând chiar măsurători astronomice pentru deciderea problemei.

Cercetările lui Lobacevschi şi Bolyai se refereau în mod direct la problema dacă cunoştinţele noastre geometrice provin din realitate sau din conştiinţă şi descoperirea celor doi geometri geniali a decis problema în favoarea concepţiei materialiste şi a însemnat un adevărat triumf al materialismului în geometrie.

5.

Descoperirea lui Lobacevschi şi Bolyai a dat o lovitură mortală prejudecăţilor din domeniul geometriei: una din aceste prejudecăţi era că figurile geometrice nu pot avea alte proprietăţi decât acelea ce pot fi constatate cu ajutorul unei observaţii superficiale, imediate. Noul sistem geometric descoperit de Lobacevschi şi Bolyai a demonstrat însă că în dosul aparenţei, spaţiul are o serie de alte proprietăţi, necunoscute până acum, proprietăţi esenţiale, profunde fără de care nu putem înţelege deloc nici fenomenele dela suprafaţă.

« Spaţiul ascunde în interiorul său multe comori, pe care nu le poate vedea niciodată cel ce se mişcă la suprafaţă. Aşa a luat naştere şi Appendixul meu, deosebit de important », scrie Jánoş Bolyai.

Descoperirea geometriei neeuclidiene a mai arătat că nu evidenţa subiectivă sau caracterul neobişnuit al unei afirmaţii este criteriul adevărului sau a falsităţii în geometrie, ci concordanţa acestor afirmaţii cu faptele, cu realitatea.

Aceste prejudecăţi erau însă atât de adânc înrădăcinate în capul oamenilor de ştiinţă, încât noua învăţătură şi-a croit drumul, luptând cu greutăţi enorme.

Lobacevschi şi Bolyai nu au avut parte de marea bucurie de a vedea triumful ideilor lor. Cât timp trăiau, învăţătura lor genială era huiduită, batjocorită sau ignorată. Amândoi s'au adresat, independent unul de celălalt, matematicianului Gauss. Gauss a fost de acord cu noua geometrie, s'a afirmat în termeni elogioşi despre descoperitorii ei, mai mult: el însuşi a ajuns la aceleaşi concluzii, dar nu a publicat niciodată nimic din cercetările sale şi nu a acordat nici un sprijin celor doi tineri geometri, din comoditate şi din frică burgheză de a se ridica împotriva prejudecăţilor din ştiinţă. Atitudinea lui Gauss a contribuit mult la crearea atmosferei de indiferenţă şi ostilitate faţă de descoperirea revo-

luționară a lui Lobacevschi și Bolyai, care până la urmă a provocat o adevărată tragedie sufletească lui Jánoș Bolyai. Prin atitudinea sa Gauss a sprijinit în fond forțele întunecate care țineau știința în loc.

Neînțelegerea întâmpinată a provocat la Jánoș Bolyai o decepție grea, care mergea adesea până la pierderea echilibrului sănătos în comportamentul față de oameni. Jánoș era conștient de importanța extraordinară a descoperirii sale, și refuzul lui Gauss de a-i acorda vreun sprijin l-a întristat în mod deosebit. In armată i s'a urît cu totul, dar nu a reușit să obțină eliberarea din serviciu. Până la urmă a fost pensionat în 1833 în urma unui incident cu niște vameși prusaci, care i-au jignit mândria.

De atunci Jánoș Bolyai a trăit la Târgu-Mureș singuratic, retras de lume. A ocolit societatea oamenilor, era iritabil și irascibil. Nedreptatea de care suferea a provocat o adevărată dramă sufletească la el. S'a certat până la urmă și cu tatăl său, care după apariția Appendixului și-a schimbat atitudinea și a început să aprecieze descoperirea fiului său.

In acestă epocă Jánoș a mai întreprins o serie de cercetări matematice, și între altele a elaborat o teorie nouă a numerelor complexe, analogă cu cea dată de Hamilton. In această lucrare a mai strălucit odată geniul său — dar puterile sale fizice și intelectuale erau sleite — și nu și-a mai putut termina opera.

In 1856 moare tatăl său și peste patru ani și Jánoș l-a urmat în mormânt. La ultimul său drum a fost însoțit de trei oameni și corpul său a fost aruncat în șanțul cimitirului într'o groapă anonimă, și a fost regăsit abia în 1911.

6.

Cu zece ani după moartea lui Jánoș Bolyai a început deabia pătrunderea noii geometrii în geometrie. Numele lui Lobacevschi și Bolyai a devenit cunoscut în lumea întreagă. Lucrările lor au fost traduse și comentate, într'o serie de limbi străine. Totuși, pătrunderea învățăturilor revoluționare ale celor doi geometri geniali, nu a mers fără luptă. Numărul oamenilor de știință, care acceptau geometria neeuclidiană, era extrem de redus până la 1880—1890. In lumea științifică s'au format două tabere: tabăra ce se numea «tabăra lobacevschienilor» cuprindea elementele cele mai înaintate din știință și era tabăra partizanilor progresului și a materialismului din știință. Tabăra adversă, numită «tabăra euclidienilor» cuprindea elementele înapoiate, care țineau știința în loc. Atacul împotriva geometriei lui Lobacevschi și Bolyai a fost condus de filosofii idealiști, care s'au demascat astfel ca dușmanii făți ai progresului științei. Ei au privit și privesc și astăzi cu dușmănie și ură descoperirea revoluționară a lui Lobacevschi și Bolyai, deoarece, în fața acestei descoperiri se năruie teoriile lor mincinoase.

In țările imperialiste, filosofii reacționari trag știința înapoi, încercând să reînvie teoriile cele mai absurde, teorii care au fost măturate din știință acum 120 de ani de Lobacevschi și Bolyai. Dar toate aceste încercări se sfârșesc cu eșec rușinos. Ele nu se pot menține în fața luminii ce emană din ideile celor doi mari geometri — și nici o forță reacționară nu este în stare să oprească definitiv pătrunderea lor în știință. Ideile geniale ale lui Lobacevschi și Bolyai au arătat drumul just pe care trebue să meargă știința matematicii, dacă vrea să iasă din crizele, care apar în desvoltarea ei: acest drum este drumul consecvent al materialismului. Deaceea, învățăturile lor au putut câștiga înțelegerea și stima meritată numai în țările conduse de clasa muncitoare și în primul rând în Uniunea Sovietică.

In Uniunea Sovietică tradițiile minunate, inaugurate în matematică de Lobacevschi sunt continuate cu consecvență și aceasta este una din cauzele pentru care matematica sovietică este astăzi în fruntea tuturor celorlalte țări.

Trebue să studiem și să adâncim învățătura lui Lobacevschi și Bolyai. Trebue să continuăm minunatele tradiții materialiste ale acestei învățături, trebue să învățăm din curajul și abnegația cu care au luptat ei pentru adevăr, cu care au știut să înfrunte greutățile: mergând pe această cale vom putea aduce foloase de neprețuit desvoltării științei din patria noastră iubită.

TENSIUNEA SUPERFICIALĂ

Dr. Constantin Rabega
Conferențiar la Universitatea C. I. Parhon

I. Experiența ne arată că două corpuri puse în contact se pot prinde unul de altul. De exemplu, praful de cretă se prinde de suprafața tablei, cositorul topit se lipește de unele metale, apa se prinde de pereții unui pahar, varul de suprafața zidului, vopseaua de lemn, etc.

Acest fenomen este datorit atracției între moleculele dela suprafața celor două corpuri care vin în contact și se numește *adeziune.*

Intensitatea acestui fenomen depinde de structura substanțelor din care sunt alcătuite corpurile aflate în atingere și este cu atât mai mare, cu cât suprafața lor de contact este mai întinsă și distanța dintre ele mai mică.

Uneori adeziunea reprezintă o forță destul de mare; prin simplă apăsare, două plăci de oțel bine șlefuite și perfect plane, se pot prinde așa de tare una de alta, încât, pentru desprinderea lor este nevoie de o tracțiune de cel puțin 30 kg/cm^2.

Alteori adeziunea întrece coeziunea și este mai ușor să rupem corpurile decât să le desprindem unul de altul. De exemplu, când desprindem două plăci de sticlă lipite printr'o picătură de apă, coeziunea apei cedează mai ușor decât adeziunea pe sticlă; de aceea după ce le desfacem, ele sunt deopotrivă de ude, pentrucă ruptura se produce nu între apă și sticlă, ci la mijlocul picăturii de apă.

Atracția între molecule se manifestă uneori deosebit de puternic când corpurile solide sunt în contact cu gaze, vapori, lichide sau substanțe dizolvate.

Aproape toți știm că o bucată de pânză, fiartă în vopsea, trage culoarea din soluție și de obicei lasă apa incoloră. Colorantul se fixează pe suprafața fibrei vegetale care-l atrage și-l scoate din soluție.

In mod analog mai toate corpurile solide fixează pe suprafața lor diferite gaze, pe care le eliberează numai prin încălzire în vid.

Fenomenul se numește *adsorbție.* Este tot un fenomen de adeziune prin care corpurile solide atrag și fixează pe suprafața lor moleculele altor corpuri. Fenomenul de adsorbție se petrece numai la suprafața corpurilor și nu trebue confundat cu absorbția propriu zisă, care se petrece și în adâncime.

Deosebit de intense sunt fenomenele de adsorbție pe cărbune activ și silicagel. Cărbunele activ ca adsorbant se folosește la masca antigaz, în tehnică la adsorbția fracțiunilor ușor volatile de țiței și în medicină. Învățatul sovietic N. D. Zelinschi, prin lucrările sale în domeniul adsorbției a contribuit din plin la prelucrarea metodei de fabricare a cărbunelui activ și a construit renumita mască antigaz «N. D. Zelinschi». Silicagelul, având o mare afinitate față de apă, este folosit ca adsorbant specific al vaporilor de apă, servind la uscarea gazelor.

Obținerea, activarea și însușirile silicagelului au fost studiate de chimistul sovietic A. P. Ocatov (1921).

In tehnică se folosesc cu rezultate deosebit de bune amestecuri de adsorbanți, de ex. cărbune cu silicagel, cărbune cu oxid de aluminiu.

In domeniul adsorbției în faza gazoasă sunt deosebit de valoroase lucrările efectuate de chimiștii sovietici N. Șilov, M. Dubinin și S. Tronov (1929).

Afară de adeziune și cazul său particular, adsorbția, mai sunt și alte fenomene importante, datorite tot atracției moleculare, manifestate mai ales la suprafața substanțelor lichide.

Lichidele, în general, sunt foarte răspândite în natură (apă, petrol, etc.) și au o largă întrebuințare în tehnică (presa hidraulică, combustibili lichizi etc.)

Starea lichidă este o stare de tranziție între starea gazoasă și cea solidă și de aceea se aseamănă și cu una și cu cealaltă. Asemănarea dintre stările lichidă și gazoasă ale aceleiași substanțe crește cu atât mai mult, cu cât temperatura sa se apropie de temperatura critică (Tc) In acest punct cele două stări se confundă și de aceea au aceeași densitate. Pe de altă parte, asemănarea dintre stările lichidă și solidă ale aceleiași substanțe crește în vecinătatea punctului său de solidificare.

Din punct de vedere cinetico-molecular starea gazoasă a unei substanțe se caracterizează prin mișcarea haotică a moleculelor; distanțele intermoleculare fiind de câteva ori mai mari decât diametrul molecular, coeziunea este aproape inexistentă. In lichide însă, moleculele sunt apropiate între ele, coeziunea este relativ mare și fiecare moleculă vibrează în jurul unei anumite poziții de echilibru (teoria savantului sovietic I. I. Frenkel).

Coeziunea dintre moleculele unui lichid aduce suprafața acestuia într'o stare specială.

Se știe că întregul strat superficial al lichidului a cărui grosime este cel mult egală cu raza sferei de acțiune moleculară, exercită asupra restului de

lichid o anumită presiune, perpendiculară pe suprafața lichidului și îndreptată spre interiorul lui.

Această apăsare se numește presiunea internă a lichidului.

Grosimea stratului superficial nu poate depăși 10^{-7} cm (raza sferei de acțiune moleculară).

Presiunea internă se poate afla numai pe cale indirectă, calculându-se din datele obținute experimental. Ea este foarte mare și se exprimă în atmosfere pe cm². De exemplu, pentru eter ea este de 1400 atmosfere/cm²; pentru alcool etilic, 2400 atmosfere/cm²; pentru apă, 11.000 atmosfere/cm².

Presiunea internă a lichidelor fiind atât de mare, ne întrebăm, dece nu sunt strivite corpurile introduse în lichide? Răspunsul la această întrebare este următorul:

Spre deosebire de apăsarea exterioară exercitată asupra unui lichid, care se poate transmite după cunoscutul principiu al lui Pascal, presiunea internă acționează numai între straturile lichidului și nu se transmite în conformitate cu acest principiu.

Intrucât presiunea internă exercitată de stratul superficial acționează vertical de sus în jos, orice moleculă din interiorul lichidului, trebue să învingă această presiune pentru a ajunge în stratul superfieial. Lucrul mecanic necesar să învingă această presiune, se transformă în energie potențială, acumulându-se în fiecare moleculă. Această transformare se poate asemui cu aceea petrecută la ridicarea unui corp:

După cum un corp ridicat la o oarecare înălțime, acumulează energie potențială și fiind lăsat să cadă, energia sa potențială se micșorează prin transformarea ei în energie cinetică, tot așa și moleculele stratului superficial tind să treacă în acea poziție în care energia lor potențială se micșorează. De aceea moleculele de lichid, sub acțiunea coeziunii, se mișcă în așa fel, încât suprafața stratului superficial să se micșoreze la maximum.

Ca urmare masa unui lichid asupra căreia acționează numai forțele de atracție moleculară, va avea o formă sferică. Ca atare, picăturile mici de lichid, asupra cărora acțiunea gravitației poate fi neglijată, vor căpăta forme sferice. Aceiași formă însă, tind s'o capete și masele mai mari de lichid, cu condiția ca acțiunea gravitației exercitată asupra lor, să fie compensată experimental.

In acest scop, se introduce, de exemplu, untdelemn în alcool diluat, de aceiași densitate. Masa de untdelemn introdusă va căpăta forma sferică, întrucât greutatea ei va fi compensată prin presiunea alcoolului diluat, exercitată de jos în sus (fig. 1).

Se știe că dintre toate corpurile geometrice, pentru un volum dat, sfera are suprafața cea mai mică. De aceea, trecerea unei mase de lichid de o anumită formă geometrică la forma sferică, trebue să se facă sub acțiunea presiunii interne numai printr'o micșorare a stratului său superficial. In această tendință, lichidul se comportă ca și cum ar fi învelit într'o membrană care se strânge.

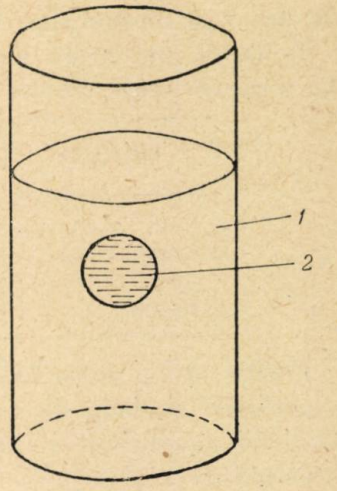


Fig. 1. — Comportarea untdelemnului în alcool diluat.
1. — *alcool diluat.*
2. — *picătura de untdelemn.*

Această tendință se poate constata experimental în modul următor:

Construim un cadru dreptunghiular care să aibă două laturi opuse de sârmă, iar celelalte două laturi opuse de ață (fig. 2). In aer, laturile de ață sunt paralele între ele. Introducând cadrul în apă cu săpun, între laturile sale se formează o peliculă, iar laturile de ață se îndoaie înspre interior ca niște arcuri. Experiențele se pot completa cu cele descrise în manualul de cl. IX-a.

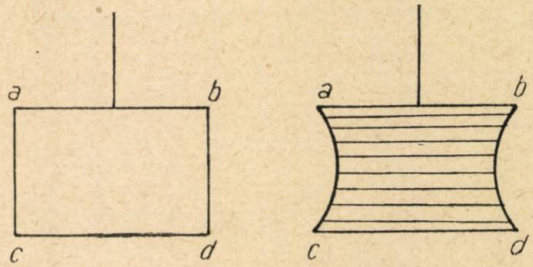


Fig. 2. — Schema formării unei pelicule de săpun

In toate aceste experiențe pentru a menține pelicula întinsă, trebue să aplicăm firului l o forță corespunzătoare f, tangentă la suprafața peliculei. Această forță se numește *forță de tensiune superficială* sau numai *tensiune superficială.*

Cu cât lungimea l a firului va fi mai mare, cu atât forța f va fi mai mare:

$$f = \alpha l$$

Constanta de proporționalitate α se numește constanta tensiunii superficiale. Din relația precedentă, deducem valoarea lui α:

$$\alpha = \frac{f}{l}$$

fiind numeric egală cu forța aplicată perpendicular pe unitatea de lungime. Ea se exprimă în dyne/cm la 20° C.

Această constantă a tensiunii superficiale depinde de structura substanțelor și de temperatură.

In tabela următoare sunt menționate valorile lui α pentru unele lichide:

Substanța	α în dyne/cm la 20° C.
Eter.....	17
Glicerină.....	65
Apă	73
Mercur.....	540

Pentru unul și același lichid, constanta tensiunii superficiale depinde de temperatură; constanta tensiunii superficiale este invers proporțională cu temperatura:

Când temperatura lichidului tinde către temperatura sa critică (Tc), constanta tensiunii superficiale tinde către zero. Acest fapt este ușor de înțeles, întrucât la punctul critic dispare diferența dintre faza lichidă și faza gazoasă a aceleiași substanțe.

Constanta tensiunii superficiale se mai poate defini și altfel.

In acest scop, ne vom servi de un cadru dreptunghiular de sârmă (fig. 3) a cărui latură inferioară CD poate să se deplaseze pe celelalte două laturi adiacente, cu ajutorul a două inele:

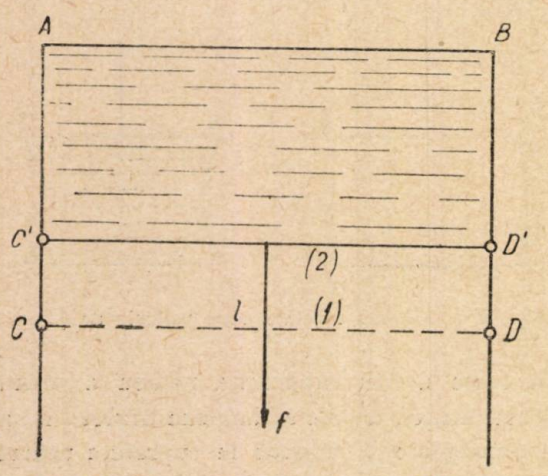


Fig. 3. — Tensiunea superficială a unei pelicule poate fi echilibrată.

Introducând acest cadru într'o soluție de săpun, se formează o peliculă care se strânge și trage după sine latura mobilă CD, din poziția (1) în poziția (2). Latura mobilă CD poate fi însă menținută în nemișcare, dacă se acționează în sens opus cu o forță f, corespunzătoare.

Experimentând cu greutăți marcate, putem măsura valoarea tensiunii superficiale.

Pentruca pelicula să poată deplasa latura mobilă CD din poziția (1) în poziția (2) este necesară consumarea unui lucru mecanic. Să presupunem că deplasarea laturii mobile CD este extrem de mică, adică $DD' = ds$.

In acest caz, lucrul mecanic efectuat, $d\sigma$ [1]), va fi:

$$d\sigma = f\,ds$$

Insă $f = \alpha l$

Deci $d\sigma = \alpha l\,ds$

Produsul $l\,ds$ este tocmai porțiunea dS, cu care se micșorează suprafața peliculei. Deci:

$$d\sigma = \alpha\,dS.$$

Efectuarea acestui lucru mecanic se face pe socoteala energiei potențiale a stratului superficial al peliculei care astfel se micșorează cu o valoare corespunzătoare. Deci:

$$dE_p = \alpha\,dS$$

De unde:

$$\alpha = \frac{dE_p}{dS}.$$

Din această relație rezultă următoarea definiție:

Constanta tensiunii superficiale este numeric egală cu valoarea raportului dintre variația energiei potențiale a stratului superficial și variația suprafeței acestui strat.

II. Dacă se introduce într'un lichid o placă de sticlă și apoi se scoate, se constată că pe suprafața sa au rămas picături de lichid. Prin urmare, adeziunea stabilită între moleculele lichidului și moleculele plăcii de sticlă este mai mare decât coeziunea moleculelor de lichid.

Lichidele la care adeziunea față de un corp solid este mai mare decât coeziunea între propriile lor molecule, se numesc lichide *care udă corpul solid dat*; celelalte lichide la care adeziunea față de corpul solid este mai mică decât coeziunea dintre moleculele lor, se numesc lichide *care nu udă corpul*. Exemple de lichide care udă corpul solid: apa, alcoolul față de sticla curată, mercurul față de cupru, fier, cositor, zinc. Exemple de *lichide care nu udă*: apa față de orice strat de grăsime, mercurul față de sticlă.

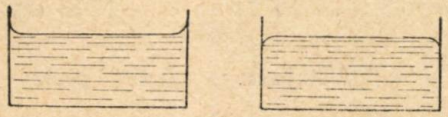
In mod obișnuit lichidele se păstrează în vase, iar între moleculele de lichid și cele ale solidului se stabilește o adeziune. Această atracție moleculară influențează asupra formei suprafeței lichidului mai ales lângă pereții vasului. De aceea su-

[1]) Expresia în care intră o mărime variabilă precedată de litera d simbolizează o creștere sau descreștere elementară a acelei mărimi variabile. De pildă, $d\sigma$ înseamnă o creștere sau descreștere a lucrului mecanic efectuat.

prafaţa lichidului nu va fi perfect plană, ci mai mult sau mai puţin curbată.

Suprafaţa curbată a unui lichid se numeşte *menisc.*

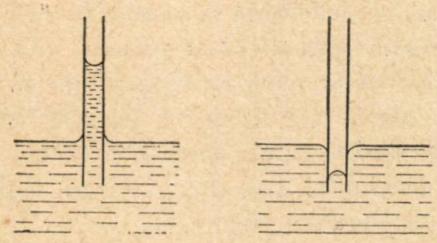
La lichidele care udă pereţii vasului meniscul va fi concav, iar la celelalte, convex (fig. 4).



(a) (b)

Fig. 4. — Menisc concav (a) şi convex (b)

In tuburile înguste curbura meniscului devine cu atât mai accentuată, cu cât suprafaţa liberă a lichidului este mai mică (fig. 5).



(a) (b)

Fig. 5. — Meniscul în tuburi *a*) cazul lichidului care udă pereţii; *b*) cazul lichidului care nu udă pereţii.

Forma meniscului depinde de tensiunea superficială.

In cazul unui menisc concav, tensiunea superficială este mai mică, iar în cazul unui menisc convex, este mai mare decât în cazul unei suprafeţe plane.

Tuburile foarte înguste se numesc capilare (capillus = fir de păr (în latineşte).

Ridicarea (în cazul apei) şi coborîrea (în cazul mercurului) lichidelor respective în tuburi capilare (fig. 5) constitue la un loc ceeace numim fenomene capilare sau capilaritate.

Fenomenele capilare ascultă de legea capilarităţii:

Pentru unul şi acelaş lichid, în aceleaşi condiţii de temperatură, diferenţa de nivel faţă de exterior este invers proporţională cu diametrul tubului şi cu densitatea lichidului.

Dacă notăm diametrele cu d_1 şi d_2 iar înălţimile cu h_1 şi h_2 vom avea:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

In experienţa zilnică întâlnim numeroase fenomene capilare; urcarea petrolului în fitiluri, urcarea igrasiei în pereţi, a sevei în plante, pătrunderea apei în sol, a cernelii în sugativă, etc.

In legătură cu pătrunderea apei subterane prin capilarele solului tragem următoarele concluzii:

Pentru a opri ridicarea la suprafaţă a apei subterane şi prin aceasta evaporarea ei, este necesar să distrugem capilarităţile solului. In acest scop ne servim de arat.

Intr'un tub capilar, meniscul poate fi considerat ca o emisferă, iar conturul său, o circonferinţă de rază r (raza tubului). Dealungul acestei circonferinţe acţionează forţa tensiunii superficiale, care este $2\pi r\alpha$.

Această forţă va echilibra greutatea coloanei de lichid de înălţime h şi densitate δ.

Greutatea sa va fi $\pi r^2 h\delta g$.

Din egalitatea acestor forţe, se poate calcula α:

$$2\pi r\alpha = \pi r^2 h\delta g$$

$$\alpha = \frac{\pi r^2 h\delta g}{2\pi r} = \frac{rh\delta g}{2}$$

Pentru apă, $\delta = 1$, deci

$$\alpha = \frac{rhg}{2}$$

Fenomenele de tensiune superficială, de umezire şi de capilaritate se folosesc şi în tehnică. Foarte multe corpuri poroase *absorb* diferite lichide. Acest fenomen de *absorbţie* se produce din cauză că lichidul, udând corpul solid, se ridică potrivit legii capilarităţii în lungul capilarelor fine din interiorul corpurilor poroase.

Prin tensiune superficială ne explicăm deasemenea formarea spumelor, precum şi formarea picăturilor în timpul scurgerii lichidelor prin tuburi înguste.

Formarea spumelor se bazează pe pătrunderea unor bule fine de gaz (aer) în cuprinsul unui lichid şi pe menţinerea acestora dedesubtul stratului superficial al lichidului. Spumele sunt deci sisteme eterogene de gaze dispersate în lichide.

Când se introduce un lichid într'un tub vertical de diametru relativ mic, tensiunea superficială nu îngădue lichidului să se scurgă imediat din tub. Dacă orificiul tubului este foarte mic şi presiunea lichidului din tub este mică, se poate întâmpla ca picătura să nu se desprindă de loc. Astfel ne dăm seama dece lichidele nu pot trece prin suprafeţele reticulare mici, de ex. prin pânza umbrelei sau prin foile de cort.

Pentru a studia formarea şi desprinderea picăturilor unui lichid aflat într'un tub vertical, ne vom servi de un tub de sticlă aproape capilar (fig. 6 *a*) în care se află un lichid oarecare.

Pe măsură ce lichidul se scurge, datorită tensiunii superficiale membrana superficială a picăturii în

formare se strânge și se formează o gâtuitură. Când greutatea părticelei de apă depășește tensiunea superficială a lichidului, gâtuitura se rupe, din partea inferioară se formează picătura principală (fig. 6 *b*), iar din partea contractată ia naștere o mică picătură suplimentară.

Când se contopesc mai multe picături mici într'o picătură mare se eliberează o cantitate de energie care se poate determina.

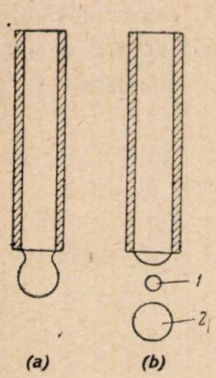


Fig. 6. — Formarea picăturii.

Exemplu: Să se calculeze energia eliberată la contopirea picăturilor mici de apă de rază $r = 2.10^{-3}$ mm într'o picătură mare de rază $R = 2$ mm.

Rezolvare: Insemnăm prin n numărul picăturilor mici.

Suprafața totală S a picăturilor mici va fi:

$$S = 4\pi r^2 n \qquad (1)$$

Suprafața picăturii mari $S_0 = 4\pi R^2$

$$S > S_0 \qquad (2)$$

De aceea, prin contopirea celor n picături mici într'o picătură mare se va elibera o cantitate de energie

$$dE = (S - S_0)\,\alpha_{H_2O} = (4\pi r^2 n - 4\pi R^2)\,\alpha_{H_2O} = \\ = 4\pi(r^2 n - R^2)\,\alpha_{H_2O} \qquad (3)$$

în care $\alpha_{H_2O} = 73$ dyne/cm.

Pentru a determina numărul n al picăturilor mici, vom egala suma volumelor picăturilor mici cu volumul picăturii mari:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 n = \frac{4}{3}\pi R^3$$

sau:

$$r^3 n = R^3$$

de unde:

$$n = \frac{R^3}{r^3}$$

Inlocuind pe n în (3) se obține:

$$E = 4\pi\left(r^2\frac{R^3}{r^3} - R^2\right)\alpha_{H_2O} = 4\pi\left(\frac{R^3}{r} - R^2\right)\alpha_{H_2O} = \\ = 4\pi R^2\left(\frac{R}{r} - 1\right)\alpha_{H_2O}$$

Introducând în relația de mai sus valorile numerice:

$$r = 2.10^{-3}\text{ mm} = 2.10^{-4}\text{ cm.}$$

$$R = 2\text{ mm} = 2.10^{-1}\text{ cm.}$$

$$\alpha = 73\text{ dyne/cm.}$$

$$\delta E = 4.3{,}14.4.10^{-2}\left(\frac{2.10^{-1}}{2.10^{-4}} - 1\right)73\text{ ergi} = \\ = 0{,}0036\text{ joule} = 3{,}6\,10^{-3}\text{ joule.}$$

Energia eliberată se va consuma prin încălzirea picăturii.

Invers, când o picătură mare se fragmentează în picături mici, se mărește energia potențială a peliculei superficiale, pe socoteala energiei picăturilor rezultate, care, de aceea se vor răci.

In conformitate cu cele arătate anterior, pelicula superficială a unui lichid se aseamănă cu o membrană elastică întinsă. Când pelicula este mărginită de un contur plan, ea însăși tinde a căpăta o formă plană. De aceea, o peliculă convexă, tinzând să devină plană, apasă straturile de lichid așezate dedesubtul său (fig. 7 *a*), iar o peliculă concavă, le destinde (fig. 7 *b*).

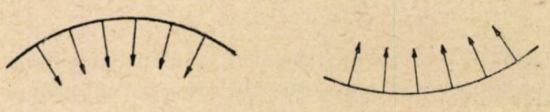


Fig. 7. — Acțiunea suprafețelor curbe asupra lichidului

Tensiunea superficială exercită asupra fiecărei picături o forță compresivă; valoarea acestei presiuni se poate calcula cu ușurință. In acest scop, să considerăm o picătură de rază r (fig. 8) la extremitatea unui tub capilar, care comunică prin cealaltă extremitate cu o mare cantitate de lichid aflată într'un corp de pompă.

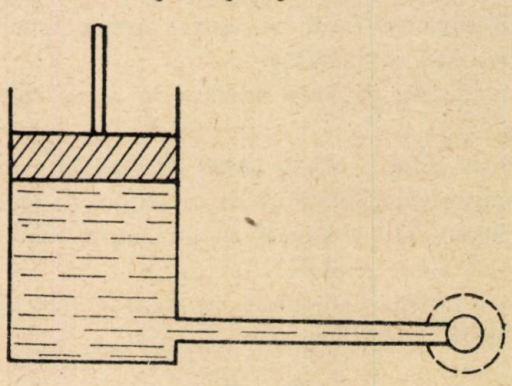


Fig. 8. — Determinarea presiunii

Picătura dela extremitatea capilarului este în echilibru cu masa de lichid din corpul de pompă.

Exercitând cu ajutorul pistonului, asupra lichidului o presiune P, se va produce o variație dV

a volumului picăturii, cu efectuarea unui lucru mecanic PdV, care va fi egal cu lucrul mecanic consumat pentru a produce o creştere corespunzătoare a suprafeţei picăturii iniţiale.

Vom avea deci:

$$PdV = \alpha dS$$

Pentru o creştere a razei dela r la $r + dr$, creşterea volumului picăturii va fi $dV = \frac{4}{3}\pi (r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 dr$, în timp ce creşterea suprafeţei picăturii va fi $dS = 4\pi (r + dr)^2 - 4\pi r^2 =$

$= 4\pi (r^2 + 2r\,dr + dr^2) - 4\pi r^2 =$

$= 4\pi\, r^2 + 8\pi r\, dr + 4\pi\, dr^2 - 4\pi r^2 = 8\pi r\, dr$

Deci, relaţia se va scrie:

$$P \times 4\pi r^2\, dr = \alpha \times 8\pi r\, dr$$

de unde:

$$P = \frac{8\pi r\, dr\alpha}{4\pi r^2\, dr} = \frac{2\alpha}{r}$$

Presiunea exercitată de către tensiunea superficială asupra picăturii va fi cu atât mai mare, cu cât raza picăturii va fi mai mică.

In cazul când lichidul este alcătuit din molecule identice (lichide neasociate), valoarea constantă a tensiunii superficiale se stabileşte imediat după formarea suprafeţei de separaţie (ex. benzenul). Altfel stau însă lucrurile în cazul lichidelor asociate. In acest caz, este neapărat necesar un oarecare interval de timp pentruca sistemul să ajungă în echilibru, după cum s'a observat de ex. la apă.

De aceea, trebue să deosebim *tensiunea superficială statică, care corespunde stării de echilibru şi tensiunea superficială dinamică, obţinută într'un moment oarecare, când sistemul n'a ajuns încă la echilibru.*

In 1921, învăţatul sovietic A. I. Bacinschi a arătat pentru prima dată că tensiunea superficială depinde şi de structura chimică a moleculei. Această dependenţă poate fi urmărită mai ales în seriile omoloage ale compuşilor organici, la care tensiunea superficială scade, în timp ce greutatea moleculară creşte.

Limita lichid-lichid

S'a studiat mai înainte tensiunea superficială la limita lichid-gaz. O tensiune asemănătoare se produce la limita între două lichide nemiscibile, dar în condiţii mai complexe întrucâtva, deoarece în acest caz avem de a face nu cu două lichide în stare pură, ci cu soluţiile saturate ale primului lichid în al doilea şi invers.

Cunoscând tensiunea superficială a celor două soluţii saturate, se poate calcula tensiunea superficială la limita între două faze lichide, după regula dată de fizico-chimistul rus G. Antonov (1907):

$$\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B$$

în care α_A = tensiunea superficială a soluţiei lichidului A, saturată cu lichid B, α_B = tensiunea superficială a soluţiei lichidului B, saturată cu lichid A.

α_{AB} scade cu urcarea temperaturii.

Se pot obţine sfere destul de mari de anilină, (diametrul de 2—3 cm), introducând anilină într'o soluţie apoasă de NaCl, de aceiaşi densitate.

Limita solid-gaz

Tensiune superficială se produce şi la limita solid-gaz. Se ştie că gazele sunt adsorbite pe suprafaţa cărbunelui activat.

Dacă se introduce o cantitate de cărbune activat într'un gaz, o parte din acesta este adsorbită de cărbune până la stabilirea unui echilibru:

a) Cantitatea de gaz adsorbită va fi cu atât mai mare, cu cât temperatura gazului va fi mai joasă.

b) La temperatură constantă, cantitatea de gaz reţinută de cărbune va fi cu atât mai mare, cu cât presiunea va fi mai mare.

Echilibrul ascultă de următoarea formulă a *isotermei de adsorbţie (Freundlich)*:

$$\frac{x}{m} = ap^b$$

în care x = cantitatea gazului adsorbit
m = greutatea cărbunelui folosit
p = presiunea
a = constantă a cărbunelui
b = constantă a gazului.

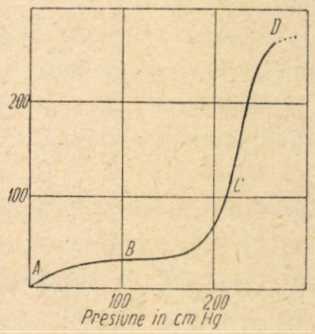


Fig. 9. — Adsorbţie şi condensare capilară pe cărbune activat

Ecuaţia precedentă se aplică numai la presiuni mici (porţiunea AB a isotermei) (fig. 9). Numai în aceste condiţii se produce o adsorbţie adevărată,

adică suprafața cărbunelui se acoperă cu un strat monomolecular de molecule ale gazului adsorbit. Mărind presiunea, se observă o creștere bruscă, enormă, a cantității de gaz reținută de cărbune (porțiunea *BCD* a curbei).

Acest fenomen se produce numai când gazul poate fi lichefiat la temperatura respectivă; se produce o lichefacere a gazului în porii cărbunelui (condensare capilară). Azotul, oxigenul și oxidul de carbon sunt reținute de cărbune la temperatura obișnuită numai prin adsorbție. Bioxidul de carbon, clorul și fosgenul sunt reținuți și prin *condensare capilară.*

Limita solid-lichid

Tensiune superficială se produce și la limita solid-lichid, mai ales când solidul este amorf, deoarece în multe cazuri starea amorfă poate fi socotită ca fiind o stare a unui lichid suprarăcit.

Corpurile solide propriu zise se caracterizează printr'o structură cristalină, care complică foarte mult noțiunea de tensiune superficială la limita solid-lichid.

In acest caz, trebue să ținem seamă de faptul că în timp ce picătura de lichid este alcătuită din molecule, cristalul, în rețeaua sa, poate cuprinde atomi, ioni sau molecule.

Cristalul care va fi în echilibru cu un lichid, nu va avea forma unei sfere, ci a unui poliedru.

Poliedrul cristalin va fi echilibrat în momentul când suma energiilor superficiale ale tuturor fețelor sale va fi minimă:

$$\sum \alpha S = \text{minim.}$$

De aceea la o creștere a cristalului, se vor desvolta acele fețe care au o tensiune superficială minimă (principiul Gibbs-Curie).

II. METODE DE MĂSURARE A TENSIUNII SUPERFICIALE

In general, valoarea tensiunii superficiale se determină prin următoarele metode:

a) metoda capilară;
b) metoda stalagmometrului;
c) metoda cu « cadru »;
d) metoda presiunii maxime a bulelor de gaz.

a) *metoda capilară* se sprijină pe proprietatea unui lichid care udă pereții capilarului de rază r și se ridică în tub (fig. 10) sub acțiunea forței

$$f = 2\pi r\alpha$$

trăgând după sine o coloană h de lichid de densitate δ, a cărei greutate este egală în dyne cu

$$f_1 = \pi r^2 h\delta g$$

în care g este accelerația gravitației; exprimăm forța f_1 în dyne, ca și forța f. După cum s'a arătat mai înainte:

Când $f = f_1$

atunci: $2\pi r\alpha = \pi r^2 h\delta g$

De unde: $\alpha = \frac{rh\delta g}{2}$.

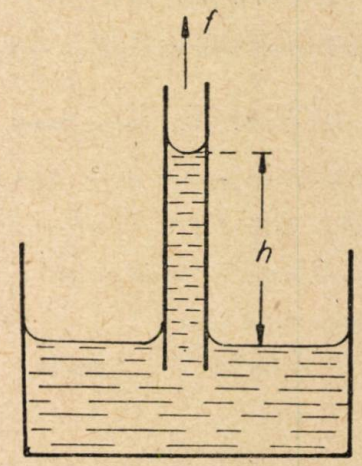


Fig. 10. — Schema ascensiunii capilare a lichidului

Cunoscând r, g, δ și măsurând pe h se poate determina valoarea lui α.

b) *metoda stalagmometrului.* Stalagmometrul (fig. 11) este o pipetă a cărei extremitate este șlefuită (pentru a da o cât mai mare suprafață de scurgere). Extremitatea tubului este strâmtată, astfel ca aceasta să întârzie scurgerea lichidului.

Fig. 11. — Stalagmometrul

Picătura formată la capătul plat cade în clipa când greutatea sa egalează tensiunea superficială. Cu cât tensiunea superficială este mai mare, cu atât dimensiunile picăturilor vor fi mai mari (picături mari și puține).

Pentru un volum dat de lichid, numărul picăturilor formate este invers proporțional cu tensiunea superficială.

Pentru un volum definit, determinăm mai întâi numărul picăturilor de apă și ulterior, numărul picăturilor din lichidul a cărei tensiune superficială voim s'o aflăm (tensiunea superficială relativă).

Dacă α_0 este tensiunea superficială a apei
n_0 este numărul picăturilor de apă
δ_0 este densitatea apei
α este tensiunea superficială a lichidului
n este numărul picăturilor de lichid
δ este densitatea lichidului

atunci vom avea:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{n_0}{n} \cdot \frac{\delta}{\delta_0}$$

De unde:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{n_0 \delta}{n \delta_0}$$

c) *metoda cu « cadru »*. Un inel de platin suspendat se pune în contact cu suprafața lichidului (fig. 12). Forța f care trebue aplicată firului pentru a desprinde inelul de lichid este $f = 2l\alpha$ în care $l =$ lungimea peliculei cu două fețe care se află lipită de inel, dar care se desprinde de acesta.

Lungimea peliculei este egală cu lungimea sârmei inelului

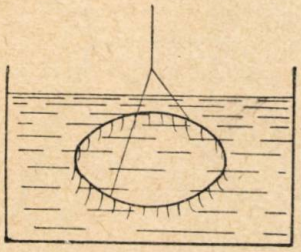


Fig. 12. — Desprinderea inelului din lichid.

d) *metoda presiunii maxime a bulelor de gaz*, elaborată de fizico-chimistul sovietic P. A. Rebinder, se bazează pe principiul ecuației lui Cantor:

$$\alpha = \frac{rp}{2}$$

în care $r =$ raza capilarului

$p =$ presiunea maximă în dyne/cm² la care se sparge o bulă de aer în lichidul studiat.

Dacă se ia un lichid de α_0 cunoscută și se determină p_0, cu același capilar vom obține:

$$\alpha_0 = \frac{rp_0}{2}.$$

De unde:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{rp}{2} \times \frac{2}{rp_0} = \frac{p}{p_0}.$$

Deci:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{p}{p_0}$$

Tensiunea superficială a unui lichid poate fi micșorată sau mărită.

Substanțele care modifică tensiunea superficială se numesc *tensioactive* (micșorează pentru apă: saponinele, alcoolii, acizii, etc.), alte substanțe dizolvate în apă îi măresc tensiunea sa superficială (săruri anorganice: NaCl, Na_2SO_4, Na_2CO_3, etc.).

Există și substanțe *tensioinactive* (zahărul etc.) adică substanțe care n'au nici o acțiune asupra tensiunii superficiale a dizolvantului.

Concluzii

Din cele menționate în articolul de față rezultă că:

a) Tensiunea superficială este o consecință a interacțiunilor moleculare din stratul molecular existent la limita dintre faze.

b) Tensiunea sub care se găsesc moleculele în stratul superficial al unui lichid, determină lichidul să capete o formă geometrică în care să prezinte, pentru un volum dat, un minimum de suprafață.

c) Tensiunea superficială depinde de temperatură și de structura chimică a substanțelor, fiind o constantă fizică de mare însemnătate în studiul materiei.

d) Tensiunea superficială a lichidelor determină fragmentarea lor în picături în timpul scurgerii lor prin tuburi capilare.

e) Capilaritatea este un efect al tensiunii superficiale.

f) Tensiunea superficială a unei substanțe poate fi mărită sau micșorată prin adaos de diferite substanțe (aplicațiuni în toxicologie, biochimie, biologie, etc.).

g) Prin tensiunea superficială la limita solid-gaz ne explicăm fenomenul adsorbției, atât de important în știință și tehnică.

h) Cu ajutorul tensiunii superficiale ne dăm seama de ce majoritatea celulelor din organism au forma sferică.

i) Cu ajutorul tensiunii superficiale ne putem da seama în general de multe fenomene caracteristice pentru starea lichidă a materiei.

Ținând seama de însemnătatea deosebită a cunoștințelor prezentate în articolul de față și de numeroasele lor aplicațiuni în practică, ne dăm seama în general cât de mare este rolul oamenilor de știință din patria noastră « care vor duce cu dârzenie lupta împotriva științei înapoiate și vor deschide drumul spre o știință nouă » (Stalin).

In același timp, tineretului muncitor din țara noastră îi revine sarcina de a-și înzeci eforturile în vederea obținerii unor rezultate cât mai bune în însușirea științei, pentru a acoperi cu cinste cerințele din ce în ce mai mari pe drumul construirii socialismului în Republica Populară Română.

BIBLIOGRAFIE

— Fizica generală de Friș și Timoreva
— Coloizii de Dumanschi.

CHESTIUNI DE EXAMEN[1)]

DATE IN ANUL 1952 LA ADMITEREA IN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ DIN BUCUREȘTI

758*. Grupa I.

1°. Se consideră ecuația

$$16(\lambda^2-1)x^2-8(2\lambda-1)x+3=0$$

a) Să se determine λ, astfel ca rădăcinile ecuației să satisfacă relația:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=32$$

b) Pentru ce valori ale lui λ rădăcinile ecuației sunt ambele pozitive și mai mici decât unu.

$$0\leqslant x_1,\quad x_2\leqslant 1.$$

2°. Intr'un triunghi ABC se consideră mediana AD, bisectoarele unghiurilor ADB și ADC taie respectiv $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ în M și N.

a) Să se arate că:

$$\overline{MN}\parallel\overline{BC}$$

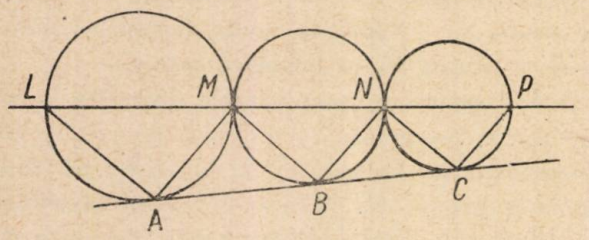
b) există relația $\dfrac{1}{\overline{MN}}-\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{2\overline{AD}}$.

3°. Să se rezolve sistemul:

$$\sin y=2\sin x$$
$$2\cos x+\cos y=\sqrt{3}$$

759*. Grupa II.

1. Două cercuri de raze R_1 și R_2 $(R_1>R_2)$ sunt tangente exterior în punctul M, iar A și B sunt punctele de contact ale unei tangente comune exterioare, L și N punctele diametral opuse lui M, respectiv în cercurile de raze R_1 și R_2.



a) Să se arate că triunghiul AMB este dreptunghiu și să se calculeze în funcție de R_1 și R_2 lungimile laturilor acestui triunghiu.

b) Să se calculeze raportul $\dfrac{\overline{AL}}{\overline{AM}}$ în funcție de R_1 și R_2; să se arate că triunghiurile LAM și MBN sunt asemenea.

c) Să se considere cercul de rază R_3 $(R_3<R_2)$ cu centrul pe LM, tangent exterior cercului de rază R_2 și tangent dreptei AB; să se calculeze R_3 în funcție de R_1 și R_2.

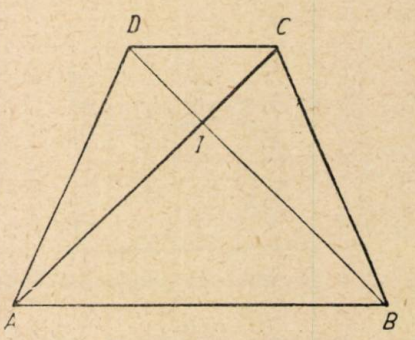
d) In mod analog se construesc cercurile de raze R_4 R_5, ș.a.m.d. Să se calculeze suma ariilor tuturor cercurilor când construcția se repetă de un număr nelimitat de ori.

2. Să se rezolve ecuația

$$\sin x+\cos x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}.$$

560*. Grupa III.

— Un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, de perimetru dat 2p este echivalent cu un pătrat de latură l.



a) Să se determine în funcție de p și l lungimile segmentelor determinate pe diagonale de punctul lor de intersecție.

b) Să se discute rezultatul, precizând condițiile de posibilitate ale problemei.

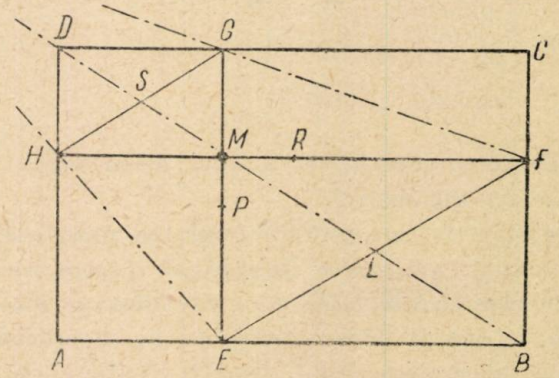
c) Să se dea o construcție geometrică a trapezului, segmentele l și p fiind date și îndeplinind condițiile de posibilitate stabilite mai sus.

— Să se rezolve ecuația

$$\sec x+1=\sin(180^0-x)-\cos x\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0+x}{2}.$$

761*. Grupa IV.

— In dreptunghiul $ABCD$ se ia un punct M pe diagonala BD prin care se duc paralelele EG și FH la laturile AD și AB.



a) Să se arate că dreptunghiurile $AEMH$ și $MFCG$ sunt echivalente.

[1)] La chestiunile 758* — 762* se primesc soluții.

b) Diagonalele EH și FG se taie pe diagonala BD a dreptunghiului dat.

c) Să se determine poziția lui M pe diagonala BD astfel încât centrul cercului circumscris triunghiului AMC să fie situat pe latura AB.

d) Fie P și R mijloacele segmentelor EG respectiv HF; să se arate că dreapta PR se deplasează paralel cu ea însăși când punctul M descrie diagonala BD.

— Să se rezolve ecuația

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{\sin 4x}{4}$$

762*. Grupa V.

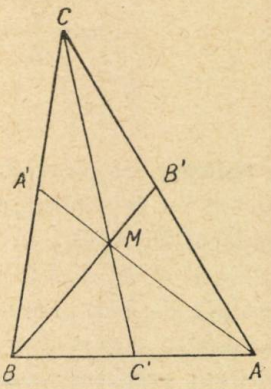
— Se consideră un triunghiu ABC în care se cunosc lungimile laturilor $BC = a$ și $AC = b$, iar medianele AA' și BB' corespunzătoare acestor laturi sunt perpendiculare între ele.

a) Să se calculeze latura AB în funcție de a și b

b) Să se arate că există relația

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = \overline{CC'}^2.$$

c) Să se dea o construcție geometrică a triunghiului ABC.



— Să se arate că între unghiurile unui triunghiu oarecare există relația

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1$$

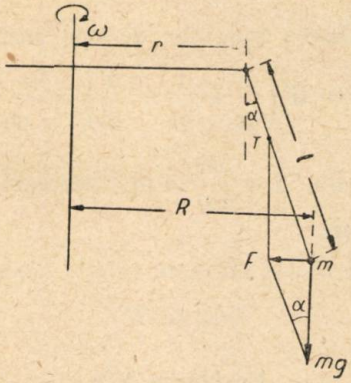
PROBLEME REZOLVATE

Problema 547

Pe un disc care se învârtește este fixat un fir cu plumb, care se stabilește sub unghiul α față de verticală. Este cunoscută distanța r dela punctul de suspensie până la axa de rotație și lungimea firului l. Să se afle viteza unghiulară de rotație.

C. d. P.

Soluție. Fie m masa plumbului. Rezultanta forței de tensiune a firului, T și a greutății plumbului, mg, este forța centripetă F, îndreptată orizontal.



Avem:

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha = m \omega^2 R$$

F este egal cu forța centrifugă rezultată în mișcarea plumbului. $F = \frac{mv^2}{R}$, unde v este viteza lineară a plumbului, iar R depărtarea plumbului de axa de rotație.

$$R = r + l \sin \alpha$$

Rezultă că:

$$mg \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{r + l \sin \alpha},$$

de unde

$$v = \sqrt{g \operatorname{tg} \alpha (r + l \sin \alpha)}.$$

Viteza unghiulară de rotație este deci

$$\omega = \frac{V}{R} = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r + l \sin \alpha}} \text{ radiani/sec.}$$

Problema 550

Să se arate că într'un triunghi oarecare există relația

$$(\cos A + \cos B \cos C) \sin A = (\cos B + \cos C \cos A) \sin B = (\cos C + \cos A \cos B) \sin C = \sin A \sin B \sin C$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Relațiile rezultă imediat, făcând înlocuirile

$$\cos A = -\cos (B + C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

$$\cos B = -\cos (A + C) = \sin A \sin C - \cos A \cos C$$

$$\cos C = -\cos (A + B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

Se obține valoarea comună $\sin A \sin B \sin C$.

Problema 553

Se consideră o piramidă regulată, poligonul de bază având n laturi. Fie x unghiul plan al diedrului format de planul bazei cu o față, iar y unghiul plan

al diedrului a două fețe alăturate. Să se demonstreze relația:

$$\cos\frac{y}{2} = \sin\frac{\pi}{n}\sin x$$

Gh. Dumitrescu

Soluție. Fie piramida $VA_1A_2A_3\ldots A_n$, în care notăm cu O centrul poligonului de bază, cu M mijlocul lui A_1A_2, cu N mijlocul lui A_2A_n.

Fie a, R, m, A, h respectiv apotema și raza poligonului de bază, muchia, apotema și înălțimea piramidei. Avem $y = 2\sphericalangle NPA_2$, unde P este piciorul perpendicularei din A_2 pe VA_1, și deci

$$\sin\frac{y}{2} = \frac{NA_2}{PA_2} = \frac{am}{AR},$$

deoarece

$$A \times \overline{A_1A_2} = m \times \overline{PA_2} \quad \text{și} \quad a \times \overline{A_1A_2} = \overline{NA_2} \times R$$

Apoi

$$\cos\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{A^2R^2 - a^2m^2}{A^2R^2}} = \frac{\overline{A_1A_2} \times h}{2A \cdot R}$$

deoarece

$$m^2 = R^2 + h^2 \text{ și } A^2 - a^2 = h^2 \text{ și } R^2 - a^2 = \frac{\overline{A_1A_2}^2}{4}.$$

Insă

$$\frac{h}{A} = \sin x \quad \text{și} \quad \frac{A_1A_2}{2R} = \sin\frac{\pi}{n}$$

deci

$$\cos\frac{y}{2} = \sin\frac{\pi}{n}\sin x.$$

Problema 561

Pe laturile AB, AC ale triunghiului ABC, ca baze, construim două triunghiuri isoscele ABK și ACJ astfel ca unghiurile dela bază sunt de 75°, iar pe BC, ca bază, construim un triunghi isoscel BIC, cu unghiurile dela bază de 30°.

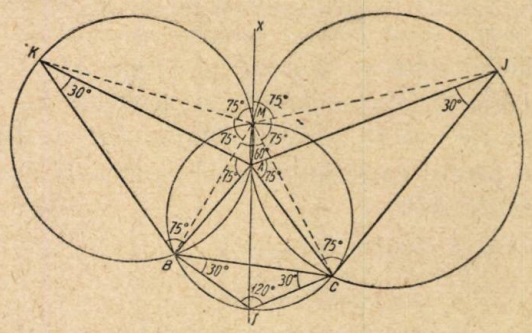
Să se arate că cercurile ABK, ACJ, BCI trec printr'un punct comun M, care este situat pe AI.

N. N. Mihăileanu

Soluție. Cercurile ABK și ACJ se taie în A și M. Să arătăm că cercul BCI trece prin M. Avem:

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle AJC = 30°$$
$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AKB = 30°, \quad \text{de unde}$$
$$\sphericalangle BMC = 60° = 180° - \sphericalangle BIC$$

Patrulaterul $BMCI$ fiind inscriptibil cercul BCI trece prin M.



$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AKB = 30°$, deci MA este bisectoarea unghiului BMC și prin urmare trece prin punctul I, care este mijlocul arcului BIC.

Problema 563

Mediatoarele laturilor BC, AC și AB, taie cercul circumscris respectiv în A_1, B_1, C_1. Notând cu S, R, r aria, raza cercului circumscris și raza cercului înscris triunghiului ABC și cu S_1 aria triunghiului $A_1B_1C_1$, să se arate că

$$RS = 2rS_1$$

Gh. I. Bercea
elev, Oravița

Soluție. Deoarece unghiurile A_1OC_1 și B; C_1OB_1 și A; B_1OA_1 și C sunt suplimentare putem scrie

$$\frac{\text{aria } C_1OA_1}{S} = \frac{R^2}{ac}, \quad \frac{\text{aria } C_1OB_1}{S} = \frac{R^2}{bc}$$

și

$$\frac{\text{aria } B_1OA_1}{S} = \frac{R^2}{ab}$$

Prin adunarea relațiilor de mai sus, găsim

$$(1) \quad \frac{S_1}{S} = R^2\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ab}\right) = \frac{2p\,R^2}{abc}$$

Din relațiile $S = \frac{abc}{4R} = \text{pr}$, scoatem $abc = 4\,\text{pr}\,R$.

Inlocuind în (1) obținem relația cerută

$$2rS_1 = RS.$$

Problema 573

Intr'un triunghi oarecare ABC se dă $BC = 6$ m, $AC = 10$ m și $R = 5{,}5$ m. Să se calculeze AB, fără a întrebuința tabele trigonometrice. Vârful A are două poziții A_1 și A_2. Să se arate că raportul ariilor triunghiurilor A_1BC și A_2BC este același cu al laturilor A_1B și A_2B.

Să se calculeze raza cercului înscris în ambele cazuri.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Avem $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{6}{11}$, $\cos A = \pm\frac{\sqrt{85}}{11}$

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul ABC obținem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \text{ de unde ecuația}$$

$$c^2 - \frac{20\sqrt{85}}{11}c + 64 = 1\ ^{1})$$

$$c = \frac{10\sqrt{85} \pm 6\sqrt{21}}{11}\text{ m}$$

$c_1 = A_1B = 10{,}8809$ m și $c_2 = A_2B = 5{,}8817$ m

Avem

$$\frac{\text{aria } A_1BC}{\text{aria } A_2BC} = \frac{\text{ab sin } (BC, CA_1)}{\text{ab sin } (BC, CA_2)} = \frac{2R\sin(BC, CA_1)}{2R\sin(BC, CA_2)} = \frac{A_1B}{A_2B}$$

Din relațiile

$$S = \frac{abc}{4R} = \text{pr, obținem}$$

$$r = \frac{abc}{4pR}, \text{ deci } r_1 = \frac{60 \cdot 10{,}8809}{26{,}8809 \cdot 11} = 2{,}208\text{ m}$$

$$r_2 = \frac{60 \cdot 5.8817}{21{,}8817 \cdot 11} = 1{,}466\text{ m}.$$

PROBLEME PROPUSE[2)]

735. Să se demonstreze că dacă se dă relația:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1,$$

atunci

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 < \frac{1}{n}.$$

A. Mikișa și V. Mihelson

736. Să se demonstreze că dacă între cifrele numărului 1331 se scrie un număr egal de zerori, atunci se obține un cub perfect.

P. Savciuc

737. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x + u = 0;\quad bz - cy + nw - pv = 0$$
$$y + v = 0;\quad cx - az + pu - mw = 0$$
$$z + w = 0;\quad ay - bx + mv - nu = 0$$

a, b, c, m, n, p fiind cunoscute.

M. Ghermănescu

738. In ce zi a anului, Soarele răsare în același moment la Moscova și la București, știind coordonatele:

Moscova $(\varphi_1 = +55°45';\ \lambda_1 = +37°33')$
București $(\varphi_2 = +44°27';\ \lambda_2 = +26°07')$

C. V. Costăchescu

739. Fie F_1, F_2, F_3, trei forțe concurente și R_1, R_2, R_3, rezultantele forțelor (F_2, F_3), (F_1, F_3), (F_1, F_2) și R rezultanta celor trei forțe. Să se arate că

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + R^2.$$

Mircea D. Constantinescu
elev, București

740. Să se afle viteza sunetului în aer la temperatura $t = 25°$ știind că la o temperatură de 15° viteza lui este de 340 m/s.

Gh. I. Bercea
elev, Timișoara

741. Care este frecvența vibrației unei coarde sonore de argint cu lungimea de 40 cm, cu secțiunea $s = 1$ mm^2, dacă tensiunea aplicată coardei este 1,051 kg.

Ce lungime trebue să aibă un tub sonor deschis pentru a emite același sunet dacă în el undele sonore formează două noduri.

Idem, pentru un tub închis. Densitatea argintului este 10,51.

A. Dobrescu
elev, Târgoviște

742. Să se afle cât arată ceasornicul când acele care arată orele respectiv minutele se suprapun.

Emil Pârvulescu
elev, Turnu-Severin

743. Patru cercuri egale trec prin același punct O. Notând cu M, N, P, Q intersecțiile consecutive ale cercurilor, să se arate că aceste puncte sunt vârfurile unui paralelogram.

Matei Nazarie
elev, București

744. Dacă

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2$$
$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

---

[1]) Nu putem considerea valoarea $\cos A = -\frac{\sqrt{85}}{11}$, deoarece obținem pentru c două valori negative.

[2]) Problemele propuse 758*—762* sunt enunțate la Chestiuni de examen, pagina 16.

Să se arate că

$$(ax + by + cz)^2 = m^2n^2$$

$$a^2n^2 = m^2x^2.$$

C. Ionescu-Țiu

745. Numerele a, b, c, sunt în progresie aritmetică cu rația r; numerele a, $b + 2$, $c + 12$ sunt în progresie geometrică cu rația $q = r + 1$.

Să se găsească numerele a, b, c.

Al. Țigănoiu

746. Să se determine valorile lui m, pentru car

$$(m^2 - 5m + 4)\,x^2 - 2\,(m + 2)\,x + 2 > 0$$

oricare ar fi valorile reale ale lui x.

Simon Șt. Petre

747. Să se arate că în orice poliedru regulat, suma distanțelor unui punct interior la fețele poliedrului este constantă.

Să se calculeze raza sferei înscrisă într'un octaedru regulat cu muchia de 3 cm.

Alex. Golescu
Sibiu

748. Se dă un patrat $ABCD$ ale cărui diagonale se taie în O. Pe latura CD se ia un punct mobil M. Să se arate că:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\,\overline{MO}^2 = 2\,\overline{AB}^2.$$

C. S. Mihalcea
student, București

749. Se dau două drepte paralele Δ_1 și Δ_2 și un punct fix A. Să se construiască un triunghiu ABC cu vârful B pe Δ_1 și vârful C pe Δ_2, iar triunghiul ABC să fie asemenea cu un triunghiu MNP dat.

Tiberiu Weszely
elev, Târgu-Mureș

750. Se dă un cerc (0), o dreaptă Δ și un punct D fix în interiorul cercului. Se cere locul geometric al ortocentrului H al triunghiului ABC, care are vârfurile B și C pe cercul (0), vârful A pe dreapta Δ; iar punctul D este piciorul înălțimii dusă din A pe BC.

Marius V. Iosifescu
elev, Pitești

751. Să se rezolve ecuația

$$2\sin^2 3x + 2\sin^2 x\,(1 + 4\cos^2 x) = 3.$$

Fl. Dudiță
student, Orașul Stalin

752. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghiu oarecare și M_1, M_2, M_3 trei puncte pe laturile triunghiului astfel că A_1M_1, A_2M_2 și A_3M_3 sunt concurente în interiorul triunghiului.

Notăm cu P_1' și P_3'' intersecțiile paralelei dusă prin A_2 la A_1A_3 cu dreptele A_1M_1 și A_3M_3. Punctele P_3' și P_2'' sunt intersecțiile paralelei dusă prin A_1 la A_2A_3 cu dreptele A_3M_3 și A_2M_2. Punctele P_2' și P_1'' sunt intersecțiile paralelei dusă prin A_3 la A_1A_2 cu dreptele A_2M_2 și A_1M_1.

Să se stabilească

$$\overline{P_2'A_2}\cdot\overline{P_1'A_2}\cdot\overline{P_3'A_1} = \overline{P_1''A_3}\cdot\overline{P_3''A_2}\cdot\overline{P_2''A_1} = \overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_2A_3}\cdot\overline{A_3A_1}.$$

Eugen Onofraș
Student, Iași

753. Două drepte Δ_1, Δ_2 taie laturile BC, AC, AB ale unui triunghiu oarecare ABC respectiv în A_1, B_1, C_1 și A_2, B_2, C_2. Dreptele A_1C_2, A_2C_1 taie pe AC în M, M'; dreptele B_1A_2, B_2A_1 taie pe AB în N, N' și dreptele C_1B_2, C_2B_1 taie pe BC în P, P'.

Să se arate că punctele M, N, P și M', N', P' sunt respectiv în linie dreaptă.

D. C. Panu

754. Fluxul de electroni necesar microscopului electronic, este emis într'un tub catodic în care diferența de potențial este V. Cunoscând massa electronului m_e, constanta lui Plank h și viteza luminii c să se calculeze viteza v a electronilor, lungimea de undă a undei asociate λ și mărimea cuantei de energie (ε) a acestui flux.

Valeriu Șt. Udrescu
elev, Pitești

755. Se dau două drepte perpendiculare Ox, Oy. Se ia pe Ox un punct oarecare A și pe Oy un punct oarecare B, apoi se duc cercurile (C_1), (C_2), primul trecând prin A și tangent lui Oy în B, al doilea trecând prin B și tangent în A la Ox. Cercul (C_1) mai taie dreapta Ox în A', iar (C_2) mai taie dreapta Oy în B'.

1°. Să se arate că triunghiurile OAB, $OA'B'$ sunt echivalente.

2°. Dreptele AB, $A'B'$ se intersectează în punctul P, astfel că dreapta OP este perpendiculară pe $\overline{AB}$.

3°. Tangentele în A și B la (C_1), (C_2) respectiv sunt perpendiculare și se intersectează în punctul Q, astfel că dreapta OQ este paralelă cu AB.

Cezar Coșniță

756. Să se stabilească relaţia

$$\operatorname{cotg}\frac{3a+\pi}{6}\operatorname{cotg}\frac{3a-\pi}{6}=2\frac{2\cos a+1}{2\cos x\,2a+1}+1.$$

Alex. Pantea
elev, Oradea

757. Să se calculeze unghiul diedru format de două feţe laterale adiacente ale unei piramide patrulatere regulate ştiind că latura patratului este de 3 metri şi înălţimea piramidei de 7 metri.

Alex. T. Bărbulescu
elev, Piteşti

EXERCIŢII PROPUSE PENTRU ÎNVĂŢĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 242. Să se determine viteza de tăiere la efectuarea unei găuri de diametru 12 mm, dacă burghiul face $n = 636$ ture pe minut.

* * *

E. 243. Să se determine conicitatea k, dacă diametrul mare D al unui trunchi de con este $D=25$ mm, diametrul mic $d=15$ mm, iar lungimea $l = 50$ mm.

Idem, pentru $D = 48$ mm, $d = 38$ mm şi $l = 20$ mm.

Se numeşte conicitate, valoarea expresiei

$$k=\frac{D-d}{l}.$$

* * *

E. 244. Dacă

$$a^2+b^2+c^2=1$$
$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$ax+by+cz=\pm 1$$

avem:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\pm 1.$$

C. I. Ţ.

E. 245. Ce sumă a avut cineva, dacă după ce a cheltuit $\frac{3}{5}$ şi apoi încă $\frac{2}{5}$ din rest, i-a mai rămas 240 lei?

* * *

E. 246. Dacă

$$ay+bz+cx=cy+az+bx$$
$$\varphi x+\varpi y+uz=\varphi z+\varpi x+uy$$

Să se arate că avem relaţiile

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{x-y}{y-z}=\frac{u-\varphi}{\varphi-\varpi}.$$
$$a\varphi+b\varpi+cu=c\varphi+a\varpi+bu$$

C. I. Ţ

E. 247. Un angrenaj de roţi dinţate are numărul de dinţi respectiv $z_1 = 20$, $z_2 = 40$, $z_3 = 30$, $z_4 = 60$ dinţi.

Să se afle numărul de ture pe minut al ultimelor trei roţi, ştiind că prima face 640 ture pe minut.

* * *

E. 248. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{12}{5}$$
$$\frac{yz}{y+z}=\frac{18}{5}$$
$$\frac{zx}{z+x}=\frac{36}{13}.$$

* * *

E. 249. Un aliaj de aur şi aramă are greutatea de 2,4 kgr şi titlul 0,8. Să se afle;

— cât aur trebue adăogat pentru ca titlul să devină 0,9;

— câtă aramă trebue adăugată pentru ca titlul să devină 0,7;

— care este titlul unui astfel de aliaj provenit din aliaje în cantităţi egale cu titlurile respectiv de 0,7 şi 0,9.

* * *

E. 250. Fie un paralelogram $ABCD$ şi un punct E pe latura AB. Dreptele AC şi DE se taie în punctul I şi dreptele CE şi IB se taie în punctul G. Să se arate că

$$\text{aria } AEI + \text{aria } BEG = \text{aria } CIG.$$

* * *

E. 251. Fie H punctul de întâlnire al înălţimilor unui triunghi echilateral ABC. Perpendiculara în A pe AB întâlneşte dreapta BH în punctul B_1, iar perpendiculara din A pe AC întâlneşte dreapta CH în punctul C_1.

Să se arate că figura AB_1HC_1 este un romb

Să se arate că dublul suprafeţei triunghiului ABC, este triplul suprafeţei AB_1HC_1.

Petru Nicola
elev, Timişoara

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

In cursul lunii Noembrie 1952 *s'au evidențiat prin rezolvări de probleme din Revista Matematica și Fizica, următorii:*

— IOSIFESCU V. MARIUS (clasa X-a, Pitești)
— BERCEA I. GHEORGHE (clasa XI-a, Oravița)
— PETROVICI RADU (clasa X-a, Focșani)
— LICEA IOAN (clasa X-a, Galați)
— FOTA M. STAN (clasa X-a, Giurgiu)
— CAVALERU ALEXANDRU (clasa XI, Pitești)
— DOGARU T. MIHAI (clasa XI-a, Ploești)
— ABDULAMIT MUTLU (Anul IV, Constanța)
— ȘINCAN CORNELIU (clasa XI-a L.b.10 Buc.)
— PĂUN GHEORGHE (clasa XI-a, Pitești)
— MIHAI T. IULIAN (clasa X-a, Ploești)
— MUEDIN SUREIA (Anul IV, Constanța)
— TĂTARU D. EMIL (clasa IX-a, Alba Iulia)
— ROMANUS T. COSTACHE (clasa XI-a, Pitești)
— BREZEANU I. IOANIN (clasa XI-a, Târgoviște)
— SCHILERU I. DINU (clasa VII-a Școala 4 elementară, Buc.)

★

In cursul lunii Noembrie 1952 *s'au primit soluții bune la cel puțin cinci probleme, dela următorii rezolvitori:*

ALBA IULIA. Clasa IX-a. Tataru D. Emil (33, 371, 415, 441, 455, 514, 552, 560, 561, 567, 569, 578, 581, 582, 583, 588, 591, 597, 601, 603, 611, 613, 615, 618, 620, 621, P).

BACĂU. Clasa X-a. Tofan V. Ioan (499, 512, 542, 591, 629, 630, 632, 636, 641, 651, P), Zisman Iosif (514, 536, 548, 578, 591, 630, 632, 633, 641, 651, E 203, 204, 206, 207, 209, 212), Mardare Petru (583, 597, 608, 621, 651, 655, 658, 659, 661), Mihai Cozma (587, 590, 598, 600, 609, 611, 613, 615, 625, 633, 655, 658, P).

BAIA MARE. Clasa VI-a. Berindan Vasile (E 70, 160, 175, 176, 208, 209).

BÂRLAD. Clasa XI-a. David Alexandru (574, 587, 591, 608, 615, 617, 621).

BUCUREȘTI. Liceul 1 fete. Clasa IX A Filimon Rodica (536, 537, 591, 611, 613, 615, 632, 655, 658, P). Liceul 1 băieți. Clasa IX-a. Nicolae Alexandru (398, 404, 410, 415 416, 427, 444, 449, 485, 611, 620, 633, E 200), Centrul școlar 2, 10, 13 fete. Petrica Zamfira (506, 601, 624, 632, 633, 634, 635, 662, E 197, 200). Liceul 3 băieți. Clasa IX C. Tudorache Vasile (650, E 203, 204, 208, 209, 211, 218). Școala elementară de băieți Nr. 4. Clasa VII-a. Schileru I. Dinu (203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, P). Liceul 5 băieți. Clasa XI-a. Grejdan Grigore (431, 537, 554, 592, 630, 658), Liceul 6 băieți. Vârgolici V. Virgil (506, 514, 530, 536, 550), Școala de muzică. Clasa VI-a. Marinaș Liliana (E: 175, 200, 213, 218, 220). Liceul 10 băieți. Clasa VIII-a: Găleată Mircea (E: 70, 79, 176, 193, 218), Vidlescu C. Vasile (E: 70, 91, 137, 142, 159, 167, 176, 187). Clasa X-a: Andreescu Gh Mircea (609, 610 611, 643, 645, 647, 648, 651, 652, 655), Pană Toma (611, 615, 621, 643, 655, 658, P), Clasa XI-a: Dobre Florin (329, 369, 482, 621, 658), Dumitru Vasile (403, 453, 474, 477, 486, 496, 499), Mândru Anatolie (406, 455, 458, P). Nicolae D. Nicolae (455, 459, 465, 474, 477, 479, 486), Petre I. Mihai (633, 658, 670, E: 207, 208, 212, 213, 216, 217, 218), Suciu Ion (454, 461, 465, 470, 486, 496), Șincan Corneliu (403, 426, 428, 429, 453, 454, 456, 459, 474, 478, 496, 504, 506, 513, 517, 522, 532, 536, 542, 548, 550, 596, 617, 618, 629, 633, 643, 651, 658, 659, 662, 664, 666, 670, 672, E: 100, 156, 159, 160, 162, 176, 193, 194, 203, 204, 206, 208, 209, 213, 216, 217, 218, 219, 221, P).

CĂLĂRAȘI. Clasa X-a: Rădulescu Ion (655, 658, E: 203, 206, 207, 208, 209).

CÂMPULUNG-MUȘCEL. Clasa IX-a: Mănescu C. Mircea (351, 517, 518, 536, 537, 618, 621, 628, 630).

CARACAL. Clasa XI-a: Băicâ M. Paul (443, 528, 543, 567, 574, 581, 584, E: 148, 149, 158, 200).

CHITILA. (Reg. București). Clasa VI-a: Chițimia M. Eustațiu (E: 47, 62, 91, 96, 105, 118, 124, 125, 131, 187, 194), Clasa VII-a: Ionescu C. Mihail (E: 47, 62, 66, 105, 192, 194), Newton A. Iosif (E: 47, 48, 62, 63, 66, 67, 70, 90, 91, 96, 105, 114, 115, 118, 124, 125, 131, 192, I94).

CLUJ. Clasa IX-a. Constantinescu Florin (588, 615, 618, 621, 658, E: 195, 197, 200), Clasa XI-a. Grecu Dan (515, 525, 540, 591, 600, 601, 607, 630, 633, 651, 655, 658).

CONSTANȚA. Isuf Timucin (598, 608, 611, 621, 630, 640, 643, 645, 648, 655, 658), Școala hidrotehnică. Anul II. Chera N. Dumitru (535, 591, 608, 614, 615, 643, 658, E: 178, 187), Comșa Vasile (391, 599, 608, 615, E: 178, 206, 209), Ionescu I. Ion (591, 599, 608, 615, 621, E: 178, 187, 192, 209), Panciu Ion (608, 615, E: 175, 178, 187, 203, 206, 209, 211), Rizea Alecu (599, 600, 608, 615, E: 178, 192, 197, 209). Anul IV. Abdulamit Mutlu (382, 389, 448, 474, 486, 488, 493, 499, 503, 506, 515, 517, 520, 523, 525, 539, 547, 548, 550, 568, 587, 590, 604, 605, 608, 609, 615, 618, 621, 622, 631, 633, 643, 658), Muedin Sureia (361, 368, 370, 374, 384, 392, 396, 411, 415, 417, 419, 423, 444, 446, 462, 465, 467, 471, 478, 479, 487, 493, 522, 550, 568, 569, 574, 578, 581).

CRAIOVA. Clasa IX-a C. Popescu I. Daniel (386, E: 109, 113, 147, 186, 190, 192, 196, 199, 207, 208), Clasa IX-a. Istinie C. Crăciunel (325, 372, 585, 591, 621, 640, 652, 658), Clasa XI-a B. Cioidjian Gheorghe (533, 536, 537, 605, 606, 611, 613, 615, 617, 618, 620, 621, 622, 631, 632, 633, 640, 642, 649, 651, 652, 655, 658, 661), Tița I. Nicolae (484, 485, 487, 606, 611, 620, 627, 630, 640, 651, 655, 658, 659, P).

CURTEA DE ARGEȘ. Boncea Vasile (630, 632, 633, 651, 655, 658), Filipoiu Gh. Miu (527, 541, 570, 574, 578, 583, 597, 604, 612, 615, 620, 621, 629).

FOCȘANI. Clasa X-a. Petrovici Radu (269, 296, 335, 351, 371, 429, 431, 434, 439, 445, 448, 450, 455, 456, 458, 460, 461, 466, 468, 502, 503, 506, 507, 508, 509, 510, 512, 514, 515, 517, 518, 520, 523, 525, 536, 537, 540, 541, 542).

GALAȚI. Clasa X-a. Licea Ioan (284, 374, 283, 418, 471, 473, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 574, 576, 577, 578, 579, 581, 582, 583, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 597, 600, 603, 604, P).

GIURGIU. Clasa VII-a. Bigan V. Petre (156, 157, 158, 159, 160, 161, 176, 213), Clasa IX-a. Drăgan St. Marin

(E: 155, 156, 161, 217, 218), Clasa X-a. Bigan V. Stan (496, 517, 518, 522, 525, 541, 567, 593), Calotă St. Gh. (615, E: 172, 209, 210, 211, 217, 218), Fotă M. Stan (264, 269, 283, 303, 305 329, 336, 351, 382, 389, 392, 410, 415, 416, 484, 496, 499, 509, 512, 513, 616, 536, 541, 548, 550, 562, 569, 583, 600, 605, 608, 622, 630, 633, 636, 643, 651, 658, 659, P), Petcu I. Dumitru (269, 290, 512, 513, 520, 658, E: 50, 57, 91, 159), Velicu Șt. Mitu (591, 615, 621 E: 188, 192, 193, 195, 197, 202, 207, 208, 209).

IAȘI. Ioniță V. Ion (589, E: 174, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 212), Clasa IX-a. Herșcovici Iosif (421, 437, 533, 536, 537, 552, 561, 588, 597, 601, 613, 632, 650, 655, E: 157, 156, 160, 163, 209, 212), Clasa XI-a. Weisman Elias (581, 604, 629, 633, 655, 658).

ORAȘUL STALIN (Săcele). Zigu I. F. (335, 336, 367, 501, 516, 517, 518, 587, 588, 597, P).

ORAVIȚA. Clasa XI-a. Bercea I. Gheorghe (175, 265, 280, 330, 344, 372, 374, 332, 407, 410, 414, 418, 426, 430, 434, 440, 448, 449, 451, 454, 456, 457, 458, 459, 461, 463, 465, 466, 468, 470, 471, 475, 476, 480, 481, 483, 484, 485, 488, 489, 495, 498, 499, 500, 502, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 512, 514, 518, 519, 520, 522, 523, 527, 528, 533, 536, 537, 540, 541, 545, 550, 553, 554, 555, 559, 560, 561, 562, 565, 567, 568, 578, 581, 582, 583, 586, 588, 589, 591, 593, 595, 597, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 611, 613, 614, 615, 617, 618, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 632, 633, 635, 640, 641, 642, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 659, 662 (122 probleme).

PIATRA NEAMȚ. Clasa XI-a. Aizicovici Mișu (440, 621, 632, 633, 635, 640), Berea D. (512, 514, 518, 608, 613, 621, 633, 635, 641), Berea V. (611, 613, 615, 621, 630, 633, 635, 641), Davidescu Ilie (514, 608, 611, 621, 633, 635, 643), Faibiș Iancu (514, 621, 635, 633, 655, 658), Haimovici Fulga (440, 608, 611, 633, 635), Ionel Botezatu (608, 613, 615, 621, 635), Sum Constantin (514, 533, 605, 615, 621, 622, 625, 633, 635, 641, E: 193), Țifui Vasile (488, 512, 514, 525, 536, 608, 621, 630, 633,641).

PITEȘTI. Liceul de băieți. Clasa IX-a. Casangiu T. Iulian (404, 502, 506, 541, 618, 621, 641, E: 213, 218, 220, 221), Mihalache Cornel (618, E: 174, 175, 176, 185, 195, 209), Saraci Dumitru (517, 518, 533, 543, 574, 627, 643, 644, E: 158, 159, 161, 167, 168, 170, 173, 187), Clasa X-a: Ionescu V. Savin (537, 587, 604, 615, 621, 633, 637, 639, 651), Iosifescu V. Marius (418, 550, 552, 559, 564, 566, 570, 586, 622—637, 639—655, 657—662, P) (47 probleme), Ungureanu Liviu (398, 427, 621, 627, 633, 651), Clasa XI-a: Cavaleru Alexandru (427, 434, 435, 447, 454, 480, 493, 503, 506, 509, 510, 512, 513, 514, 516, 517, 520, 525, 541, 543, 550, 574, 578, 587, 590, 600, 601, 602, 604, 615, 618, 621, 625, 627, 629, 633, 635, 641, 642), Păun Gh. Gheorghe (290, 307, 355, 398, 416, 420, 427, 435, 454, 483, 504, 516, 517, 534, 540, 543, 550, 562, 563, 564, 567, 569, 571, 578, 579, 583, 587, 601, 605, 624, 627, 635), Romanus, T. Costache (514, 517, 518, 520, 525, 536, 541, 550, 568, 569, 574, 578, 587, 590, 603, 604, 608, 611, 618, 621, 625, 631, 632, 633, 635, 642, 643, 651, 655), Școala medie tehnică metalurgică. Anul I D. Burcea Florin (404, 443, 444, 621, 658, 662, E: 213, 218, 221, 222), Dobre C. (404, 443, 444, 621, 658, E: 204, 206, 211, 231, 218, 222), Dudău I. Gheorghe (404, 443, 621, E: 193, 209, 218, 221), Florea N. Ion (404, 443, 444, E: 218, 220), Gaizinger Simion (404, 443, 444, 658, E: 212, 218), Marin C. Marin (404, 443, 621, 658, E. 213, 216, 218, 220, 222), Păun St. Ilie (441, 443, 444, E: 203, 205, 206, 207, 218), Târlea M. Ion (404, 443, 444, 621, E: 205, 213). Anul II. Baldovinescu C. Gheorghe (578, 590, 606, 607, 618, 625, 630, 633), Stănescu Gh. Dumitru (578, 596, 606, 607, 608, 618, 625, 630, 633, 635), Teodorescu M. Marin (578, 596, 625, 630, 635), Tudor M. Gheorghe (578, 596, 606, 607, 608, 618, 625, 630, 633, 635), Anul III. Bălănescu Gheorghe (404, 416, 422, 432, 443, 444, 521, 506, 514, 541, 562, 622, 633, 635, 670, E: 178, 213, 216, 217), Ionilă Gheorghe (404, 416, 432, 443, 444, 466, 488, 499, 514, 541, 621, 658, E: 138, 160, 176, 178, 212), Dinescu I. Gheorghe (426, 435, 439, 443, 444, 502, 514, 663, E: 137, 138, 160, 190, 196, 200, 213, 216, 217, 221, 222), Marcu M. Constantin (621, E: 137, 148, 160, 178, 199), Rădulescu Gh. Ștefan (409, 454, 476, 488, 516, 578, E: 137, 147, 148, 158, 160, 178, 199), Vaidescu Nicolae (404, 432, 444, 499, 502, 514, 550, 578, 621, E: 137, 138, 147, 148, 149, 16 , 175, 200, 218).

PLOEȘTI. Clasa VIII-a. Stroe P. Radu (387, 615, E: 107, 109, 114, 115, 122, 124, 125, 132, 137, 138, 147, 160, 161, 185, 193, 202, 213, 218, 220, 221), Clasa IX-a. Dogaru Iulian (269, 278, 283, 333, 377, 383, 392, 404, 449, 468, 512, 578, 590, 615, 658), Panaitescu Alexandru (269, 278, 283, 290, 333, 383, 392), Clasa X-a A: Dogaru T. Mihai (327, 336, 405, 452, 422, 509, 510, 513, 521, 527, 542, 558, 563, 569, 575, 590, 598, 599, 600, 604, 607, 629, 630, 632, 638, 640, 641, 643, 651, 654, 655, 658), Făgăraș C. (374, 512, 517, 519, 520, 572, 578, 606, 608, 611, 615, 617, 618, 621, 624, 655, 658), Ionescu I. Ion (522, 615, 618, 621, 633, E: 195, 203, 204, 205, 206), Mihai T. Iulian (292, 303, 322, 336, 383, 392, 427, 435, 468, 495, 506 519, 574, 582, 585, 625, 627, 629, 630, 632, 633, 643, 651, 654, 655, 658, 670, 682, E: 109, 193, 199, 200, 203, 204, 207, 208, 209, 212, P), Piță I. Constantin (315, 329, 330, 370, 377, 383, 384, 425, 427, 431, 432, 440, 441, 444, 448, 453, I. Coller 458, 463, 484, P). Școala medie tehnică metalurgică. Anul B. Sergiu (E: 178, 182, 193, 194, 203), Școala elementară Scăeni (Ploești) Clasa VII-a. Angelescu P. Alexandru (E. 70, 72, 99, 132, 137,) Canele Florentina (E: 70, 99, 137, 147, 175), Dima Emilia (E: 70, 72, 83, 160, 175), Dima Virgiliu (E: 70, 72, 83, 90, 175), Dinu Constantin (E: 70, 83, 99, 132, 137, 160), Doniga Felicia (E: 70, 72, 83, 99, 160), Frecăuțeanu Teodor (E: 70, 72, 99, 160, 175, 202, 206), Georgescu Ion (E: 70, 99, 132, 137, 160), Ghindescu Vasile (E: 83, 99, 132, 137, 147), Licu Vasilica (E: 70, 99, 137, 160, 175), Kiș Alexandru (E: 70, 83, 90, 137, 160), Motângă Ecaterina)E: 70, 99, 137, 147, 160), Nicolescu Gheorghe (E: 70, 83, 99, 132, 137), Petrescu Dumitru (E: 70, 72, 83, 99, 137), Stănescu Elena (E: 72, 83, 99, 160, 175).

RÂMNICUL-SĂRAT. Clasa IX-a: Teodorescu Cristian (514, 517, 518, 520, 611, 615, 621, 651, E: 156, 157, 160 165, 175, 176, 178, 190, 197, 202, 208).

RÂMNICUL-VÂLCEA. Bădulescu Nicoleta (317, 633, 654, E: 157, 165).

ROMAN. Școala medie tehnică metalurgică. Ionescu Constantin (568, 615, 618, 643, 648, E: 156, 161, 165, 170, 173, 185, 187, 193, 204, 206, 209, 211).

ROȘIORII DE VEDE. Clasa XI-a. Miclăuș Vasile (251, 272, 325, 341, 342, 350, 357, 426, 433, 454, 458, 465, 474, 487, 496).

SIBIU. Reghintovschi Vasile (446, 461, 462, 477, 486, 504, 542, 560, 569, 578, 587, 590, 591, 593, 615, 627, 628, 529, 630, 633, 637).

SLATINA. Clasa IX-a. Badea D. Constantin (518, 537, 560, 591, 621, 655, 658), Petrulian I. Ştefan (518, 658, E; 178, 192, 197, 208), Clasa XI-a: Popa V. Aurel (550, 583, 611, 621, 632, 633, 651, 655, 658), Popa V. Ion (608, 611, 615, 618, 621, 632, 633, 641, 655, 658), Popescu Ion (449, 456, 461, 466, 561, 603, 651).

TÂRGOVIŞTE. Clasa VIII-a: Brebu I. Gheorghe (536, 630, 643, 658, E: 155, 156, 157, 158, 161, 165, 171, 172, 193, 194, 195, 196, 203, 204, 205, 209, 210, 211), Galiţky Gheorghe (536, 615, 630, 643, 658, E: 155, 156, 158, 160, 161, 170, 173, 193, 199, 203, 204, 209, 218), Oprea A. Aureliu (325, 335, 337, 351, 443, E: 80, 86, 156), Clasa XI-a Bălescu Gr. Eftimie (322, 406, 439, 441, 457, 468, 503, 515, 517, 545, 612, 641, 642, 654, 655, 658, 659), Brezeanu I. Ioanin (206, 222, 257, 263, 300, 313, 317, 364, 403, 454, 456, 476, 501, 507, 508, 512, 514, 522, 525, 528, 536, 573, 541, 550, 556, 574, 578, 591).

TÂRGU-JIU. Clasa IX-a. Cosinschi Dragoş (443, 591, 611, E: 207, 208, 213, P) Râcă Gheorghe (448, 522, 547, 554, 603, 615), Clasa XI-a B. Ionici L. Vasile (611, 632, E: 175, 176, 178, 197, 203, 204, 205, 207, 208, 212).

TECUCI. Ciucă Alexandru (503, 506, 514, 518, 530, 537, 540, 579, 655), Gheorghe T. Cezar (512, 518, 615, 629, 630, 633, 642, E: 202, 204, 206, 207, 208, 209).

TIMIŞOARA. Vela Mihai (512, 517, 525, 615, 621, 629, E: 164, 205, 210, 215), Clasa XI-a. Pascu Pavel (578, 618, 630, 641, 642, 651, 654, P), Şcoala hidrotehnică Anul IV. Payany Andrei (466, 510, 512, 513, 514, 568, 577, 590, 608, 609, 615, E: 150, 151, 158, 159).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Rey Vasile (506, E: 174, 175, 213, 217, 218), Clasa XI-a: Găină F. Stelian (403, 410, 427, 495, 506, 509, 567, 568, 611, 615, 622, 625, 630, 632, 633, 654).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Doran Mircea (536, 591, 611, 633, 655, 658, E: 197) Filimon Ştefan (468, 517, 520, 525, 574, 608, 621, 629, E: 186), Păunescu D. Ion 536, 537, 611, 621, 629, 658), Clasa XI-a. Zaharescu Marius (520, 578, 604, 608, 615).

★

Redactarea soluţiilor. Pe aceiaşi foaie de formatul caietului obişnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluţia să fie însoţită de numărul şi enunţul complect al problemei. Se poate scrie în continuare şi pe contra pagină; iar dacă soluţia necesită figură, se va desena cu îngrijire.

— Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceaşi foaie.

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluţie, numele, şcoala, clasa şi localitatea. Soluţiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

— La orice problemă propusă se primesc soluţii cel puţin timp de 6 luni dela publicarea enunţului.

— Se mai primesc soluţii la problemele cu numărul de ordine: 500, 502, 503, 504, 509, 511, 514, 521, 524, 526, 527, 529, 531, 532, 533, 534, 538, 540, 543, 544, 546, 548, 549, 551, 552, 554, şi următoarele; iar pentru elementar la exerciţiile E: 150 şi următoarele.

— Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse şi însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiţi ca să înceapă a propune probleme, după ce au soluţionat un număr mare de exerciţii şi probleme.

— Intrucât sosesc la redacţie cereri de numere mai vechi ale revistei, sau reclamaţiile abonaţilor de neprimirea revistelor; vă informăm că pentru abonamente şi procurări de reviste să vă adresaţi Centrului de difuzare a presei, din str. Const. Mille Nr. 14 Bucureşti, după cum se arată şi pe coperta revistei.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice şi fizice, articole, dări de seamă asupra activităţilor cercurilor de matematică şi fizică pentru elevi, sugestii şi propuneri, etc. se trimit pe adresa redacţiei Revistei Matematice şi Fizice, strada Dionisie Lupu 40, parter, Raionul, Stalin Bucureşti.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: STR. DIONISIE LUPU, 40. Parter. — BUCUREŞTI
RAIONUL STALIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus

★

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti, precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru intreprinderi . . . . . Lei 60 anual
„ „ muncitori, technicieni, elevi . . „ 12 „

DIN CATALOGUL

EDITURII TEHNICE

★

CĂRȚI APĂRUTE

B. IOSUB:
« Matematici recreative »

160 pag. 5,87 lei

I. I. ALEXANDROV:
« Probleme de construcții geometrice »

212 pag. 9 lei

N. P. TARASOV:
« Manual de matematici superioare »
(trad. din l. rusă)

339 pag. 11,90 lei

* * *

« Tabele și formule matematice »

400 pag. 10 lei

Profesorii: I. CREANGĂ, A. HAIMOVICI, M. HAIMOVICI, O. MAYER, I. POPA și conf. M. ROTH:
« Curs de geometrie analitică »
Lucrare premiată cu premiul de Stat R.P.R.

707 pag. 34 lei

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — C. 2767.

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E 1426 X-D

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

★

"Aniversarea glorioaselor lupte revoluționare din 1933 trebue să constitue pentru întregul popor muncitor și înainte de toate pentru ceferiștii noștri, un imbold pentru a muncii mai bine, cu și mai mult elan, cu și mai mare voință de a lichida toate lipsurile și de a mătura din cale toate piedicile, pentru a se arăta în muncă demni de faptele eroice ale luptătorilor revoluționari din 1933".

(Din expunerea tovarășului Gheorghe Gheorghiu-Dej la consfătuirea pe țară a ceferiștilor).

★ ★ ★

FEBRUARIE 1953

2

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

Pag.

1. *Reciprocele teoremelor relative la relaţiile metrice fundamentale în triunghiurile dreptunghice, de I. Barbălat* ... 25
2. *Oscilograful catodic, de Maximilian Fränkel* ... 36
3. *Construcţia unui motor electric pentru curent continuu, de Prof. N. Rădulescu* ... 36
4. *Probleme rezolvate (554, 555, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 577, 578, 579, 580* ... 38
5. *Probleme propuse (763—783)* ... 42
6. ***Exerciţii** propuse pentru învăţământul elementar* ... 44
7. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* ... 45

2

ANUL IV FEBR. 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 2 Februarie 1953

Országos ... Könyvtár TULAJDON

RECIPROCELE TEOREMELOR RELATIVE LA RELAŢIILE METRICE FUNDAMENTALE ÎN TRIUNGHIURILE DREPTUNGHICE

I. Barbălat

In cărţile de geometrie elementară nu se examinează, în general, propoziţiile reciproce ale celor trei teoreme fundamentale relative la relaţiile metrice în triunghiurile dreptunghice.

Este adevărat că teorema: *într'un triunghi, pătratul laturei opuse unui unghi ascuţit (obtuz) este egal cu suma pătratelor celorlalte două, minus (plus) de două ori produsul uneia dintre acestea prin proecţia celeilalte pe ea*, are drept consecinţă imediată reciproca teoremei lui Pitagora.

Nu acelaş lucru se întâmplă cu teorema catetei; *într'un triunghi dreptunghic, o catetă este medie proporţională între ipotenuză şi proecţia ei pe ipotenuză*, şi nici cu teorema înălţimii: *într'un triunghi dreptunghic, înălţimea dusă din vârful unghiului drept este medie proporţională între cele două segmente pe care le determină pe ipotenuză.*

Vom examina reciprocele acestor trei teoreme şi în acelaş timp vom sublinia noţiunea de *condiţie necesară şi suficientă pentru ca o configuraţie geometrică să aibă o anumită proprietate.* Astfel, cititorii elevi, vor avea încăodată un prilej de a se deprinde cu mânuirea unui instrument de logică, pe care îl vor folosi deseori şi în alte discipline matematice, discipline care — cel puţin în aparenţă — au un caracter mai puţin intuitiv decât geometria elementară.

§ 1. O teoremă de geometrie euclidiană este o propoziţie formată din două propoziţii distincte: una, numită *ipoteză*, descrie o anumită configuraţie geometrică, *a cărei existenţă în cadrul geometriei este asigurată de axiomele geometriei şi, eventual, de propoziţiile demonstrate anterior*; alta, numită *concluzie*, enunţă o proprietate a configuraţiei respective.

Se atrage atenţia că în matematici o propoziţie are *unu sau mai multe predicate*, în timp ce în gramatică propoziţia se defineşte ca având *un singur* predicat. Cu această convenţie, ceeace în gramatică se numeşte *frază*, se va numi, în matematici, tot propoziţie.

Notând cu P propoziţia ipoteză şi cu Q propoziţia concluzie, teorema afirmă că P atrage după sine pe Q, cu alte cuvinte, că P implică Q, şi se notează $P \to Q$.

A demonstra propoziţia $P \to Q$ înseamnă a demonstra că din P, presupusă adevărată, rezultă că Q este adevărată sau *că este fals că totodată P este adevărată şi Q falsă* sau că Q *este o condiţie necesară pentruca P să fie adevărată.*

De exemplu, notând cu P propoziţia { Triunghiul ABC are $\sphericalangle A$ drept } şi cu Q propoziţia { In triunghiul ABC avem relaţia $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$ }, propoziţia $P \to Q$ este enunţul teoremei lui Pitagora.

Axiomele geometriei elementare asigură existenţa triunghiurilor cu un unghi drept, deci configuraţia geometrică descrisă în ipoteza P există.

Să examinăm cazul când *nu există* nici o configuraţie geometrică descrisă de o ipoteză P.

Să notăm, de exemplu, cu P propoziţia { *Triunghiul ABC este dreptunghic şi echilateral* }, cu Q propoziţia { *Bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC sunt concurente* } şi cu $\overline{Q}$ negaţia propoziţiei Q, adică { *Bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC nu sunt concurente* }.

Axiomele și primele teoreme ale geometriei elementare ne arată că nu există nici o configurație geometrică cu proprietățile descrise de P, adică nu există nici un triunghiu care să fie totodată și dreptunghic și echilateral.

Totuși propoziția $P \to Q$ *este adevărată, ca de altfel și propoziția* $P \to \overline{Q}$.

In adevăr este fals că totodată P este adevărată și Q (respectiv $\overline{Q}$) falsă, deoarece propoziția P este falsă.

Așa dar nu are nici un fel de importanță ce proprietate geometrică se atribue unei configurații geometrice neexistente, ceeace este cu totul natural.

§ 2. Reciproca teoremei lui Pitagora (cu notațiile de la începutul § 1 va fi

$$Q \to P$$

sau desvoltat:

Dacă {într'un triunghiu ABC avem relația $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2$} atunci {triunghiul ABC este dreptunghic cu $\sphericalangle A$ drept}.

Configurația geometrică a cărei existență este presupusă acum este aceia a triunghiurilor ABC cu $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2$. Există asemenea triunghiuri? Da, căci în baza teoremei lui Pitagora triunghiurile dreptunghice cu vârful în A satisfac aceste relații. Sunt oare singurele triunghiuri care satisfac aceste condiții? Sau, cu alte cuvinte, condiția Q este oare și *suficientă* pentruca triunghiul ABC să fie dreptunghic cu $\sphericalangle A$ drept?

Dacă reușim să dovedim că implicația $Q \to P$ este adevărată, răspunsul este afirmativ; dacă nu reușim, sau mai clar, dacă această implicație *nu* este adevărată, *atunci* Q *nu este o condiție necesară și suficientă pentru ca* P *să fie adevărată ci numai o condiție necesară.*

Fie $A'B'C'$ un triunghiu cu $\sphericalangle A'$ drept și cu $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{A'C'} = \overline{AC}$. Există *un* triunghiu dreptunghic și *numai unul*, construit cu aceste elemente (mai puțin poziția sa în plan).

Conform teoremei lui Pitagora aplicată triunghiului dreptunghic $A'B'C'$, avem

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{B'A'}^2 + \overline{C'A'}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$$

Deci $\overline{B'C'} = \overline{BC}$.

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au toate laturile respectiv egale și deci sunt egale. Rezultă că $\sphericalangle A = \sphericalangle A' =$ un unghiu drept, deci ABC este un triunghiu dreptunghic cu vârful în A și teorema este demonstrată.

Teorema directă și teorema reciprocă pot fi enunțate într'o singură teoremă: *Condiția necesară și suficientă pentruca un triunghi să fie dreptunghic este ca pătratul unei laturi să fie egal cu suma pătratelor celorlalte două.*

§ 3. Pentru a examina reciproca teoremei catetei, vom nota cu P propoziția {*Triunghiul* ABC *are* $\sphericalangle$ A *drept*} și cu Q propoziția {*Latura* $\overline{AB}$ *este medie proporțională între* $\overline{BC}$ *și proecția ei* $\overline{BD}$ *pe dreapta* BC} și vom căuta consecințe ale ipotezei Q.

Dacă

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD} \qquad (1)$$

iar punctele B și C sunt distincte, poziția relativă a punctelor B, C, D poate fi numai una din următoarele:

a) D coincide cu B.

b) D coincide cu C.

c) D este situat între B și C.

d) C este situat între B și D.

e) B este situat între D și C.

Va trebui să examinăm, pe rând, aceste cinci ipoteze care se exclud între ele două câte două și care epuizează toate cazurile posibile. Deasemenea va trebui să examinăm compatibilitatea lor cu ipoteza Q, în baza căreia ABC este un triunghi, adică o configurație geometrică obținută prin unirea cu segmente a trei puncte A, B, C din plan, distincte și necolineare și că în plus în acest triunghiu avem relația (1). Deasemenea, dacă unele dintre cele cinci ipoteze contrazic vreo propoziție (axiomă sau teoremă) din geometrie atunci ele se vor înlătura.

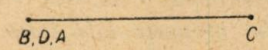


Fig. 1

a) Dacă D coincide cu B, din relația (1) rezultă că $\overline{AB} = 0$, ceeace contrazice ipoteza că punctele A și B sunt distincte.

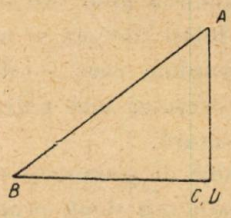


Fig. 2

b) Dacă D coincide cu C, relația (1) ne dă $\overline{AB} = \overline{BC}$; cum $\sphericalangle ADB$ este drept, rezultă că

triunghiul dreptunghic ABC, cu vârful drept în C, are ipotenuza egală cu o catetă, ceeace este contradictoriu.

c) Relaţia (1) se scrie sub forma echivalentă

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \qquad (2)$$

In ipoteza *c)*, din relaţia (2) şi din faptul că triunghiurile ABC şi DBA au unghiul din B comun, rezultă că ele sunt asemenea şi *deci unghiul din* A *al triunghiului* ABC *este drept.*

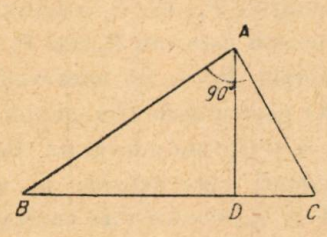


Fig. 3

d) In ipoteza că C este situat între B şi D, unghiul C al triunghiului ABC este obtuz.

Raţionamentul de mai sus ne arată însă că triunghiurile ABC şi DBA sunt asemenea, ceeace conduce la contradicţia $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAD$ primul unghi fiind obtuz, prin ipoteză, iar al doilea ascuţit, ca unghi alăturat ipotenuzei triunghiului dreptunghic ABD.

e) Dacă B este situat între D şi C, unghiul B este obtuz. Triunghiurile ABC şi DBA nu sunt asemenea deoarece primul are un unghi obtuz şi al doilea este dreptunghic. Fie însă A' simetricul lui A faţă de perpendiculara BX dusă în B pe BC. Avem $\overline{BA} = \overline{BA'}$ şi $\sphericalangle A'BC = \sphericalangle ABD$.

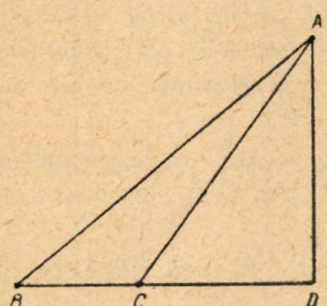


Fig. 4

Deci triunghiurile ABD şi CBA' sunt asemenea, având un unghi egal cuprins între două laturi proporţionale adică $\sphericalangle BA'C$ este drept. ***Rezultă că triunghiul*** ABC ***este obţinut dintr'un triunghi*** *dreptunghic* A'BC, *punctul* A *fiind simetricul lui* A' *faţă de perpendiculara* BX *pe ipotenuza* BC *a triunghiului* A'BC.

In rezumat, condiţia Q este necesară *dar nu şi suficientă* pentruca triunghiul ABC să fie dreptunghic. *Propoziţia* Q *implică sau că triunghiul* ABC *este dreptunghic în* A, *dacă protecţia* D *a lui* A *pe* BC *este situată între* B *şi* C *sau că triunghiul* ABC *se obţine dintr'un triunghi dreptunghic prin construcţia indicată la* e) *dacă* B *este situat între* D *şi* C,

§ 4. In acest paragraf vom nota cu P propoziţia. {*Triunghiul* ABC *are* $\sphericalangle$ A *drept*} *şi cu* Q *propoziţia* {*Înălţimea* $\overline{AD}$ *este medie proporţională între segmentele* $\overline{BD}$ *şi* $\overline{CD}$ *pe care le determină pe latura* BC} şi vom căuta consecinţe ale ipotezei Q.

Dacă

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{CD}. \qquad (3)$$

Trebuie să refacem discuţia de la § 3. Dacă D coincide cu B sau cu C triunghiul ABC are două

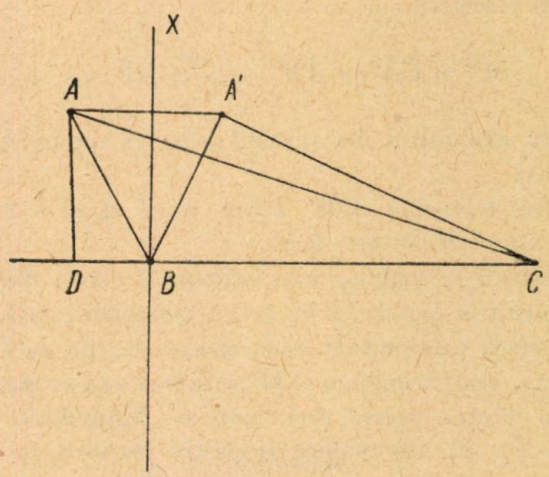


Fig. 5

vârfuri confundate, ceeace contrazice ipoteza Q.

Dacă D este situat îrtre B şi C, relaţia (3) scrisă sub forma echivalentă

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} \qquad (4)$$

ne arată (fig. 3) că triunghiurile ADC şi BDA sunt asemenea şi deci $\sphericalangle B = \sphericalangle DAC =$ complimentul unghiului C şi deci că *triunghiul* ABC este *dreptunghic în* A.

Dacă C este situat între B şi D (fig. 4), relaţia (4) ne arată, la fel ca mai sus că triunghiurile ADC şi BDA sunt asemenea şi că $\sphericalangle B = \sphericalangle DAC$.

Acesta din urmă este complimentul suplimentului unghiului obtuz C, deci

$$\sphericalangle B = \sphericalangle 1\,dr - (2\sphericalangle dr - \sphericalangle C) \text{ sau}$$
$$\sphericalangle C - \sphericalangle B = \sphericalangle 1\,dr. \qquad (5)$$

Dacă punctul B este situat între D și C, obținem în mod analog

$$\sphericalangle B - \sphericalangle C = \sphericalangle 1\,dr \qquad (5')$$

In rezumat, condiția Q *este necesară* dar *nu și suficientă* pentruca triunghiul ABC să fie dreptunghic.

Propoziția Q *implică sau că triunghiul* ABC *este dreptunghic în* A, *dacă proecția* D *a lui* A *pe* BC *este situată între* B *și* C, *sau că diferența unghiurilor alăturate laturei* BC *este un unghi drept, dacă proecția* D *este situată în exteriorul segmentului* BC.

§ 5. In partea introductivă a acestui articol am afirmat că reciproca teoremei lui Pitagora se deduce imediat din propoziția denumită în mod curent *teorema lui Pitagora generalizată* și care, în esență, este o exprimare geometrică a relației trigonometrice

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{CA}\;\overline{AB}\cos A$$

Să examinăm mecanismul logic al acestei afirmații.

Un triunghiu ABC poate avea $\sphericalangle A < 1\,dr$. $\sphericalangle A = 1\,dr$, $\sphericalangle A > 1\,dr$.

Există triunghiuri care satisfac fiecăreia dintre aceste trei ipoteze și *nu există* triunghiuri care să satisfacă concomitent două dintre ele; pe de altă parte, orice triunghiu ABC satisface una și numai una dintre aceste trei ipoteze. Notându-le cu P_1, P_2, P_3, ele implică respectiv propozițiile

Q_1 { *In triunghiul* ABC *avem relația* $\overline{BC}^2 < \overline{AB}^2 + AC^2$ }

Q_2 { *In triunghiul* ABC *avem relația* $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ }

Q_3 { *In triunghiul* ABC *avem relația* $\overline{BC}^2 > \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ }

adică propozițiile

$$P_1 \to Q_1, \quad P_2 \to Q_2, \quad P_3 \to Q_3 \qquad (6)$$

sunt adevărate.

Există deci triunghiuri care satisfac fiecăreia dintre propozițiile Q_1, Q_2, Q_3. Pe de altă parte, întrucât două numere reale sunt legate întotdeauna prin *una și numai una* dintre relațiile "$<$", "$=$", "$>$", *orice triunghiu* ABC *satisface una și numai una dintre condițiile* Q_1, Q_2, Q_3.

Afirm că, în acest caz din implicațiile 6) *rezultă teoremele reciproce, adică implicațiile*

$$Q_1 \to P_1, \quad Q_2 \to P_2, \quad Q_3 \to P_3 \qquad (7)$$

sunt adevărate.

In adevăr, dacă una din implicațiile (7) ar fi falsă, de exemplu prima, ar exista triunghiuri ABC pentru care Q_1 este adevărată și P_1 falsă. Cum orice triunghiu satisface la una și numai una dintre condițiile P_1, P_2, P_2, rezultă că ar exista triunghiuri pentru care sau P_2 sau P_3 este adevărată, de exemplu P_2 să fie adevărată. Dacă P_2 este adevărată pentru acele triunghiuri, implicațiile (6) ne arată că și Q_2 este adevărată. Rezultă că ar exista triunghiuri care satisfac în același timp condițiilor Q_1 și Q_2, ceeace este contradictoriu.

In considerațiile de mai sus am avut de a face cu mulțimea tuturor triunghiurilor din planul euclidian și cu trei proprietăți P_1, P_2, P_3 ale elementelor acestei mulțimi de triunghiuri.

Mai general, fie E o mulțime de elemente oarecari și $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n proprietăți relative la elementele mulțimii E, astfel încât orice element al mulțimii să satisfacă la o proprietate și numai la una. Astfel, dacă elementul x al mulțimii E are proprietatea P_1, el nu are nici una din proprietățile $P_2, P_3, \ldots, P_n$.

Fiecare dintre proprictățile $P_1, P_2, \ldots P_n$ definește câte o parte a mulțimii E. De exemplu, proprietatea P_1 definește partea (submulțimea) E_1 a tuturor elementelor din E care au proprietatea P_1; la fel se definesc părțile $E_2, E_3, \ldots, E_n$ ale mulțimii inițiale E.

Fiecare din părțile astfel definite conține cel puțin un element, două părți diferite nu au elemente comune și reuniunea lor este tocmai mulțimea inițială E.

Fie $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, propoziții consecințe respective ale lui $P_1, P_2, \ldots P_n$, deci astfel ca implicațiile

$$(8) \quad P_1 \to Q_1, \quad P_2 \to Q_2, \quad P_3 \to Q_3, \ldots P_n \to Q_n$$

să fie adevărate.

Presupunem că propozițiile consecințe se exclud două câte două, adică un element x al lui E nu poate avea, în același timp, și proprietatea Q_i și proprietatea Q_j. ($i \neq j$ sunt numere cuprinse între 1 și n).

In acest caz orice element a lui E *satisface la una şi numai una din condiţiile* Q_i *şi toate teoremele reciproce*

$$(9)\quad Q_1 \to P_1,\ Q_2 \to P_2,\ Q_3 \to P_3, \ldots Q_n \to P_n$$

sunt adevărate.

Demonstraţia acestei propoziţii este identică cu aceia dată mai sus în cazul particular al teoremei lui Pitagora generalizată.

Se vede clar că teorema este valabilă, mai general, pentru o familie oarecare de proprietăţi P, dacă ele se bucură de proprietăţile indicate mai sus.

Se mai vede că părţile E_1', E_2', E_3' etc. ale lui E definite de proprietăţile Q sunt identice cu acele definite de proprietăţile P. In adevăr, în baza ipotezelor (8), avem de exemplu E_1 inclus în E_1' (adică elementele lui E_1 aparţin şi lui E_1') şi în baza teoremelor (9) rezultă că E_1' este inclus în E_1, deci E_1 şi E_1' coincid; la fel se vede că şi E_2 coincide cu E_2', E_3 cu E_3', etc.

Astfel, *am pus în evidenţă o schemă generală care permite să se afirme că, în condiţiile indicate, dacă teoremele* (8) *sunt adevărate, atunci şi reciprocele lor* (9) *sunt deasemenea adevărate.*

Adâncirea acestor condiţii conduce la studiul *relaţiilor de echivalenţă pe o mulţime de elemente*

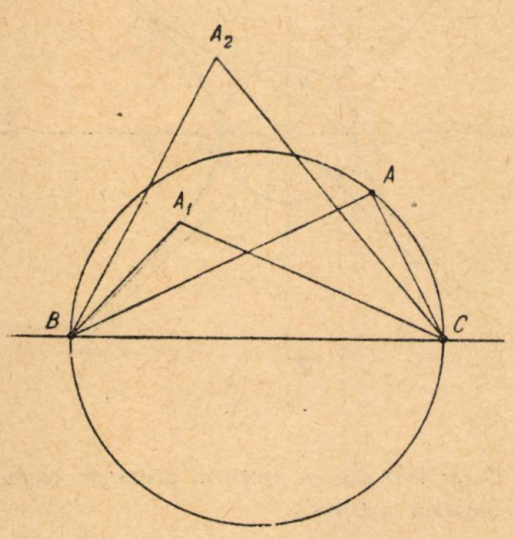


Fig. 6

dată, una dintre noţiunile cele mai importante atât în matematica clasică cât şi, mai ales, în matematica modernă.

§ 6. Observaţiile din paragraful precedent ne obligă să cercetăm triunghiurile ABC pentru care, cu notaţiile din § 3 şi § 4, avem

$$\overline{AB}^2 < \overline{BC} \cdot \overline{BD} \quad , \quad \overline{AB}^2 > \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

$$\overline{AD}^2 < \overline{BD} \cdot \overline{DC} \quad , \quad \overline{AD}^2 > \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

Cu toate că examinarea acestor probleme se poate face direct, o vom lega de o împărţire a planului euclidian în diferite submulţimi de puncte, după cum una sau alta dintre anumite relaţii sunt verificate.

a) Fie B şi C două puncte fixe din plan şi A un punct variabil în acest plan care împreună cu punctele fixe formează un triunghi.

S'a arătat că condiţia necesară şi suficientă pentruca

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \text{ este ca } \sphericalangle A \text{ să fie drept.}$$

Deci, *în această condiţie punctul* A *descrie cercul trasat pe* BC *ca diametru, din care însă s'au scos punctele* B şi C.

Apoi, condiţia necesară şi suficientă pentru ca

$$\overline{BC}^2 > \overline{A_1B}^2 + \overline{A_1C}^2$$

este ca $\sphericalangle A_1$ să fie obtuz, deci *în această condiţie punctul* A_1 *descrie interiorul cercului precedent din care s'au scos punctele segmentului* BC. Insfârşit condiţia necesară şi suficientă pentruca $\overline{BC}^2 < \overline{A_2B}^2 + \overline{A_2C}^2$ este ca $\sphericalangle A_2$ să fie ascuţit, deci *în această condiţie punctul* A_2 *descrie exteriorul cercului din care s'au scos punctele de pe dreapta BC prelungită la dreapta şi la stânga.*

Am împărţit astfel planul în patru submulţimi de puncte:

E_1, *punctele de pe cerc fără* B *şi* C;

E_2, *punctele din interiorul cercului, fără punctele segmentului* BC;

E_3, *punctele din exteriorul cercului, fără punctele depe dreapta* BC *prelungită în exteriorul cercului*;

E_4, *punctele de pe dreapta* BC *(corespunzând unor triunghiuri degenerate cu* A *colinear cu* B *şi* C*)*.

Aceste patru mulţimi de puncte posedă fiecare elemente, (adică nu sunt vide), nu au puncte comune două câte două şi reuniunea lor este identică cu mulţimea punctelor din planul euclidian. Fiecare dintre ele este caracterizată fie de propoziţia directă corespunzătoare, fie de propoziţia reciprocă, ceeace confirmă încăodată afirmaţiile făcute în § 5.

b) Punctele A, vârfuri de triunghiuri, pentru care $\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BD}$ se găsesc (§ 3) fie pe cercul descris pe BC ca diametru, fie pe simetricul său faţă de perpendiculara $X'BX$ pe BC în B, cu excepţia punctelor C, B şi C' (deoarece ultimele nu dau, împreună cu B şi C, triunghiuri veritabile).

Pentru orice punct interior unuia dintre aceste două cercuri, de exemplu pentru punctul A_1' din interiorul cercului al doilea, corespunde un punct simetric A_1 în interiorul primului. Insă oblica $\overline{BA_1}$ este inferioară oblicei $\overline{BA}$, deoarece punctul A_1 este între A și D, deci

$$\overline{BA_1'}^2 < \overline{BA}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

Rezultă că pentru orice punct A_1 *sau* A_1', *interior*

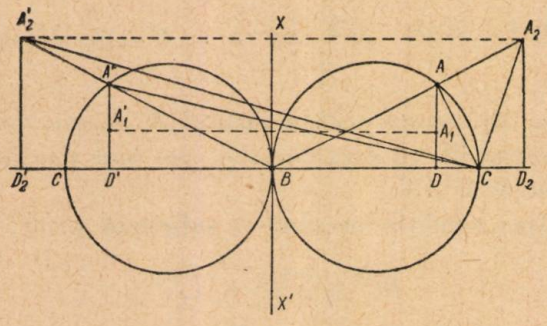


Fig. 7

unuia dintre cele două cercuri, și vârf al unui triunghiu de bază BC, *inegalitatea*

$$\overline{BA_1'}^2 < \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

este satisfăcută. Vor face excepție punctele de pe segmentul $\overline{C'BC}$ *care nu conduc la triunghiuri veritabile.*

Fie A_2 un punct exterior celor două cercuri și anume situat de aceiași parte a dreptei $X'X$ ca și punctul C. In acest caz dreapta BA_2 taie cercul descris pe $\overline{BC}$ ca diametru într'un punct A situat între B și A_2, deci $\overline{BA} < \overline{BA_2}$. Fie D_2 proecția lui A_2 pe BC. Patrulaterul ACD_2A_2 este inscriptibil și deci

$$\overline{BA} \cdot \overline{BA_2} = \overline{BC} \cdot \overline{BD_2} \text{ de unde rezultă că}$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{BD_2} < \overline{BA_2'}^2.$$

Dacă punctul A_2' ar fi situat în exteriorul cercului (BC') și de aceiaș parte a lui $X'X$ ca punctul C', prin considerarea simetricului A_2 al lui A_2' față de $X'X$, și a egalităților evidente $\overline{A_2'B} = \overline{A_2B}$, $\overline{BD_2'} = \overline{BD_2}$, rezultă că $\overline{A_2'B}^2 > \overline{BC} \cdot \overline{BD_2'}$.

Am împărțit deci planul în patru submulțimi de puncte:

Submulțimea E_1, *a punctelor de pe cercurile* (BC) *sau* (BC'), *fără punctele* B, C, C'; *toate punctele lui* E_1 *sunt vârfuri* A *de triunghiuri* ABC *pentru care* $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$.

Submulțimea E_2 *a punctelor interioare acestor cercuri, fără punctele segmentului* $\overline{C'C}$. *Toate punctele submulțimii* E_2 *sunt vârfuri* A *de triunghiuri* ABC *pentru care* $\overline{AB} < \overline{BD} \cdot \overline{BC}$.

Submulțimea E_3 *a punctelor exterioare cercurilor precedente, fără punctele dreptei* $\overline{C'C}$ *prelungită la dreapta lui* C *și la stânga lui* C'. *Toate punctele mulțimii* E_3 *sunt vârfuri de triunghiuri* ABC *pentru care* $\overline{AB}^2 < \overline{BD} \cdot \overline{BC}$.

In fine *submulțimea* E_4 *a punctelor de pe dreapta* CC', *corespunzând unor triunghiuri* ABC *degenerate.*

Aceste patru părți nevide ale lui E sunt caracterizate prin condițiile respective, care ca în § 5 sunt necesare și suficiente pentruca proprietatea corespunzătoare să aibă loc.

c) Dacă $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$ și punctul D este între B și C, în baza analizei din § 4, punctul A descrie cercul trasat pe $\overline{BC}$ ca diametru, fără punctele B și C.

Dacă punctul D este exterior segmentului $\overline{BC}$, locul geometric al vârfurilor triunghiurilor ABC satisfăcând relația (3) nu mai este un cerc sau o dreaptă. Acest loc geometric poate fi studiat geometric, cu ajutorul relației echivalente cu (3), în cazul D exterior lui BC și care este $|\sphericalangle B - \sphericalangle C| = 1\ dr$ sau cu ajutorul primelor elemente de geometrie analitică.

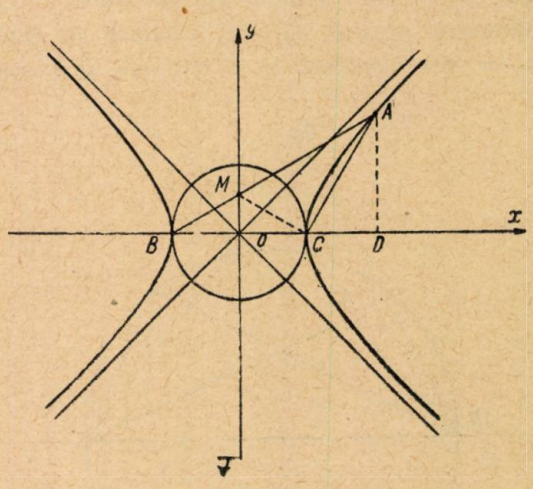


Fig. 8

Fie O mijlocul segmentului BC, Ox o axă coliniară cu OC și Oy perpendiculara în O pe Ox. Notând cu $a = OC$, relația (3) între coordonatele punctului $A(x, y)$ se scrie

$$y^2 = (x + a)(x - a) \text{ sau } x^2 - y^2 = a^2 \quad (10)$$

Punctul A *descrie o curbă* (fig. 8) *numită iperbolă echilaterală și care are multe proprietăți asemănătoare cu ale cercului, cu toată deosebirea de formă.*

Studiul geometric al curbei se face ușor dacă se notează cu M intersecția laturei BA (sau CA) a unghiului ascuțit $\sphericalangle B$ (sau $\sphericalangle C$) cu Oy și se observă că triunghiul BMC este isoscel și că CA (sau BA) este perpendiculară pe CM (sau BM) în baza relației (5) sau (5′).

Vârful A *al triunghiurilor* ABC, *corespunzătoare acestui caz, descrie iperbola echilateră din care s'au scos punctele* B *și* C.

Vârful A *al triunghiurilor* ABC *pentru care* $\overline{AD}^2 < \overline{BD} \cdot \overline{DC}$ *descrie interiorul cercului* (BC) *sau interiorul iperbolei echilatere, din care s'au scos toate punctele dreptei* BC.

Vârful A *al triunghiurilor* ABC *pentru care* $\overline{AD}^2 > \overline{BD} \cdot \overline{DC}$ *descrie exteriorul comun al cercului descris pe* $\overline{BC}$ *ca diametru și al iperbolei echilatere.*

In sfârșit, *punctele dreptei* BC *sunt vârfurile triunghiurilor* ABC *degenerate.*

Este clar că mulțimea punctelor planului a fost despărțită în patru submulțimi nevide și fără puncte comune. Aceste patru submulțimi sunt caracterizate prin proprietățile corespunzătoare, care, ca în § 5, sunt condiții necesare și suficiente pentruca proprietatea respectivă să fie adevărată.

d) Din § 4 rezultă că, într'un triunghiu *ABC* condițiile (3) și (5) sau (5′) *nu sunt echivalente.* Deci, despărțirea mulțimii punctelor planului în mulțimi de puncte astfel ca să avem

$$|\sphericalangle B - \sphericalangle C| = 1\,dr, \quad |\sphericalangle B - \sphericalangle C| > 1\,dr \qquad (11)$$
$$|\sphericalangle B - \sphericalangle C| < 1\,dr$$

nu va fi aceiași ca despărțirea precedentă (punctul c).

In adevăr, o analiză simplă a figurii 8, ne arată că:

Vârful A al triunghiurilor ABC, pentru care prima relație din (11) *este verificată, descrie iperbola echilateră din fig.* 8, *din care s'au scos punctele B și C.*

Vârful A al triunghiurilor ABC pentru care a doua relație din (11) *este verificată, descrie interiorul iperbolei echilatere din care s'au scos punctele de pe dreapta BC.*

Vârful A al triunghiurilor ABC pentru care a treia relație din (11) *este verificată, descrie exteriorul iperbolei echilatere din care s'au scos punctele segmentului BC.*

In fine, *punctele dreptei BC sunt vârfurile triunghiurilor ABC degenerate.*

OSCILOGRAFUL CATODIC

Maximilian Fränkel

Tubul catodic a devenit un element fără de care nu se poate concepe nici-un laborator modern. Utilizarea lui nu se mărginește însă numai la nenumăratele aplicații în tehnica de laborator ci a cucerit și primul loc în televiziune, permițând reprezentarea imaginilor transmise la distanță, în radiolocație unde tubul catodic indică prezența avioanelor sau altor obiecte care reflectă undele de radio, dela distanțe de zeci și sute de kilometri, în întuneric, prin ceață sau nori ș. a. Serviciile uriașe aduse de către tubul catodic se datoresc faptului că cu ajutorul lui se pot reprezenta, vizual, variațiile tensiunii sau curentului electric. Nenumăratele aplicații și uimitoarea perfecționare a tubului catodic se datoresc în primul rând lucrărilor precursoare ale savanților ruși și sovietici. Astfel savanții ruși A. G. Stoletov și B. L. Rozing au pus bazele fizice ale primului tub catodic. Savantul sovietic L. I. Cataev a realizat un principiu nou de construcție al tubului catodic. Savanții N. V. Cuzneţov, N. M. Hopstein, P. A. Brande și alții au adus contribuții foarte însemnate la desvoltarea televiziunii. In domeniul radiolocației, savanții A. A. Sluțchin, V. M. Muhin, N. L. Slosberg, N. F. Alexeev și D. D. Malearov au obținut cu prioritate rezultate superioare celor din străinătate, principiul însăși al radiolocației fiind găsit încă din 1897 de fizicianul rus A. S. Popov.

Principiul de funcționare al tubului catodic

Principiul de funcționare al tubului catodic este simplu. Se știe că o sârmă încălzită emite electroni datorită efectului termoelectronic. Dacă montăm această sârmă (catodul) într'un tub de sticlă din care s'a scos aerul iar la extremitatea cealaltă introducem o placă (anodul) care să fie la un potențial pozitiv față de catodă — la un potențial

pozitiv pentru ca să atragă electronii (negativi) emiși de catodă — iar electronii emiși de catodă îi silim să treacă printr'o fantă pentru a ne da un fascicol subțire (fig. 1), obținem un tub catodic

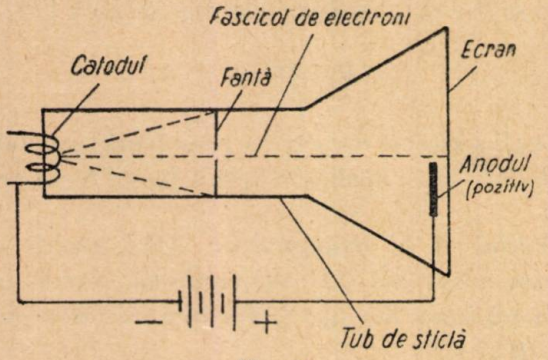


Fig. 1

— ce-i drept, primitiv. In realitate situația se prezintă oarecum schimbată, după cum vom vedea mai departe, dar principiul e același.

Cum se folosește însă acest montaj?

Știm că un magnet exercită o forță asupra unui curent electric, direcția forței depinzând de sensul de curgere al curentului și de polaritatea Magnetului.

Dacă vom apropia un magnet de tubul catodic construit de noi, ce se va întâmpla? Raza de electroni va fi deviată (fig. 2 a, b) deoarece această rază de electroni constitue de fapt un curent electric. In figură poziția anodei este schimbată, deoarece după cum s'a constatat și în experiențele în tuburile cu descărcări în gaze, poziția anodei nu influențează asupra mișcării rectilinii a electronilor.

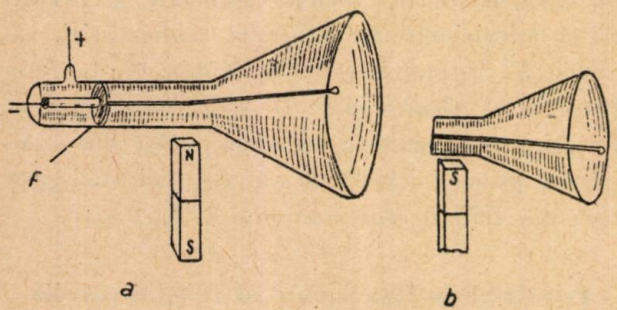


Fig. 2. Raza de electroni este deviată de un magnet permanent. Polul nord o împinge într'o direcție (*a*), polul sud, în cealalta (*b*).

Dacă pe partea tubului de care se ciocnesc electronii (ecran) am putea așterne o substanță care să indice locul în care electronii au lovit tubul, atunci locul va deveni luminos. Astfel de substanțe există și se numesc substanțe fluorescente. Una dintre ele este sulfura de zinc. Astfel dacă un electron lovește un cristal de sulfură de zinc, acesta licărește, adică emite o rază de lumină. Astfel tubul nostru catodic se perfecționează. Deci locul unde electronii întâlnesc ecranul este arătat printr'o pată luminoasă.

Dacă în montajul din figura 2 înlocuim magnetul permanent printr'un electromagnet, raza de electroni va fi din nou deviată (fig. 3). Dar cum magnetizarea este proporțională cu intensitatea curentului, devierea punctului luminos de pe ecran va fi proporțională cu intensitatea curentului ce trece prin spirele electromagnetului. Dacă împărțim acum ecranul în pătrățele și determinăm ce deviere corespunde unui anumit curent, am realizat un ampermetru electronic pentru curent continuu, unde indicația ne va fi dată de deplasarea punctului luminos față de poziția sa de

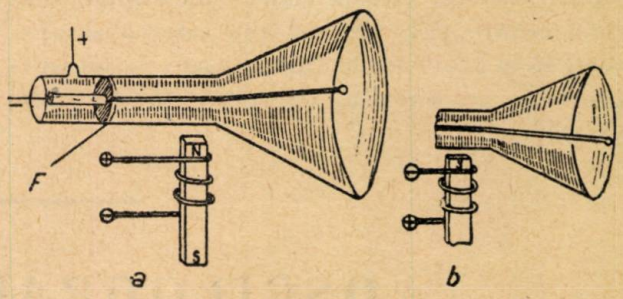


Fig. 3. — Același efect se poate obține și printr'un electromagnet. Direcția curentului de magnetizare determină în ce direcție este deviată raza.

repaus, adică atunci când nu trece curent prin spirele electromagnetului.

Mai există însă și un alt mijloc pentru a obține devierea razei de electroni. Știm că sarcinile de același semn se resping iar sarcinile de semn contrar se atrag. Dacă am introduce două plăci (condensator) în tub și le-am încărca cu sarcini de semn contrar? Raza de electroni va fi atrasă de placa pozitivă și respinsă de placa negativă (fig. 4). Ca și la un condensator obișnuit, sarcina de pe plăci se obține aplicând o diferență de potențial plăcilor. Determinând ce deplasări ale punctului luminos, față de poziția lui de repaus se obțin pentru diferite tensiuni, am etalonat tubul nostru ca voltmetru electronic de curent continuu.

Raportul dintre mărimea deplasării punctului luminos și mărimea tensiunii aplicate se numește *sensibilitatea* tubului. Cu cât tensiunea aplicată

este mai mică pentru a produce aceeaș deplasare a punctului luminos, cu atât tubul catodic este mai sensibil. Sensibilitatea depinde de construcția tubului.

Dacă vom aplica acum o tensiune sau un curent alternativ la plăcile sau la electromagnetul tubului? Cum desigur ați dedus, punctul luminos se va mișca

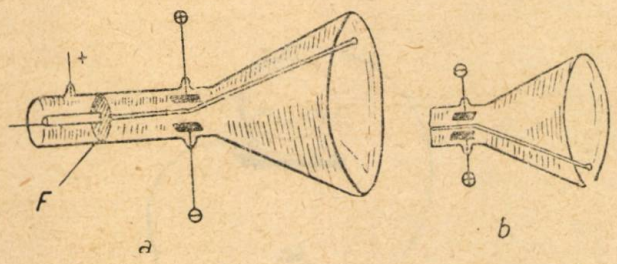


Fig. 4. — Acum raza de electroni este deviată de două plăci având sarcini electrice.

în sus și în jos după cum se schimbă polaritatea plăcilor sau a electromagnetului, în funcție de sensul tensiunii sau curentului ce-l străbate. Dacă frecvența (adică de câte ori are același sens într'o secundă) a curentului sau tensiunii este mare, atunci punctul luminos se va mișca repede și pe ecran va apare o linie continuă (datorită faptului că ochiul omenesc nu poate distinge mai mult de

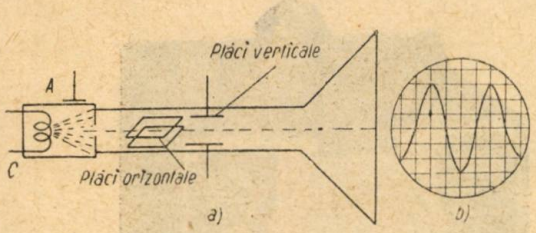


Fig. 5

zece imagini pe secundă și datorită faptului că imaginea luminoasă provocată de electroni pe ecran nu se stinge imediat ce fascicolul și-a schimbat direcția, ci mai persistă un interval de timp scurt).

Să mai complicăm puțin construcția tubului nostru și să mai introducem o pereche de plăci (fig. 5 a) de data aceasta orizontale (se numesc plăci orizontale deoarece produc o deplasare orizontală a punctului luminos).

Să legăm acum plăcile verticale la rețeaua electrică a orașului (tensiune alternativă cu o frecvență de 50 Hz), atunci, după cum s'a văzut mai înainte, pe ecran va apare o linie luminoasă verticală. Dacă în același timp aplicăm la plăcile orizontale o tensiune care să producă o mișcare orizontală de dute-vino a punctului luminos, cu aceeaș viteză (frecvență) ca mișcarea pe verticală pe ecranul nostru va apare o curbă (fig. 5 b) (în acest caz o sinusoidă). Frecvența mișcării orizontale poate fi și un multiplu întreg al frecvenței tensiunii aplicate. Tensiunea care produce mișcarea orizontală de dute-vino are o formă numită «în dinți de fierăstrău». Mecanismul apariției curbei este simplu. In același timp cu devierea orizontală a razei electronice se produce și o deviere verticală. Cum ciclul de deviere orizontală și cel de deviere verticală au loc cu aceeaș frecvență, punctul luminos va descrie o curbă care va arăta tocmai cum variază tensiunea aplicată.

Dacă vom etalona și în cazul acesta ecranul proporțional cu deplasarea maximă pe verticală a

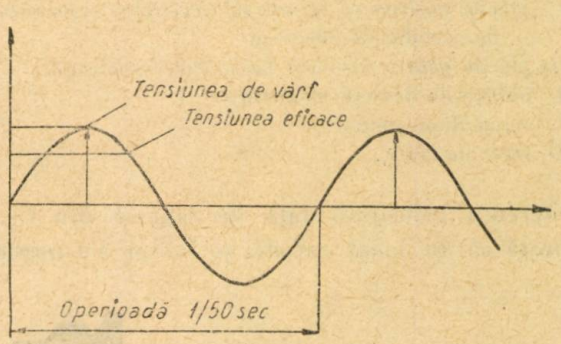


Fig. 6

punctului luminos, în funcție de tensiunea aplicată, vom obține un voltmetru de curent alternativ. Avantajul mare al acestui tip de instrument de măsură constă în aceea că, pe când instrumentele de măsură obișnuite măsoară numai valori de vârf sau valori eficace (fig. 5 c), oscilograful catodic reprezintă în plus în mod vizual și forma curbei de tensiune aplicată.

Mișcarea orizontală a punctului luminos trebue să se facă cu aceeaș sau cu o frecvență care să fie un multiplu întreg al frecvenței tensiunii aplicate. Acest procedeu se numește stabilirea *bazei de timp*. In oscilografele moderne (fig. 6) tensiunea necesară stabilirii bazei de timp (adică a mișcării orizontale a punctului luminos) este produsă de un oscilator cu frecvență variabilă, închis în caseta oscilografului, frecvența necesară potrivindu-se cu ajutorul unui buton. In practică, se știe că s'a găsit frecvența potrivită atunci când pe ecran apare o curbă stabilă.

Cele două metode de deviere a razei electronice, metoda magnetică și cea electrică, apar deobicei împreună în oscilografele catodice moderne.

Tubul catodic real

După cum s'a spus mai înainte, schema reală a unui tub catodic e ceva mai complicată decât aceea descrisă la început.

Figura 7 arată schema unui tub catodic real.

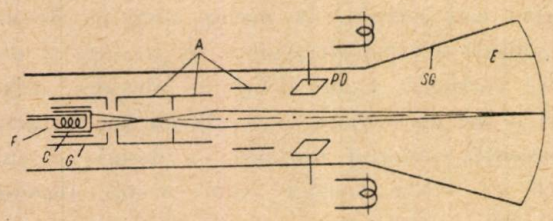


Fig. 7 a

F filament ce servește la încălzirea catodului *C*
C catodul care emite electronii
A plăcile pozitive ce servesc la accelerarea și focalizarea fascicolului de electroni
PD plăcile pentru devierea fascicolului electronic
M bobine de deviere magnetică
E ecran fluorescent
SG strat de grafit.

Diferența principală față de schema din fig. 1 constă că în locul catodei și fantei s'a introdus un așa numit « tun electronic » a cărui misiune e să producă un fascicol electronic îngust (cu cât fascicol e mai îngust sau mai bine « focalizat », cu atât imaginea pe ecran e mai precisă). Pereții tubului sunt acoperiți cu un strat conductor de grafit pentru a conduce la anodă electronii ajunși pe ecran.

Aplicațiile oscilografului catodic

Aplicațiile oscilografului catodic sunt nenumărate. Astfel s'a văzut cum oscilograful este folosit pentru măsura și reprezentarea curenților și tensiunilor electrice. Dar nu numai mărimile electrice pot fi măsurate și reprezentate cu ajutorul oscilografului ci și alte mărimi fizice (presiunea, temperatura etc.) pot fi măsurate cu oscilograful. Aceasta se face *exprimând aceste mărimi în mod electric*,

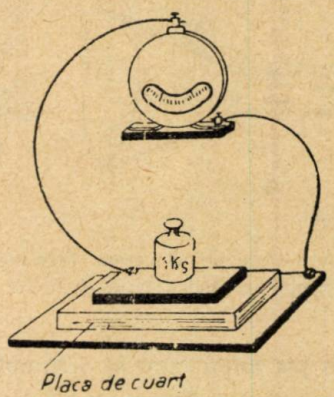


Fig. 8

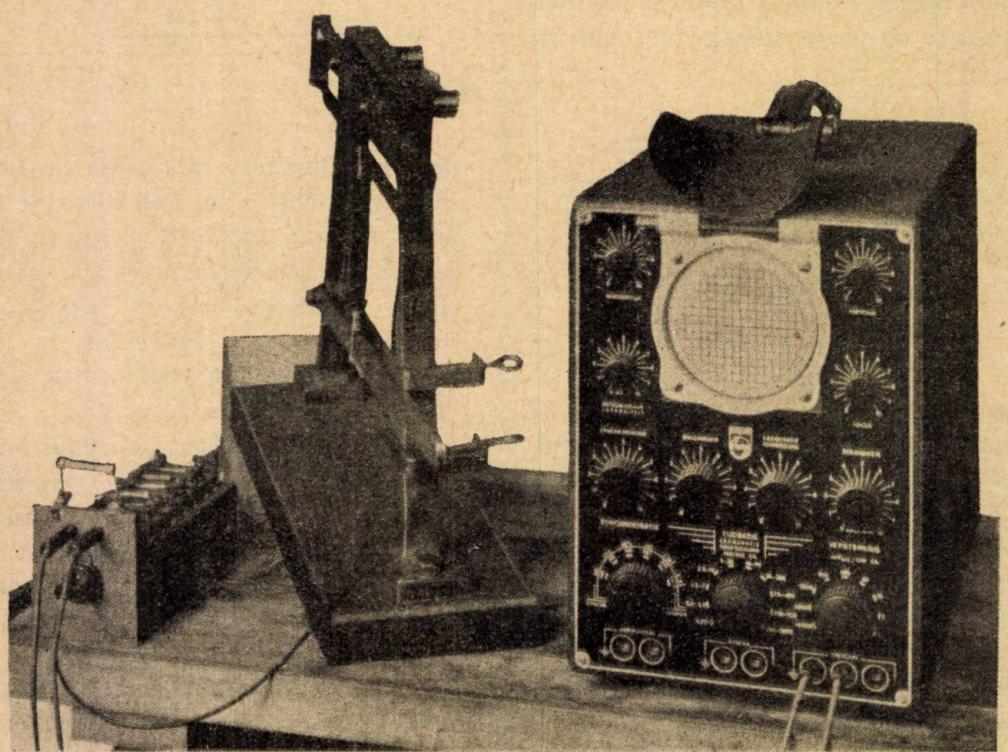


Fig. 7 b

și măsurând indicațiile electrice astfel obținute. Cum este posibilă exprimarea electrică? Foarte simplu: făcând uz de proprietățile fizice ale unor corpuri, la care acțiuni mecanice determină efecte electrice. Astfel este cunoscută «piezoelectricitatea» unor cristale, adică proprietatea lor de a da naștere unei tensiuni electrice ca urmare a exercitării unei presiuni asupra lor (fig. 8).

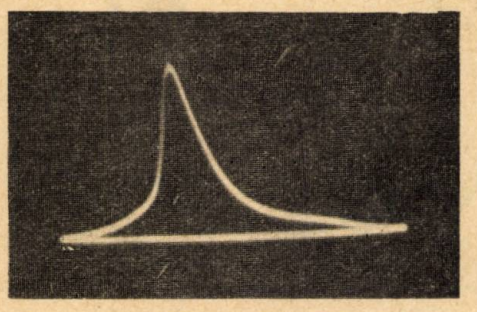


Fig. 9. Cum apare la oscilograf diagrama presiune-timp a unui motor cu ardere internă.

Transformând presiunile în tensiuni electrice, ele pot fi reprezentate și măsurate cu oscilograful. Tot așa dacă ținem capetele sudate a două fire

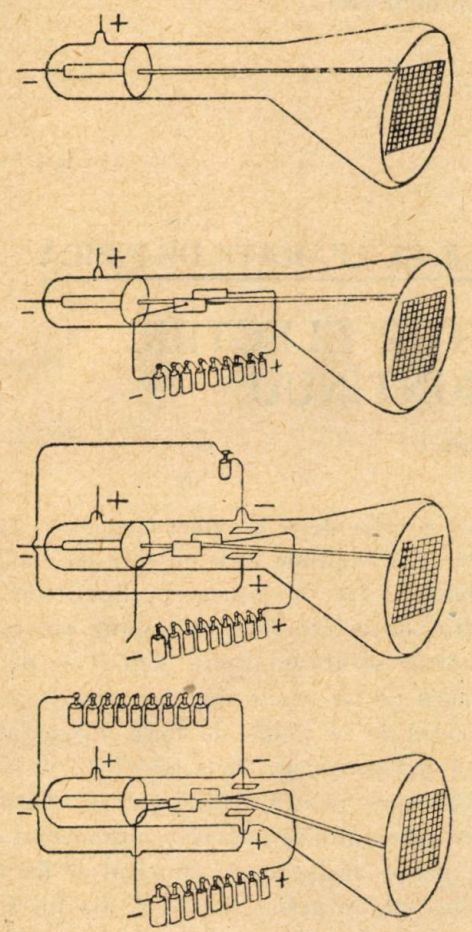


Fig. 10

din metale diferite, la temperaturi deosebite, apare în fire o forță electromotoare (termocuplu). Și această forță electromotoare (tensiune electrică) poate fi reprezentată la oscilograf, ea variind după cum variază diferența de temperatură între capetele termocuplului. Un exemplu din multiplele aplicări ale oscilografului în tehnica industrială este reprezentarea diagramei presiune-timp al unui motor cu ardere internă. Astfel se poate observa cum variază presiunea în cilindrul motorului în timpul unui ciclu de funcționare (fig. 9).

In televiziune tubul catodic este folosit pentru formarea imaginii în aparatul de recepție. Punctul luminos parcurge ecranul tubului, împărțit în pătrățele, astfel încât să parcurgă pe rând de zeci de ori într'o secundă toate pătrățelele (fig. 10).

Fig. 11

In fiecare pătrățel intensitatea fascicolului electronic este dat de semnalul de radio transmis «tunului electronic» dela postul de emisie. După cum este mai puternic sau mai slab semnalul,

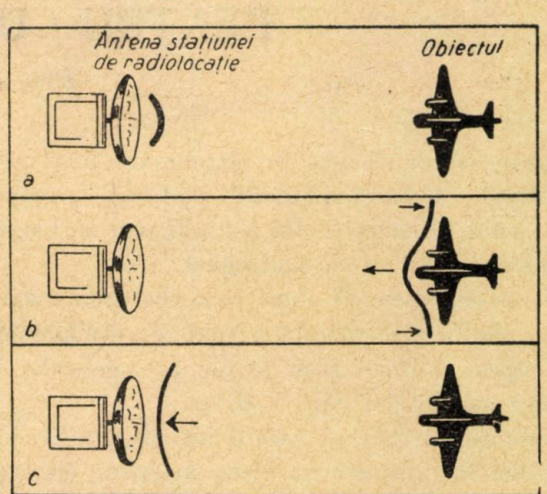


Fig. 12 *a*. Cum se emit și se reflectă undele electromagnetice în radiolocație (*a*, *b*, *c*) și cum se vede aceasta pe ecranul oscilografului (*d*, *e*).

raza electronică va lumina mai tare sau mai slab ecranul. Astfel se obține imaginea prin explorarea

întregii suprafețe a ecranului. Raza electronică se oprește asupra fiecărui pătrățel al ecranului doar o fracție mică dintr'o secundă. Dar deoarece ecranul are proprietatea de a-și păstra luminozi-

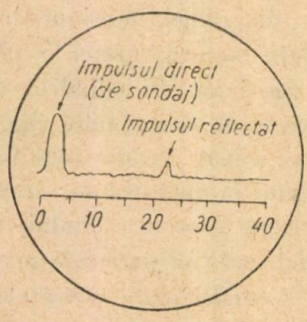


Fig. 12 *d*. Primul semnal recepționat (mai mare) corespunde undei emise, cel de al doilea (mai mic) corespunde undei reflectate.

tatea un scurt interval și după ce electronii nu-l mai lovesc, ochiul percepe imaginea în întregime (fig. 11).

In radiolocație tubul catodic vizualizează semnalele de radio emise de postul de radiolocație și care s'au reflectat pe un obiect. După poziția pe ecranul tubului a semnalului reflectat, se poate deduce direcția, distanța și mărimea obiectului reperat.

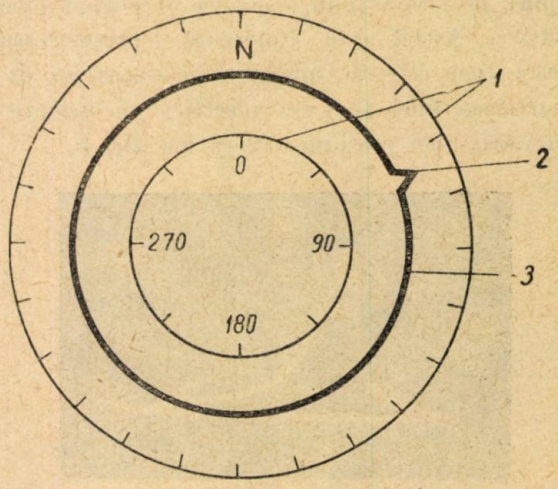


Fig. 12 *e*. Pe ecran se indică direcția (în grade) a obiectului reflectat.
1 — scală gradată în grade; 2 — semnalul; 3 — baza timpului.

In fig. 12 se arată schematic cum se repereză un avion cu ajutorul radilocației și imaginea obținută pe oscilograf.

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUCȚIA UNUI MOTOR ELECTRIC PENTRU CURENT CONTINUU

Prof. N. Rădulescu

Orice motor electric se compune din două părți principale; statorul și rotorul. Statorul care reprezintă câmpul magnetic fix poate fi, sau un magnet permanent sau un electromagnet.

Să presupunem că între ramurile unui magnet potcoavă N-S se găsește o spiră dreptunghiulară de cupru al cărui plan să fie perpendicular pe planul magnetului (fig. 1 și fig. 2).

Curentul electric pe care îl introducem în spiră desvoltă în jurul său un câmp magnetic ale cărui linii de forță magnetică sunt în formă de circonferință. Ținând seama de sensul liniilor de forță ale magnetului potcoavă și de sensul liniilor de forță ale curentului pe cei doi conductori AB și CD; (sensul liniilor de forță ale curentului îl stabilim cu regula tirbușonului) din interacțiunea reciprocă a celor două câmpuri magnetice, rezultă că spira $ABCD$ primește o mișcare de rotație în sens opus acelor de ceasornic (liniile de forță magnetică de același sens se resping iar cele de sens contrar se atrag). Spira $ABCD$ se pune pe un cilindru de fer moale care are proprietatea de a concentra în el liniile de forță magnetică ale magnetului permanent. Pe acest cilindru, se pun mai multe spire pentru a mări puterea motorului. Primirea curentului se face prin intermediul colectorului pus pe același ax cu cilindrul de fer moale care împreună cu periuțele p și p' din fig. 6 și 7, asigură un contact alunecător.

Construcția rotorului. Construim rotorul din trei plăci dreptunghiulare (6 cm × 2 cm) tăiate din tablă dela o cutie de conserve (nezincată). Aceste

trei plăci le sudăm cu cositor pe un cui de fer moale (ax) cu lungimea de 8—10 cm în formă de stea cu trei colțuri (fig. 3).

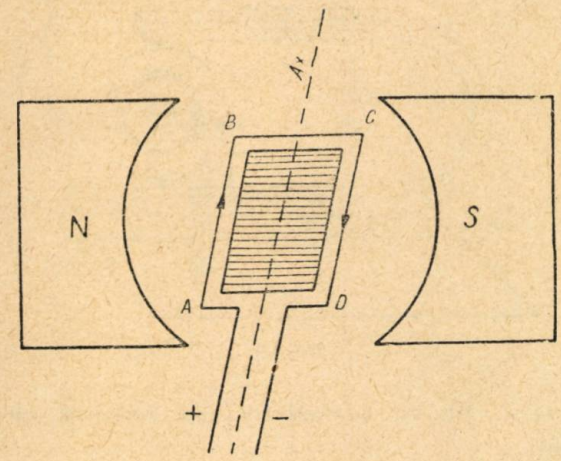


Fig. 1

Pe cele trei brațe ale stelei astfel constituite se bobinează sârma de cupru izolată cu bumbac cu diametrul între 0,5—1,5 mm. Constituim fiecare

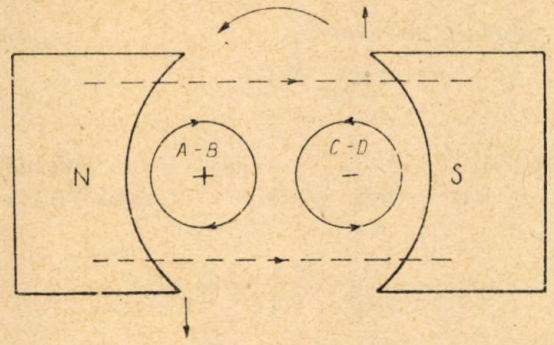


Fig. 2

bobină din 20—30 spire și ținem seama de începutul și sfârșitul fiecărei bobine. Pe același ax se pune apoi colectorul. Am construit astfel un rotor cu trei bobine.

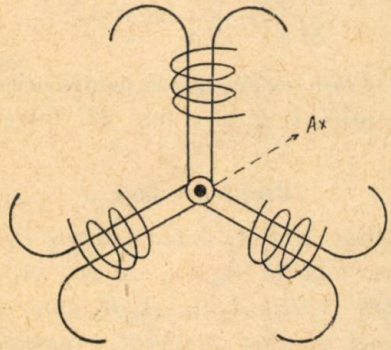


Fig. 3

Construim colectorul dintr'un cilindru de lemn (brad sau tei) cu lungimea de 1,5—2 cm și diametrul de 1,5 cm. Pe el fixăm prin ace cu gămălie, trei plăcuțe dreptunghiulare tăiate dintr'o foaie de cupru sau alamă. Plăcuțele de cupru trebue să fie distanțate între ele printr'un spațiu liber de 1—2 mm. Plăcuțele sunt astfel izolate între ele și izolate și de axul de fer care trece prin centrul

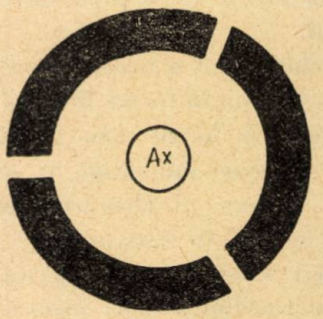


Fig. 4

cilindrului de lemn, (să avem grije ca prin fixarea lor pe lemn, acele să nu facă contact între ele și nici cu axul (fig. 4). Punem colectorul pe același ax cu rotorul, și la fiecare lamelă de cupru de pe rotor sudăm cu cositor începutul unei bobine și sfârșitul bobinei următoare așa cum se vede în fig. 5.

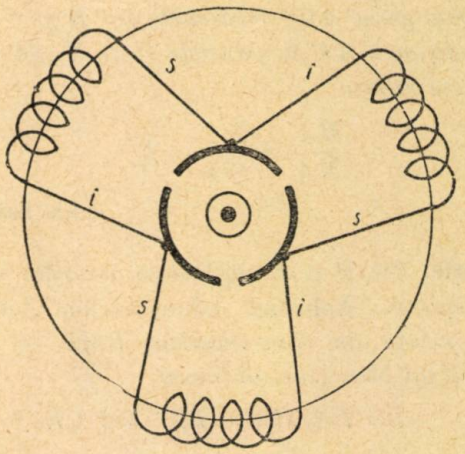


Fig. 5

Fixăm pe o placă de lemn un magnet permanent în formă de potcoavă și între ramurile lui sprijinim rotorul prin intermediul a două picioruțe verticale. Atingând plăcile colectorului cu periuțele

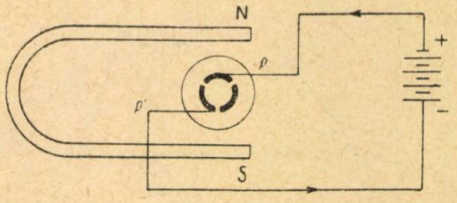


Fig. 6

p și p' legate de un izvor de curent continuu de circa 6 volți, rotorul se pune în mișcare de rotație (fig. 6).

Polii p și p' ai izvorului de curent constituie chiar periuțele care împreună cu colectorul asigură un contact alunecător.

In locul magnetului permanent, statorul poate fi un electromagnet potcoavă care prin intermediul periuțelor p și p' se va cupla în serie cu bobinele rotorului.

Din fier balot tăiem o bucată lungă de 30—35 cm pe care o curbăm în formă literei U. Acoperim fiecare ramură cu hârtie mai groasă, pe care bobinăm 30—40 spire din sârmă de cupru cu diametrul de 1—1,5 mm. (Infășurarea sârmei pe cele două ramuri se face în sens opus).

Fixăm acest electromagnet pe un suport de lemn prin intermediul a două picioruțe prinse în nituri de una din ramurile electromagnetului așa cum se vede în fig. 7.

Ambele motoare funcționează bine la tensiunea de peste 6 volți, fie folosind trei pile Leclanché

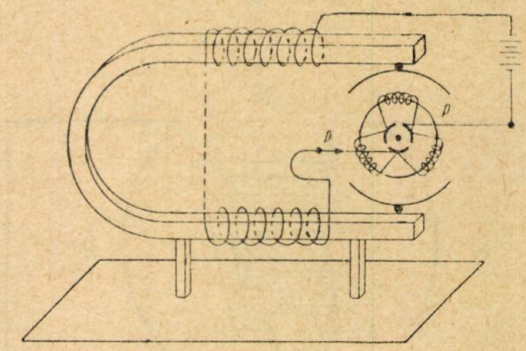


Fig. 7

în serie, fie un acumulator sau redresor electrolitic.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 554

In triunghiul ABC medianele din B și C întâlnesc înălțimea AA' în punctele M și N. Să se demonstreze relația

$$\frac{MA'}{MA}+\frac{NA'}{NA}=1.$$

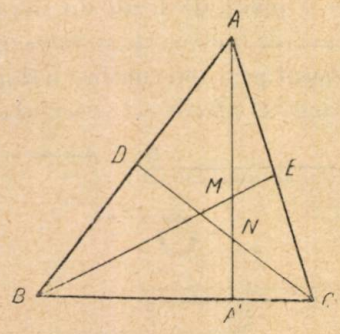
Gh. Bazacov

Soluție. Fie D și E mijloacele laturilor AB și AC respectiv. Aplicând triunghiurilor $AA'C$ și $AA'B$ tăiate de transversalele BME și CND teorema lui Menelaus, obținem

$$BC.EA.MA'=BA'.AM.CE$$

și

$$CB.DA.NA'=CA'.BD.AN$$



Cum $BD=DA$ și $CE=EA$, relațiile de mai sus se scriu

$$\frac{MA'}{MA}=\frac{BA'}{BC} \quad \text{și} \quad \frac{NA'}{NA}=\frac{CA'}{BC}$$

Prin adunare obținem

$$\frac{MA'}{MA}+\frac{NA'}{NA}=1.$$

Observare. 1°. Dacă în relația găsită înlocuim $MA'=AA'-MA$ și $NA'=AA'-NA$, ea devine:

$$\frac{AA'}{MA}+\frac{AA'}{NA}=3.$$

Impărțind cu AA' găsim relația

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{NA}=\frac{3}{AA'}.$$

2°. Dacă ținem seamă de sensul segmentelor, atunci

$$\frac{MA'}{MA}+\frac{NA'}{NA}=-1.$$

3°. Relația rămâne adevărată pentru orice dreaptă care trece prin A și care taie BC între B și C.

Problema 555

In triunghiul $A_1A_2A_3$ se iau punctele B_1, B_2, B_3, respectiv pe laturile A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 astfel încât dreptele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sunt concurente într'un punct N din interiorul triunghiului. Fie

$$\frac{A_2B_1}{B_1A_3}=p_1;\quad \frac{A_3B_2}{B_2A_1}=p_2;\quad \frac{A_1B_3}{B_3A_2}=p_3;$$

$$\frac{A_1N}{NB_1}=a_1;\quad \frac{A_2N}{NB_2}=a_2 \text{ și } \frac{A_3N}{NB_3}=a_3.$$

Să se arate că:

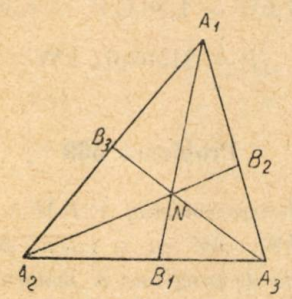
$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3) = a_1 a_2 a_3$$

și

$$a_1 a_2 a_3 = 2 + a_1 + a_2 + a_3$$

Eugen Onofraș
student, Iași

Soluție. Aplicând triunghiurilor $B_1A_3A_1$, $A_2B_2A_1$ și $B_3A_2A_3$, tăiate respectiv de transversalele A_2NB_2, A_3NB_3 și A_1NB_1, teorema lui *Menelaus* obținem



$$\frac{A_2A_3 \cdot B_2A_1 \cdot NB_1}{A_2B_1 \cdot A_3B_2 \cdot A_1N} = 1$$

$$\frac{A_3A_1 \cdot B_3A_2 \cdot NB_2}{A_3B_2 \cdot A_1B_3 \cdot A_2N} = 1$$

și

$$\frac{A_1A_2 \cdot B_1A_3 \cdot NB_3}{A_1B_3 \cdot A_2B_1 \cdot A_3N} = 1$$

Relațiile se mai pot scrie:

$$1 + p_1 = p_1 p_2 a_2 \qquad (1)$$

$$1 + p_2 = p_2 p_3 a_2 \qquad (2)$$

$$1 + p_3 = p_3 p_1 a_3 . \qquad (3)$$

Dreptele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 fiind concurente după teorema lui *Ceva* avem:

$$\frac{A_1B_3 \cdot A_2B_1 \cdot A_3B_2}{B_3A_2 \cdot B_1A_3 \cdot B_2A_1} = 1 \quad \text{sau} \quad p_1 p_2 p_3 = 1 \qquad (4)$$

Inmulțind relațiile (1), (2), (3) și ținând seamă de (4), obținem

$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3) = a_1 a_2 a_3 \qquad (5)$$

Relația (5) se mai poate scrie

$$1 + p_1(1 + p_2) + p_2(1 + p_3) + p_3(1 + p_1) + p_1 p_2 p_3 = a_1 a_2 a_3 .$$

Inmulțind relațiile (1), (2), (3), respectiv cu p_3, p_1, p_2, scăzându-le apoi din (5) și ținând seamă de (4), obținem:

$$2 + a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3 .$$

Problema 565

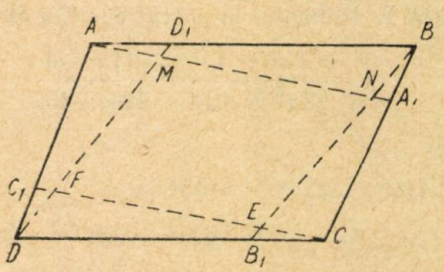
Pe laturile AB, BC, CD, DA, ale paralelogramului $ABCD$ se iau respectiv punctele D_1, A_1, B_1, C_1, astfel ca:

$$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1D} = \frac{DC_1}{C_1A} = \frac{m}{n} .$$

Segmentele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 intersectându-se formează patrulaterul $MNEF$. Știind că $S =$ aria $ABCD$, să se afle aria patrulaterului $MNEF$.

P. Erduiev (Reg. Altai)

Soluție. Neexistând decât un singur punct care împarte un segment într'un raport dat, avem:



$$AD_1 = B_1C \text{ și } BA_1 = DC_1$$

de unde rezultă că

$$BB_1 \parallel DD_1 \text{ și } AA_1 \parallel CC_1 .$$

Patrulaterul $MNEF$ este deci paralelogram.

Unghiurile MNE și ANB: FEN și CEB fiind suplimentare avem:

$$\frac{\text{aria } ANB}{\text{aria } MNE} = \frac{AN \cdot NB}{MN \cdot NE} \quad \text{și}$$

$$\frac{\text{aria } BEC}{\text{aria } FEN} = \frac{EC \cdot EB}{FE \cdot EN} = \frac{AM \cdot EB}{MN \cdot EN} .$$

Avem: $\frac{AM}{MN} = \frac{AD_1}{D_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{NB}{NE} = \frac{m}{n}$,

de unde $\frac{AN}{MN} = \frac{BE}{NE} = \frac{m+n}{n}$.

Relațiile de mai sus, se scriu deci:

$$\frac{2 \text{ aria } ANB}{\text{aria } MNEF} = \frac{m(m+n)}{n^2} \quad \text{și}$$

$$\frac{2 \text{ aria } BEC}{\text{aria } MNEF} = \frac{m(m+n)}{n^2} .$$

Prin adunare obținem

$$\frac{S - \text{aria } MNEF}{\text{aria } MNEF} = \frac{2m(m+n)}{n^2} ,$$

de unde

$$\text{aria } MNEF = \frac{n^2}{m^2 + (m+n)^2} S.$$

Observare. 1. Triunghiurile ANB și BEC sunt echivalente.

2. Când punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sunt pe prelungirile laturilor, atunci

$$\text{aria } MNEF = \frac{n^2}{(m-n)^2 + m^2} S.$$

Problema 567

Să se rezolve ecuația

$$\frac{x^2+1}{x^2+11} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}.$$

G. Kapâlov

Soluția I. Ridicând la patrat ecuația obținem

$$\frac{x^4+2x^2+1}{x^2+22x^2+121} = \frac{11x-6}{216-36x}$$

de unde

$$f(x) = 47x^5 - 222x^4 + 314x^3 - 564x^2 + 1367x - 942 = 0.$$

Deoarece $f(1) = f(2) = f(3) = 0$, $f(x)$ se divide prin $(x-1)(x-2)(x-3)$. Câtul este

$$47x^2 + 60x + 67 = 0$$

Această ultimă ecuație nu are rădăcini reale.

Soluțiile reale ale ecuației sunt deci

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Soluția II. Notăm

$$\frac{11x-6}{6-x} = m^2 \qquad (1)$$

(m număr rațional pozitiv oarecare).

Din (1) găsim:

$$x = \frac{6(m^2+1)}{m^2+11}. \qquad (2)$$

Mai avem

$$\frac{x^2+1}{x^2+11} = \frac{m}{6},$$

de unde

$$x = \sqrt{\frac{11m-6}{6-m}}. \qquad (3)$$

Comparând (2) și (3), avem

$$\frac{m^2+1}{m^2+11} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11m-6}{6-m}}.$$

Rezultă $m = x$. Inlocuind în (1) obținem ecuația

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

cu rădăcinile

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

Problema 568

Pentru a transmite apa din Don în partea cea mai superioară a canalului Volga-Don, cu diferența de nivel de 44 m, se folosesc pompe cu o capacitate de 45 m³/s apă. Ce putere trebue să aibă mașinile electrice ale acestor pompe dacă admitem randamentul de 90%.

C. d. P.

Soluție. Puterea cerută este

$$P = 44 \cdot 45\,000 : 0{,}9 \text{ kgm/s} = 2\,200\,000 \text{ kgm/s},$$

iar în kW (1 kW = 1,36 C.P. = 1,36 · 75 kgm/s).

$$P = 21568{,}62 \text{ kW}$$

Problema 569

Tractorul electric sovietic, V.I.M.E. 4-1000 cu o putere de 39 kW, ară cu o viteză de 5,4 km/oră să se afle forța de tracțiune a motorului și timpul necesar pentru a ara 1 ha, dacă se cheltuesc 45 kWh la hectar.

C. d. P.

Soluție. Avem:

$$P = F \cdot \varphi,$$

unde

$$P = 36 \text{ kW} = 36 \cdot 1{,}36 \cdot 75 \text{ kgm/s}$$

$$\varphi = 5{,}4 \text{ km/h} = 1{,}5 \text{ m/s},$$

iar F forța căutată. Găsim

$$F = 2448 \text{ kgf}.$$

Timpul necesar pentru aratul unui ha este

$$t = \frac{L}{P} = \frac{45}{39} h = 1{,}154\, h$$

$$t = 1^h 9^m 24^s.$$

Problema 571

Fie M *și* N *două puncte mobile simetrice față de mijlocul laturii* BC *a triunghiului* ABC. *Să se arate că*

$$\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + 2\,\overline{BM} \cdot \overline{MC} = \textit{constant}$$

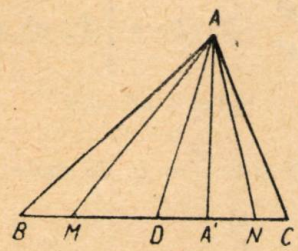
$$\frac{\overline{AM}^2 - \overline{AN}^2}{\overline{MN}} = \textit{constant}$$

Cazuri particulare.

N. N. Mihăileanu

Soluţie. Fie D mijlocul lui BC şi A' proecţia lui A pe BC. Aplicând teorema medianei în triunghiul AMN, obţinem

$$\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 = 2\overline{AD}^2 + \frac{\overline{MN}^2}{2}.$$



Insă

$$\frac{MN}{2} = BD - MB = MC - BD,$$

încât

$$\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + 2\,\overline{MB}\cdot\overline{MC} = 2\,(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2) = K.$$

Pentru a doua relaţie folosim teorema: diferenţa patratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu dublul produsului dintre latura a treia şi proecţia medianei corespunzătoare ei, pe ea.

$$\overline{AM}^2 - \overline{AN}^2 = 2\,\overline{MN}\cdot\overline{DA'}$$

de unde

$$\frac{\overline{AM}^2 - \overline{AN}^2}{\overline{MN}} = 2\,\overline{DA'} = K$$

Când $BM = MC$ devine zero, regăsim teoremele enunţate mai sus, pentru triunghiul ABC.

Problema 572

Să se găsească toate numerele întregi N *în baza* 10, *ştiind că* N^{14} *are* 34 *cifre.*

Gh. D. Simionescu

Soluţie. N fiind un număr în baza 10 şi având 34 cifre, vom avea

$$33 < \log N^{14} < 34, \quad \text{sau}$$

$$33 < 14 \log N < 34, \quad \text{deci}$$

$$2{,}35071 < \log N < 2{,}42857,$$

de unde

$$225 \leqslant N \leqslant 268.$$

Problema 574

Staţiunea hidroelectrică dela Kahovka va avea o putere medie de 250000 *kW. Ce cantitate de cărbuni ar fi necesară în* 24 *ore pentru turbinele cu aburi care produc forţa necesară, cunoscând că* 1 *kg cărbune desvoltă* 7000 *K·cal·şi randamentul de* 25%.

C. d. P.

Soluţie. Fie m cantitatea de cărbuni cerută. Ecuaţia problemei este (1 kW = 102 kgm/s, echivalentul mecanic K al caloriei 427 kgm):

$$250\,000 \cdot 102 \cdot 24 \cdot 3600 = 0{,}25 \text{ m} \cdot 7000 \cdot 427,$$

de unde

$$m = 2948410 \text{ kg} = 2948{,}41 \text{ tone.}$$

Problema 577

Să se afle timpul de golire al unui rezervor cilindric, printr'un orificiu cilindric de fund ştiind că secţiunea orizontală a rezervorului este un cerc cu diametrul de 5 *m, că înălţimea lichidului este de* 4 *m. Diametrul orificiului este* 2 *dm, coeficientul de corecţie al debitului de lichid ce se scurge este* $\mu = 0{,}62$

Muedin M. Sureia
elev, Constanţa

Soluţie. Timpul de scurgere este dat de relaţia

$$t = \frac{2V}{\mu a \sqrt{2gh}} \text{ secunde}$$

unde: V este volumul lichidului, a aria orificiului de scurgere, h înălţimea lichidului, g acceleraţia gravităţii.

Inlocuind cu valorile date găsim

$$t = 932 \text{ sec} = 15 \text{ min } 32 \text{ sec.}$$

Problema 578

Să se arate că expresiile

$$A = \frac{1-\sin x}{1-\operatorname{tg} x} + \frac{1-\cos x}{1-\operatorname{ctg} x}$$

$$B = \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{(1-\sin x)\,(1-\cos x)}{\sin x \sin x}$$

nu depind de x.

Cezar Coşniţă

Soluţie. Avem:

$$A = \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{\cos x - \sin x} - \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = 1$$

$$B = \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\sin^2 x} + \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{\cos^2 x} +$$

$$+ \frac{(1-\sin x)\,(1-\cos x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 1.$$

Deci $A = B = 1$.

Problema 579

Să se calculeze limita expresiei

$$E = \frac{(\sqrt{\cos x} - 1)(\sqrt[3]{\cos x} - 1) \ldots (\sqrt[n]{\cos x} - 1)}{x^{2n-2}}$$

când $x \to 0$.

Gh. Dumitrescu

Soluție. Avem

$$\sqrt{\cos x} - 1 = \frac{\cos x - 1}{\sqrt{\cos x} + 1} \ldots$$

$$\sqrt[n]{\cos x} - 1 = \frac{\cos x - 1}{\sqrt[n]{\cos x^{n-1}} + \sqrt[n]{\cos x^{n-2}} + \ldots + 1}$$

Putem deci scrie

$$E = \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^{2n-2}}{(\sqrt{\cos x}+1)\ldots(\sqrt[n]{\cos^{n-1} x} + \sqrt[n]{\cos^{n-2} x} + \ldots + 1)}$$

deoarece $\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

Trecând la limită și ținând seamă că $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, obținem

$$\lim_{x \to 0} E = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Problema 580

Să se rezolve ecuația

$$(1+a)^4 x^4 - 2a(1+a)[2 + a(1-a)] x^3 + 6a^2(1-a^2) x^2 - 2a^3(2-a) x + a^4 = 0$$

Matei I. Nazarie
elev, București

Soluție. Ecuația se poate scrie

$$(1+a)^4 x^4 - 2a(1+a)^2(2-a) x^3 + 6a^2(1-a^2) x^2 - 2a^3(2-a) x + a^4 = 0$$

Împărțind peste tot cu x^3 obținem

$$(1+a)^4 x^2 + \frac{a^4}{x^2} - 2a(2-a)\left[(1+a^2) x + \frac{a^2}{x}\right] + 6a^2(1-a^2) = 0.$$

Notând $(1+a)^2 x + \frac{a^2}{x} = y$, de unde

$$(1+a)^4 x^2 + \frac{a^4}{x^2} + 2a^2(1+a^2) = y^2, \text{ avem}$$

$$y^2 - 2a(2-a) y - 2a^2(1+a)^2 + 6a^2(1-a^2) = 0,$$

de unde

$$y_1 = 4a^2 - 2a, \quad y_2 = -2a^2 - 2a$$

Rezolvăm deci ecuațiile

$$(1+a)^2 x + \frac{a^2}{x} = 4a^2 - 2a \text{ și}$$

$$(1+a)^2 x + \frac{a^2}{x} = -2a^2 - 2a$$

Obținem:

$$x_{1,2} = \frac{2a^2 - a \pm a\sqrt{3a(a-2)}}{(1+a)^2}$$

$$x_{3,4} = \frac{-a}{1+a}.$$

Primele două rădăcini sunt reale dacă $a < 0$ sau $a > 2$.

PROBLEME PROPUSE

763. Să se arate că între 6 Martie și 6 Octombrie pe teritoriul Uniunii Sovietice între meridianele $\lambda_1 = 17°\text{E}$ și $\lambda_2 = 175°\text{W}$, dealungul paralelei de latitudine $\varphi = 50°$ nu poate fi în întregime noapte, adică în acest timp soarele nu apune pentru întreg teritoriul Uniunii Sovietice.

C. V. Costăchescu

764. Prin acțiunea unui acid asupra unei cantități de marmoră (CO_3Ca) s'au obținut 1670 cm^3 bioxid de carbon la temperatura de 27°C și la presiunea de 1000 mm mercur. Să se determine cantitatea de marmoră intrată în reacție dacă densitatea bioxidului de carbon la 0° C și la presiunea de 760 mm mercur este de 0,002.

C. Dragomir
elev, Ploești

765. Consumul de apă într'o fabrică situată pe o colină este de 45 m^3 pe zi. Apa este pompată dintr'un râu la o diferență de nivel de 35 metri. Motorul pompei lucrează 3 ore pe zi și are un randament de 0,7. Se cere puterea motorului în kW.

I. C. Petrea
elev, Petroșani

766. Să se calculeze inductivitatea proprie în henry a unei bobine de 100 spire pe o lungime de 9,86 cm, știind că lungimea cercului bobinei este de 31,4 cm.

Florin Torjescu
elev, Ploești

767. Cincisprezece acumulatori legați în serie, având fiecare 6 volți și rezistență interioară 0,09 ohmi, alimentează un încălzitor electric cu circuitul exterior acumulatorilor de 4 ohmi. Ce cantitate de ghiață la $-5°$ C poate topi acest încălzitor fiind în circuit timp de 7 minute.

Dan M. Angelescu
elev, Giurgiu

768. Un strungar folosind metode avansate, întrece producția cu 40% în fiecare lună față de luna precedentă timp de 6 luni consecutive. Cunoscând că în luna a doua a produs 875 piese și în luna a treia a produs 1225, se cere producția în luna întâia, a patra și a cincea. Dacă norma lunară a fost producția lunei a doua, se cere cu cât s'a depășit norma în timpul celor 6 luni de lucru.

Virgil Vârgolici
elev, București

769. Dintr'o sferă de rază $R = 7$ cm, se taie o calotă de volum $V = 54$ cm^3, iar în locul ei se fixează un con de aceiaș rază cu calota. Se cere înălțimea conului pentru ca volumul corpului astfel obținut să fie echivalent cu volumul sferei.

I. Licea
elev, Galați

770. Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuația de gradul doi în y ale cărei rădăcini să fie

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

și

$$y_2 = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_1 + x_2}.$$

Simon St. Petre

771. Să se arate că $x^3 + px^2 + q = 0$, pentru

$$x = \frac{-1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2q} + \sqrt{\frac{1}{4q^2} + \frac{p^3}{27q^3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2q} - \sqrt{\frac{1}{4q^2} + \frac{p^3}{27q^3}}}}$$

Marius Iosifescu
elev, Pitești

772. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând pozițiile H_a, H_b, H_c ale ortocentrelor triunghiurilor $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ unde s'a notat cu A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC

N. Gheorghiu,
student

773. Fie trei cercuri în același plan care trec printr'un punct P și se taie două câte două, respectiv în trei puncte diferite A, B, C. Să se stabilească relația ce există între unghiurile sub care se taie două câte două cele trei cercuri în punctele A, B și C. Să se considere cazurile când punctul P este sau nu este în exteriorul triunghiului curbiliniu ABC format de arcele care nu conțin punctul P.

Dan Barbilian

774. Să se arate că fracția $\frac{4n-1}{2n(2n-1)}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul întreg n.

* * *

775. Să se arate că dacă $A + B + C + D = 180°$, există relația:

$$\cos^2 A + \cos B \cos (B + 2C) =$$
$$= \cos^2 C + \cos D \cos (D + 2A).$$

C. Ionescu-Țiu

776. Să se demonstreze că dacă un patrulater înscris într'un cerc are două laturi adiacente egale, celelalte două laturi împart armonic diametrul ce trece prin vârful comun laturilor egale

D. C. Panu

777. Să se stabilească identitățile

$$1 + \frac{1}{2}(tg\, a - tg\, b) \sin 2b = \frac{\cos b}{\cos a} \cos (a - b)$$

$$a \cos x - b \sin y = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(x + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} \right).$$

A. I. Stan

778. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\operatorname{arc\,tg} (x + 3y) + \operatorname{arc\,tg} (x - y) = \arcsin \frac{5}{\sqrt{61}}$$
$$2x + y = 7.$$

L. Hammer
elev, Timișoara

779. Unui triunghiu oarecare ABC i se prelungesc laturile BA, AC și CB respectiv în același sens

$$BP = BC,\ AM = AB \text{ și } CN = CA.$$

Dreapta BC intersectează dreapta MN în punctul I, dreptele AB și NP se taie în J și dreptele CA și MP se taie în K. Să se arate că:

$$\frac{MI}{IN} = \frac{NJ}{JP} = \frac{PK}{KM} = 2.$$

J. T. Bulduș
elev, Slatina

780. Să se calculeze lungimea tangentei comune a două cercuri secante de raze R și r care se taie sub un unghi α

Barbu Kestenband
elev, București

781. Un menisc plan convex are indicile de refracție $\frac{3}{2}$ și raza de curbură a feței convexe $R = 50$ cm.

1 La ce distanță de această lentilă trebue plasat un obiect luminos AB pentru a obține o imagine reală sau virtuală mărită de 4 ori?

2 Obiectul fiind de o parte a planului și imaginea fiind reală se argintează fața convexă. Să se calculeze noua poziție a imaginei și mărimea sa.

Willy Parashiv
student, București

782. Intr'un triunghiu oarecare ABC, ducem bisectoarele BB' și CC' Prelungim pe $B'C'$ până ce intersectează latura BC în M. Pe prelungirile laturei BC, luăm punctele A_1 și A_2 astfel ca $BA_1 = AB$ și $CA_2 = AC$ Să se demonstreze că:

$$\sphericalangle A_1AA_2 = \sphericalangle BAM.$$

Fl. Dudiță
student, Orașul Stalin

783. Să se construiască un triunghiu oarecare, cunoscând baza și segmentele adiacente bazei determinate pe celelalte două laturi de o paralelă la bază dusă prin centrul cercului înscris triunghiului.

George Teodoru
student, București

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 252. La 15 Noembrie 1952 la terminarea schimbului al treilea Uzinele Sovromtractor din Orașul Stalin au îndeplinit planul anual pe toate sortimentele și la toți indicii (cu 45 zile înainte de termen). Să se exprime în procente depășirea planului anual.

Ioan Șt. Mușat

E. 253. Un paralelipiped dreptunghic făcut din lemn cu densitatea $\alpha = 0{,}7$ se cufundă în apă de mare de densitate $\beta = 1{,}16$, astfel că dimensiunea cea mai mică a paralelipipedului rămâne verticală. Cunoscându-se dimensiunile paralelipipedului $a = 50$ cm, $b = 26$ cm și diagonala mare de 57 cm, se cere înălțimea părții necufundate în apă.

Savin Ionescu
elev, Pitești

E. 254. Care este cel mai mic număr care scris după numărul 1953 ne dă un patrat perfect.

Simon Șt. Petre

E. 255. Fiind date numerele 1879 și 1953 în baza 10, să se scrie aceleași numere în bazele 2 și 7 respectiv.

* * *

E. 256. Se dă un unghi drept AOB cu bisectoarea OC pe care se ia $\overline{DE} = \overline{EF}$. (Punctul D este pe OC). Din punctele D și F se duc perpendiculare pe OB respectiv în G și H. Din punctul E (mijlocul segmentului DF) se duce o perpendiculară pe OC care intersectează pe OA în punctul M. Să se arate că aria triunghiului DMF este egală cu aria trapezului $GDFH$.

Ștefan Cimpoca
elev, București

E. 257. Să se exprime mărimea unghiului format de două înălțimi ale unui triunghi oarecare ABC în funcție de unghiurile triunghiului.

* * *

E. 258. Să se rezolve ecuația:

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

Aplicație: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

C. I. Ț.

E. 259. O echipă de 10 zidari ar termina o lucrare în 16 zile. O altă echipă de 18 zidari ar termina aceiaș lucrare în 12 zile. In cât timp ar

Dreapta BC intersectează dreapta MN în punctul I, dreptele AB și NP se taie în J și dreptele CA și MP se taie în K. Să se arate că:

$$\frac{MI}{IN} = \frac{NJ}{JP} = \frac{PK}{KM} = 2.$$

J. T. Bulduș
elev, Slatina

780. Să se calculeze lungimea tangentei comune a două cercuri secante de raze R și r care se taie sub un unghi α

Barbu Kestenband
elev, București

781. Un menisc plan convex are indicile de refracție $\frac{3}{2}$ și raza de curbură a feței convexe $R = 50$ cm.

1 La ce distanță de această lentilă trebue plasat un obiect luminos AB pentru a obține o imagine reală sau virtuală mărită de 4 ori?

2 Obiectul fiind de o parte a planului și imaginea fiind reală se argintează fața convexă. Să se calculeze noua poziție a imaginei și mărimea sa.

Willy Parashiv
student, București

782. Intr'un triunghiu oarecare ABC, ducem bisectoarele BB' și CC' Prelungim pe $B'C'$ până ce intersectează latura BC în M. Pe prelungirile laturei BC, luăm punctele A_1 și A_2 astfel ca $BA_1 = AB$ și $CA_2 = AC$ Să se demonstreze că:

$$\sphericalangle A_1AA_2 = \sphericalangle BAM.$$

Fl. Dudiță
student, Orașul Stalin

783. Să se construiască un triunghiu oarecare, cunoscând baza și segmentele adiacente bazei determinate pe celelalte două laturi de o paralelă la bază dusă prin centrul cercului înscris triunghiului.

George Teodoru
student, București

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 252. La 15 Noembrie 1952 la terminarea schimbului al treilea Uzinele Sovromtractor din Orașul Stalin au îndeplinit planul anual pe toate sortimentele și la toți indicii (cu 45 zile înainte de termen). Să se exprime în procente depășirea planului anual.

Ioan Șt. Mușat

E. 253. Un paralelipiped dreptunghic făcut din lemn cu densitatea $\alpha = 0{,}7$ se cufundă în apă de mare de densitate $\beta = 1{,}16$, astfel că dimensiunea cea mai mică a paralelipipedului rămâne verticală. Cunoscându-se dimensiunile paralelipipedului $a = 50$ cm, $b = 26$ cm și diagonala mare de 57 cm, se cere înălțimea părții necufundate în apă.

Savin Ionescu
elev, Pitești

E. 254. Care este cel mai mic număr care scris după numărul 1953 ne dă un patrat perfect.

Simon Șt. Petre

E. 255. Fiind date numerele 1879 și 1953 în baza 10, să se scrie aceleași numere în bazele 2 și 7 respectiv.

* * *

E. 256. Se dă un unghi drept AOB cu bisectoarea OC pe care se ia $\overline{DE} = \overline{EF}$. (Punctul D este pe OC). Din punctele D și F se duc perpendiculare pe OB respectiv în G și H. Din punctul E (mijlocul segmentului DF) se duce o perpendiculară pe OC care intersectează pe OA în punctul M. Să se arate că aria triunghiului DMF este egală cu aria trapezului $GDFH$.

Ștefan Cimpoca
elev, București

E. 257. Să se exprime mărimea unghiului format de două înălțimi ale unui triunghi oarecare ABC în funcție de unghiurile triunghiului.

* * *

E. 258. Să se rezolve ecuația:

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

Aplicație: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

C. I. Ț.

E. 259. O echipă de 10 zidari ar termina o lucrare în 16 zile. O altă echipă de 18 zidari ar termina aceiaș lucrare în 12 zile. In cât timp ar

termina aceiaş lucrare 5 zidari din prima echipă şi 12 zidari din a doua echipă?

* * *

E. 260. O persoană face cumpărături dintr'un magazin de o treime din suma ce o avea, plus 90 lei. La alt magazin mai cheltuieşte o treime din ce-i rămăsese şi încă 60 lei; iar în al treilea magazin cheltuieşte o treime din noul rest şi încă 20 lei, rămânându-i 20 lei necheltuiţi. Cât a cheltuit în fiecare magazin? Verificare.

* * *

E. 261. Bisectoarea AM a triunghiului oarecare ABC întâlneşte cercul circumscris în punctul N. Să se arate că triunghiurile ABM, MNC, ACN sunt asemenea. La fel triunghiurile AMC, MNB, ABN sunt asemenea.

C. I. Ţ.

E. 262. Se dă triunghiul oarecare ABC. Mediatoarele laturilor AB şi AC intersectează înălţimea AD respectiv în punctele M şi N. Să se demonstreze relaţia $\overline{AM} \cdot \overline{AC}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{AB}^2$.

Mihail I. Popescu
elev, Craiova

E. 263. In triunghiul oarecare ABC înscris în cercul de rază R ducem înălţimea AD. Să se arate că $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2R \cdot \overline{AD}$.

* * *

E. 264. Se dă un patrulater oarecare $ABCD$. Numai cu rigla şi compasul să se împartă acest patrulater în două patrulatere echivalente (figuri de aceiaşi suprafaţă).

Florin Buruiană
elev, Iaşi

E. 265. In triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept în A ducem înălţimea AD şi mediana AE. Ducem prin D perpendiculara pe AE şi pe această perpendiculară ducem perpendicularele BB_1 şi CC_1. Să se arate că

$$2\,\overline{DE} = \overline{BB_1} + \overline{CC_1}.$$

Gh. I. Bercea
elev, Oraviţa

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

In cursul lunii Decembrie 1952 s'au evidenţiat următorii rezolvitori:

Weszely Tiberiu (clasa X-a, Târgu-Mureş), *Pricăi Gh. Constantin* (clasa X-a, Predeal), *Uţă Marin* (clasa X-a, Predeal), *Kestenband Barbu* (clasa IX-a, L. b. 6, Buc.), *Popescu I. Mihail* (clasa XI-a, Craiova), *Dumitru A. Florin* (clasa XI-a, Oraşul Stalin), *Tătaru D. Emil* (clasa IX-a, Aiud), *Pupăzan Nicolae* (clasa X-a, Predeal), *Budin I. Constantin* (clasa X-a, Predeal), *Peteanu Vasile* (clasa IX-a, Aiud), *Acatincăi Eugen* (clasa XI-a, Câmpulung Muscel), *Hammer Ladislau* (clasa X-a, Timişoara), *Munteanu Marcel* (clasa XI-a, Dorohoi), *Radu Al. Corneliu* (clasa X-a, Piteşti), *Constantinescu Vasile* (clasa XI-a, Piteşti), *Bonciu I. Ioan* (clasa XI-a, Oraşul Stalin), *Lazăr A. Ioram* (clasa X-a, Roman), *Ciucă Alexandru* (Tecuci), *Mihăilescu Ştefan* (clasa XI-a, L. b. 3, Bucureşti), *Mihăescu I. Alexandru* (Turnu Măgurele), *Scutelnicu Constantin* (Dorohoi), *Satrapel Taşcu* (Sc. Hidr. Constanţa), *Tănase Dumitru* (Sc. Măsurători terestre, Buc.), *Brener Marian* (clasa IX-a, L. b. 3, Buc.) şi *Dragomir Constantin* (clasa X-a, Piteşti).

★

In cursul lunii Decembrie 1952 s'au primit soluţii bune la cel puţin cinci probleme, după cum se arată în paranteză, dela:

AIUD (Cluj). Clasa IX-a. Peteanu Vasile (481, 484, 485, 506, 512, 514, 515, 516, 517, 518, 520, 522, 533, 536, 537, 541, 547, 550, 552, 554, 560, 568, 570, 571, 578, 581, 582, 583, 588, 591, 597, P), Tătaru D. Emil (370, 374, 382, 394, 426, 427, 428, 432, 460, 477, 481, 503, 522, 525, 530, 540, 542, 543, 547, 548, 562, 568, 570, 571, 573, 574, 576, 584, 587, 590, 604, 605, 607, 608, 612, 614, 622, P).

BACĂU. Clasa X-a: Tofan V. Ioan (550, 604, 622, 632, 659, 663, 664, 666, 678, 679, 682), Zisman Iosif (512, 550, 600, 604, 629, 659, 670, 690, 691, E: 213, 217, 218, 223, 225, 227).

BÂRLAD. Şcoala Tehnică Financiară. Anul II. Condrea E. Petru (630, E: 156, 159, 161, 165, 166, 170, 171, 172, 173), Clasa X-a liceu. Ioan D. Ioan (463, 468, 477, 481, 484, 503, 510, 512, 560, 590, 623, 627, 629, 632, 633, 643, 652, 655, 658).

BEIUŞ (Oradea). Şcoala elementară Pietroasa. Clasa VII-a. Pavel Vasile (E: 186, 201, 206, 207, 209, 213, 216, 217, 219, 221, 222).

BOTOŞANI. Şcoala elementară Bucecea. Clasa VII-a: Puiu Silvia (E: 213, 217, 218, 220, 222), Şcoala medie tehnică de textile. Anul III. Domb Betty (621, E: 156, 175, 213, 217, 218), Cozoc Aurelia (E: 193, 202, 209, 217, 218, P).

BUCUREŞTI. Liceul 1 băieţi. Clasa IX-a B. Feinstein Ilie (658, 664, 670, 671, 675), Nicolae Alexandru (445, 457, 484, E: 218, 222), Şcoala Tehnică Metalurgică Nr. 1. Anul IV. Padar Petre (492, 529, 568, 627, 629, 643, E: 184, 190, 220). Şcoala medie de Arhitectură Anul I. Cimpoca Ştefan (5 P). Şcoala de Măsurători terestre. Anul II C, Bâlu Vasile (670, E: 183, 192, 203, 209, 213, 215, 216, 217, 218, 220, P), Moga Emil (670, E: 214, 216, 217, 218), Tănase Dumitru (525, 550, 578, 587, 593, 601, 603, 608, 617, 625, 627, 630, 635, 639, 643, 651, 663, 664, 665, 670, E: 152, 167, 183, 188, 191, 192, 194, 204, 207, 212, 213, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, P).

Liceul 3 băieți. Clasa IX-a C. Brener Marian (624, 631, 632, 633, 636, 641, 642, 654, 657, 658, 663, 674, 676, 679, 680, 681, 682, E: 206, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 222). Clasa XI-a B. Mihăilescu Ștefan Vlad (537, 540, 550, 553, 554, 556, 469, 599, 603, 607, 612, 615, 617, 621, 620, 629, 630, 633, 638, 641, 643, 645, 663, 664, 666, 670, 679, 681, 682, P).

Școala elementară 4 băieți. Clasa VII-a. Schileru I. Dinu (E: 213, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 222, P).

Liceul 6 fete. Clasa XI-a. Popovici Silvia (630, 648, 649, 663, 664).

Liceul 6 băieți. Clasa VIII-a: Popovici Radu (E: 213, 214, 216, 217, 218, 220), Clasa IX-a: Kestenband Barbu (383, 386, 514, 523, 533, 536, 541, 550, 554, 560, 569, 572, 573, 578, 583, 589, 591, 597, 601, 602, 604, 606, 607, 608, 611, 615, 618, 620, 621, 632, 633, 651, 654, 655, 658, 663, 664, 669, 670, 674, 675, 682, E: 76, 80, 83, 87, 88, 90, 91, 98, 99, 104, 105, 107, 109, 119, 121, 122, 165, 166, 168, 169, 170, 171, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 185, 189, 190, 192, 195, 197, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 222, P). Clasa XI-a. Popescu Gh. Gheorghe (550, 618, 651, 664, 672, 675, E: 207, 215), Vârgolici V. Virgil (444, 502, 517, 532, 568, 576, 618, 664, 672, 675, E: 122, 197, 199, 207, 220, P), Ștefănescu N. Nicolae (590, 592, 666, 670, 675, E: 213, 216, 217).Școala elementară. Chitila. Clasa VI-a: Chițimia M. Eustațiu (E: 63, 67, 90, 114, 117, 186, 198), Clasa VII-a. Newton A. Iosif (E: 55, 60, 102, 107, 117). Liceul 8 băieți. Clasa VI-a: Gavrilă Horia (E: 203, 204, 207, 209, 210), Liceul 9 băieți. Clasa IX-a. Dumitru Ion (670, 679, E: 213, 216, 218), Clasa X-a. Alexandrescu Florin (591, 611, 621, 633, 635, 655, 658, 664, 665, 670, 682), Eliescu Gr. Grigore (621, 633, 651, 655, 658, 664, 670), Ionescu Valentin (608, 618, 621, 630, 633, 644, 647, 651, 655, 658, 664, 665, 670), Liceul 10 băieți. Clasa VIII-a. Gheorghe Dumitru (E: 213, 216, 217, 218, 229, 232), Mara I. Alexandru (404, E: 200, 207, 208, 209), Vidlescu C. Vasile (E: 197, 209, 211, 216, 223, 225, 230). Clasa XI-a: Mândru Anatolie (503, 504, 513, 517, 525, 528, 530, 534, 536, 567), Stoicescu Teodor (543, 554, 582, 583, 618, 658, 666).

BUZĂU. Clasa IX-a A. Cucu P. Dan (591, 611, 615, 655, 658, P), Iamandi Walter (517, 518, 663, 669, 670), Clasa X-a Stoicescu T. Dumitru (569, 574, 578, 583, 604 608, 615, 618, 621, 625, 627, 630, 633).

CĂLĂRAȘI. Clasa X-a. Bulearca Ion (427, 439, 468, 539, 643, 644, 649, 658, P).

CÂMPINA. Școala tehnică de Utilaj Petrolifer. Banghea Oprea (536, 537, 541, 567, 655, 658, 670, P). Anul IV. Pârciu Mircea (578, 583, 584, 651, 663, 670, P).

CAREI (Baia Mare). Școala Zootehnică. Clasa VII. Godea Tiberiu (E: 165, 171, 206, 213, 218).

CÂMPULUNG MOLDOVENESC. Școala medie tehnică de Construcții. Anul II. Răileanu G. H. (643, 649, 650, 663, 664, 670, E: 203, 204, 205, 208, 209, 213, 214, 216, 217, 220, 228).

CÂMPULUNG MUȘCEL. Clasa X-a. Diaconu Sarmiza (484, 505, 520, 536, 591, 664, 670). Clasa XI-a. Acatincăi Eugen (512, 518, 525, 526, 536, 537, 540, 541, 555, 578, 581, 589, 590, 592, 593, 594, 604, 608, 611, 615, 621, 629, 630, 633, 634, 643, 644, 651, 655, 658, 663, 664, 666, 669, 670), Bucurenci D. Gheorghe (518, 522, 537, 540, 541, 618, 630, 633, 670).

CARACAL. Clasa XI-a. Economu C. Apostol (534, 543, 568, 574, 615, 628, 630, 633, 685, E: 156, 157, 158, 159, 161, 172, 173, 189, 193, 197, 200, 202, 213, 221).

CONSTANȚA. Clasa X-a: Mitescu Constantin (632, 666, 670, 679, E: 213, 214, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 222). Școala hidrotehnică. Anul II. Curtede Pichiret (599, 611, 615, 630, E: 178, 182, 193, 208, 209), Panciu Nelu (589, 611, 630, E: 182, 193, 204). Anul III. Șatrapel Tașcu (301, 323, 335, 357, 374, 407, 423, 444, 446, 462, 472, 502, 505, 509, 510, 548, 590, 605, 607, 608, 615, 621, 622, 627, 630, 633, 641, 643).

CRAIOVA. Lipoveanu N. I. (E: 156, 160, 190, 203, 206, 207, 208, 209, 213, 215, 217, 218, 220). Clasa IX-a. Cetățeanu Cecilia (602, 666, E: 200, 208, 218), Drunea Dumitru (676, 679, 682, E: 216, 217, 218, 220, 222), Istinie C. Crăciunel (404, 432, 444, 456, 484, 518, 537, 541, 601, 664, 675). Clasa X-a: Zidăroiu G. Cornelius (429, 443, 484, 518, 536, 537, 550, 570, 578, 611, 632), Clasa XI-a. Galbenu Gheorghe (562, 591, 597, 601, 608, 611, 621, 628, 632, 633, 651, 655, 659), Câmpeanu I. Aurel (536, 537, 550, 554, 591, 597, 604, 611, 613, 621, 632, 633, 651, 655, 685), Popescu I. Mihail (296, 329, 349, 377, 387, 420, 426, 430, 443, 457, 458, 459, 463, 476, 486, 520, 522, 533, 541, 545, 552, 555, 558, 581, 591, 598, 601, 604, 612, 613, 625, 634, 642, 650, 664, 665, 670, 673, 674, 677, 681, 682, P), Șerban Ileana (632, E: 213, 215, 217, 218, 220), Tița I. Nicolae (605, 622, 624, 631, 635, 652, 663, 670, 673, 682, P).

CURTEA DE ARGEȘ. Boncea Vasile (474, 608, 611, 612, 615, 621, 643, 670), Clasa XI-a. Matei T. Gheorghe (449, 456, 461, 488, 499, 537, 540, 541, 550, 561, 578, 581, 583, 604, 611, 621, 630, 632, 633, 651, 654, 655, 658, 670, 676).

DOROHOI. Clasa XI-a. Munteanu Marcel (389, 404, 439, 440, 445, 458, 468, 518, 530, 548, 550 554, 567, 570, 576, 591, 597, 598, 604, 607, 608, 611, 612, 613, 615, 620, 621, 624, 625, 632, 641, 655, 658, 664, 670), Scutelnicu Constantin ((404, 420, 426, 543, 555, 561, 568, 578, 583, 590, 598, 601, 603, 607, 608, 613, 618, 624, 625, 630, 632, 633, 641, 651, 658, 666, 669, 670, 673, 675).

FĂGĂRAȘ. Școala medie tehnică de chimie. Anul III A. Panait Mihai (548, 574, 600, 615, 621, 685, 686, E: 171, 178), Clasa XI-a liceu. Schmidt Victor (510, 514, 536, 550, 602, 604, 608, 615, 625, 630, 660, 670).

GALAȚI. Grecu V. George (664, 670, E: 203, 209, 228, 230).

GIURGIU. Clasa VIII-a. Aldea V. (597, 600, 601, 604, 611, 632, E: 168, 172, 203, 204, 207, 210, 213, 215, 216, 217, 218, P), Fotă M. Stan (457, 474, 488, 561, 591, 603, 620, 625, 655, 660, 666, 670, 682), Geantă Ilie (E: 165, 203, 204, 211, 213, 217, 218), Mișcol M. Mircea (E: 100, 175, 179, 185, 204, 207, 215), Pieleanu D. Radu (486, 522, 663, E: 142, 147, 170, 202, 213, 217, 218), Clasa IX-a: Biță Pompiliu (525, 587, E: 156, 160, 161, 178, 223), Vidan Marius (E: 204, 207, 213, 216, 217), Clasa X-a: Bătineț M. Dumitru (E: 158, 165, 171, 172, 174, 175, 182, 191, 192, 193, 202, 203, 205, 207, 208, 209, 210, 211, 213, 217, 218), Calotă Gh. (540, 685, E: 156, 161, 174, 193, 202, 223, 224, 225, 227), Pastramă P. Marin (525, 568, 629, 630, 685, E: 156, 161, 171, 178, 173, 208, 217, 218), Petcu I. Dumitru (504, 537, 575, 578, 608, 610, 629, 666, 670, 685, 686, E: 158, 213, 217, 223, 225, 227, 230). Clasa XI-a: Angelescu I. Dan (536, 574, 578, 630, 685, E: 193, P), Dragne Mitică (518, 537, 574, 587, 630, 633, 666, 670, 685, E: 218, 233), Școala tehnică medie Anul IV. Landă

P. Aurel (E: 137, 206, 207, 208, 218), Școala Pedagogică Anul II Dănilă S. Monica (574, 615, E: 157, 161, 178, 193, 207).

IAȘI. Clasa IX-a. Rădulescu Magda (E: 213, 216, 217, 218, 221), Radu Rodica (618, 621), E: 190, 200, 208, 215, 217, 221), Șerbescu Gh. Constantin (658, E: 209, 213, 217, 218, 225), Clasa X-a B. Ciobanu Maria (E: 199, 200, 212, 217, 218), Clasa XI-a: Rotaru D. Emil (550, 611, 615, 618, 621, 627, 650, 651, 655, 663, 670, E: 217, 218). Școala pedagogică Anul III Ioniță M. Ionel (479, 485, 572, 618, 621, 633, E: 216).

LUGOJ. Clasa XI-a. Bidermann Pavel (608, 611, 615, 627, 632, 633, 541, 655, 658).

ORADEA. Clasa XI-a. Petrovici Șt. Liviu (410, 512, 514, 518, 520, 525, 526, 528, 530, 533, 537, 539, 540, 544, 545, 547, 550, 553, 554, 555, 561, 562, 563, 564), Poenaru Dorin (587, 590, 609, 615, 625, 627, 629, 630, 645, 647, 663, 664, 666, 670).

ORAȘUL STALIN. Școala elementară 1 băieți Clasa VI-a. Crăciunel Liviu (50, 51, 55, 98, 175), Clasa VIII-a liceu. Porumb I. Constantin (E: 50, 51, 88, 156, 175, 186, 188), Vintilă Gheorghe (E: 50, 51, 132, 175, 203), Clasa X-a: Marin Aurel (591, 634, 658, E: 179, 197, 207), Clasa XI-a: Constantinescu T. Teodor (343, 512, 536, 604, 624, 625, 629, 632, 633, 658). Miloiu Gheorghe (E: 87, 91, 92, 122, 132, 156, 165, 199, 209), Bonciu I. Ioan (422, 449, 503, 509, 510, 512, 513, 514, 515, 517, 518, 525, 536, 537, 560, 568, 569, 578, 587, 590, 608, 609, 615, 629, 627, 630, 632, 633, 638 640, 641, 642, 691), Dumitru A. Florin (512, 514, 517, 518, 523, 525, 528, 536, 537, 539, 540, 542, 550, 554, 561, 567, 568, 572, 574, 578, 579, 587, 589, 590, 594, 604, 606, 607, 608, 611, 612, 618, 621, 624, 625, 627, 629, 633, 641, 651, 655, 658, 659), Weinfeiler Edgar (624, 625, 629, 633, 637, 641, 642, 655).

PIATRA NEAMȚ. Clasa XI-a: Berea Gh. Dumitru (536, 625, 643, 651, 655, 658, 665, 670, E: 192, 193, 200, 208, 213, 216, 217), Botezatu Ionel (625, 633, 643, 670, 679, E: 213, 216, 217, 222), Breteanu C. Ștefan (581, 600, 613, 621, 651, 670, E: 213, 217, 218), Dârțu I. Decebal (466, 514, 608, 613, 621, 622, 633, 670, 673), Faibiș Iancu (651, 664, 670, E: 207, 208, 209, 213, 217, 218), Șum Constantin (625, 643, 670, 673, 679, E: 207, 213, 216, 217, 222).

PITEȘTI. Clasa IX-a: Mihalache Al. Cornel (E: 190, 213, 215, 217, 218, 220, 222), Clasa X-a: Dragomir Constantin (405, 410, 419, 427, 429, 435, 439, 445, 484, 506, 510, 528, 534, 537, 539, 542, 549, 550, 554, 587, 597, 601, 604, E: 116, 119, 120, 121, 123, 124, 125, 130, 131, 132, 134, 137, 138, 139, 142, 143, 145, 147, 148, 149, P), Ionescu V. Savin (282, 432, 436, 437, 443, 461, 466, 468, 504, 510, 574, 608, E: 105, 106, 107, 108, 109, 110, 113, 114, 115, 116, P), Radu Al. Corneliu (404, 405, 429, 443, 455, 466, 477, 481, 484, 486, 518, 536, 537, 540, 541, 574, 583, 587, 591, 607, 608, 611, 615, 620, 621, 630, 632, 633, 651, 655, 658), Popescu Neaga Olimpia (606, 651, 664, 669, 670), Clasa XI-a: Costache H. Romanus (486, 487, 510, 512, 516, 534, 537, 540, 542, 561, 575, 583, 591, 598, 609, 610, 627, 629, 630, 641, 648, 670), Constantinescu Vasile (510, 512, 514, 516, 518, 520, 522, 536, 540, 541, 567, 578, 583, 592, 598, 602, 608, 611, 618, 621, 625, 627, 629, 630, 633, 635, 641, 647, 648, 651, 655, 658, 670), Vasilescu Vasile (506, 514, 518, 536, 537, 541, 561, 578, 581, 591, 608, 611, 612, 621, 633, 641, 642, 658, 670, 673), Școala medie tehnică mecanică. Anul I. Badea Nicolae (404, 443, 444, 621, E: 213, 218, 220), Din I. Alexandru (404, 443, 444, 621, E: 218, 220), Dumitru I. Marin (404, 443, 444, 621, E: 213, 216, 218, 220, 221), Geamănu C. Gheorghe (404, 443, 621, 658, E: 213, 216, 218, 221), Marin I. Nicolae (404, 443, 444, 621, E: 213, 216, 221), Olteanu M. Pandele (404, 443, 633, 658, E: 199, 212, 218), Oprea D. Eugen (404, 443, 444, 621, 633, 658, E: 213, 216, 218, 221), Stănescu Gh. Ion (404, 443, 621, 633, 658, E: 192, 216, 218, 220), Stan Gh. Ion (404, 443, 444, 658, E: 203), Stancu I. Gheorghe (404, 443, 444, 621, E: 206, 209, 213), Stoica M. Florea (621, E: 216, 218, 220, 221), Stoica M. Marin (658, E: 213, 216, 218, 220), Stoian A. Florea (404, 443, 658, E: 203, 205, 209), Anul II. Alexandru Ion (404, 443, 444, 466, 621, 658, E: 213, 222), Cioroi G. Petre (404, 444, 466, 658, E: 213, 218), Litescu I. Ștefan (404, 443, 444, 466, 621, E: 218), Bădoi M. Paulian (404, 433, 444, 466, 621, 658, E: 198, 202, 203, 204, 205, 206, 208), Mihai V. Constantin (404, 443, 444, 466, 658), Nicolescu M. Andrei (466, 618, 658, E: 213, 220, 218), Popescu D. Emanuel (416, 466, 502, 621, 630, 658), Popescu M. Virgil (404, 416, 432, 444, 466, 550, E: 213, 218), Udeanu C. Gheorghe (404, 443, 444, 466, 621, E: 213, 216, 218), Zăvoianu Șt. Constantin (404, 443, 444, 466, 621, E: 213, 218), Anul III. Bărbulescu T. Alexandru (435, 443, 444, 502, 550, 562, 63, 635, 658, 663, 664, 670, 691, 692, E: 138, 160, 164, 202, 213, 214, 216, 217, 218, 220, 221, 222, 223, 225, 230), Ion N. Ion (404, 466, 470, E: 137, 160, 176, 200, 212, 213, 218), Vaidescu Nicolae (663, E: 213, 215, 216, 217, 221).

PLOEȘTI. Clasa IX-a: Herișan Ionel (416, 455, 552, 651, E: 113, 114, 156, 175, 195, 213, 216), Schip Z. Harry (517, 615, 658, E: 109, 113, 122, 138, 156, 192, 208, 213, P), Stanciu N. Toma (611, 615, 621, 670, E: 54, 92, 215, 217, 220), Clasa X-a: Dăscălescu Gheorghe (468, 597, 604, 627, 630, 677), Mihai Iulian (548, 593, 595, 601, 602, 612, 624, 635, 664, 666, 681, 683, 685, 686, 691), Mihai Gh. Alexandru (518, 541, 591, 593, 621, 651, 670), Popescu I. Dumitru (591, 593, 621, 633, 651, 664), Pușcașu A. Alexandru (392, 440, 444, 504, 543, 548, 563, 583, 585, 589, 603), Vulpescu Dumitru (536, 567, 568, 574, 582, 587, P). Clasa XI-a. Sinică Romulus (403, 416, 440, 472, 478, 482, 486, 496, 499, 501, 506, 530, 539, 540, 545, 625, 640, 643, 670).

PREDEAL. Școala medie Dimitrie Cantemir. Clasa X-a: Budin I. Constantin (445, 446, 448, 455, 461, 465, 466, 467, 471, 472, 501, 513, 533, 540, 545, 548, 552, 554, 555, 570, 573, 581, 585, 588, 589, 591, 592, 593, 603, 604, 611, 613, 620, 621, 663, 664, 665, 670), Pricâ Gh. Constantin (378, 429, 432, 434, 434, 435, 437, 439, 440, 441, 443, 445, 452, 455, 466, 468, 481, 507, 512, 517, 518, 520, 522, 525, 533, 536, 537, 541, 545, 548, 552, 554, 559, 560, 561, 565, 585, 588, 591, 597, 598, 601, 602, 604, 608, 611, 612, 613, 615, 617, 629, 630, 632, 633, 634, 641, 642, 654, 655, 658, 664, 670, 676, 681, 682, E: 157, 163), Pupăzan Nicolae (429, 432, 435, 437, 439, 440, 441, 443, 445, 452, 454, 455, 468, 540, 545, 548, 552, 554, 555, 559, 560, 561, 570, 583, 588, 590, 598, 600, 604, 608, 611, 613, 629, 630, 633, 634, 670, 676, 681), Racoți Eugen (439, 517, 525, 533, 536, 537, 554, 555, 570, 591, 613, E: 157, 167, 192, 207, 208), Uță Marin (329, 351, 372, 389, 429, 432, 434, 435, 439, 443, 446, 454, 455, 459, 461, 463, 465, 467, 468, 485, 501, 507, 512, 513, 517, 518, 520, 522, 525, 536, 537, 545, 548, 552, 554, 555, 559, 560, 561, 573, 581, 582, 588, 591, 597, 598, 601, 603, 604, 606, 611, 613, 615, 618, 620, 629, 632, 633, 634, 641, 663, 664, 670, 671).

RĂDĂUȚI. Clasa X-a. Chelba Constantin (426, 428, 434, 443, 445, 543, 547, 548, 551, 559, 574, 632, 633, 640, 643, 644, 655, 658, 664, 666, 681), Chifan Aurel (504, 585, 589, 595, 600, 615, 618, 630, 633, 640, 655, 658, 664, E: 178, 179, 203, 207, 208, 209, 213).

RÂMNICUL-SĂRAT. Clasa IX-a: Stamatiu I. Alexandru (506, 507, 509, 514, 522, 554, 603, 618, 651, 655, 658, E: 172, 197, 200, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 213, 214, 215, 216, 217, 219, 221, P).

REȘIȚA. Clasa X-a. Popescu Al. Dan (629, 651, 659, 663, 664, 670, 677, E: 200, 208, 217, 221).

ROMAN. Lazar Aldo Ioram (410, 414, 417, 419, 442, 448, 452, 460, 465, 477, 493, 495, 496, 502, 506, 509, 510, 512, 513, 514, 516, 517, 518, 519, 521, 523, 525, 530, 531, 532, 533).

SLATINA. Popescu Sergiu (591, 632, 652, 655, 658, E: 207, 208, 209, 216, 217), Clasa IX-a. Badea D. Constantin (506, 512, 593, 634, 651, E: 160, 207, 208, 213, 218, 225, 270), Florea Ion (658, E: 193, 197, 200, 207, 208).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VIII-a: Abramescu V. Nicolae (E: 157, 213, 216, 217, 218), Brebu I. Gheorghe (587, 633, E: 135, 182, 213, 214, 216), Galațky Gheorghe (446, 454, 525, 534, 548, 574, 587, 685, 686, E: 157, 213, 216, 220, 223, 225, 226, 230), Nedelcu C. Stelian (536, 633, 658, E: 171, 216, 218, 223), Onea M. Gheorghe (615, E: 157, 204, 209, 211, 218), Oprea A. Aurelian (434, 437, 439, 449, 454, 468, 510, 525, 536, 543, E: 157, 193), Popescu N. Viorel (E: 213, 214, 216, 217, 218, 220, 221, 222), Soare Gh. Alexandru (633, 636, 658, E: 203, 217, 218), Târlea I. Alexandru (404, 536, 615, 658, E: 121, 216, 217, 218), Clasa XI-a: Dumitrică V. Barbu (449, 518, 522, 536, 537, 591, 611, 637, 658, 676, E: 157, 192, 197, 207, 208, 212, 216, 218), Janes Paul (518, 514, 536, 541, 578, 582, 606, 608, 621, 670, E: 185, 213, 217, 218, 222), Oprea A. Constantin (419, 434, 449, 468, 454, 474, 481, 496, 510, 518, 530, 535, 536, 540, 543, 545, 554, 561, 574, 587, 590, 591, 597, 604, 611, 627, 630, 633).

TÂRGU-JIU. Clasa IX-a. Cosinschi Dragoș (427, 590, E: 216, 217, 218, 231, 232), Râcă Gheorghe (426, 434, 455, 456, 466, 477, 487, 503, 514, 525, 527, 533, 540, 548, 560, 597, 604, 633, 634, 638, 655, 662). Clsaa X-a: Neamțu I. Ion (512, 517, 523, 533, 536, 537, 540, 578, 585, 601, 607, 611, 612, 613, 615, 629, 670, 671, P), Tivig Gh. Constantin (512, 525, 536, 591, 597, 611, 632, 670), Școala Pedagogică Anul III. Câțu C. Nicolae (527, 643, 648, E: 203, 204, 208, 212, 214, 217, 218, 220).

TÂRGU-MUREȘ. Clasa X-a: Weszely Tiberiu (403, 417, 419, 426, 434, 435, 436, 438, 440, 442, 444, 450, 454, 474, 483, 486, 503, 504, 509, 510, 512, 513, 514, 516, 520, 530, 532, 540, 541, 539, 542, 543, 546, 547, 550, 553, 554, 555, 559, 562, 563, 565, 568, 571, 572, 574, 576, 577, 578, 581, 582, 583, 584, 585, 587, 588, 589, 590, 591, 597, 600, 601, 602, 604, 605, 607, 608, 609, 611, 612, 613, 615, 617, 618, 620, 621, 622, 624, 625, 627, 629, 630, 632, 634, 637, 640, 641, 642, 645, 649, 650, 651, 652, 654, 655, 656, 658, 659, 660, 663, 664, 665, 666, 669, 670, 671, 673, 674, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, P). Anul II Merceologie. Fetti Felicia (404, 514, 550, 578, 651, 670, E: 98, 105), Anca Monica (517, E: 107, 109, 119, 138, 155, 156, 185, 190, 217, 221), Bolog N. Ana (404, 506, E: 116, 148, 159, 164, 178, 214, 215, 218), Chirilă Marcian (E: 126, 149, 188, 192, 196, 206, 210, 220).

TECUCI. Ciucă Alexandru (423, 427, 429, 431, 434, 435, 441, 443, 445, 461, 468, 474, 486, 515, 523, 525, 527, 540, 543, 590, 591, 609, 625, 664, 666, 665, 671, 673, 676, 679, P).

TIMIȘOARA. Clasa VII-a: Arsenovici Tiberiu (155, 156, 160, 194, 196, 198, 201, 202, 203, 204). Clasa X-a: Hammer Ladislau (417, 440, 459, 470, 471, 510, 512, 513, 514, 525, 543, 548, 550, 565, 586, 598, 604, 617, 623, 624, 625, 627, 629, 630, 643, 651, 654, 655, 659, 664, 666, 671, 681, P), Molnar Andrei (466, 484, 514, 528, 536, 537, 541, 550, 578, 582, 598, 604, 624, 633, 640, 651, 655, 659). Clasa XI-a: Ionașiu Partenie (484, 514, 525, 536, 541, 550, 578, 581, 582, 598, 604, 608, 618, 621, 633, 640, 651, 654, 670).

TURDA. Clasa XI-a. Găbudean Dorin (426, 454, 468, 509, 512, 517, 518, 525).

TURNU-MĂGURELE. Clasa IX-a: Chivu Daniela (611, 655, E: 207, 208, 217), Ghițulescu N. Victor (611, 655, 679, E: 157, 174, 208, 216, 217, 218), Rey Vasile (521, 655, E: 174, 175, 217, 218). Clasa X-a: Dragne Marcel (517, 518, 523, 536, 670, P), Țugui Emil (608, 615, 655, E: 115, 192, 202, 206, 208, 216), Voiculescu P. Stelică (520, 523, 542, 561, 567, 654, 664, 681, P). Clasa XI-a. Găină Stelian (426, 454, 463, 528, 550, 563, 574, P). Absolvent liceu. Mihăescu I. Alexandru (517, 530, 536, 537,541, 548, 554, 568, 574, 578, 585, 587, 590, 603, 608, 611, 615, 618, 621, 643, 645, 651, 655, 658, 663, 664, 665, 666, 669, 670, 673, P).

TURNU-SEVERIN. Clasa X-a: Filimon Ștefan (578, 621, 644, 651, 663, 664, 666, 670, E: 213, 216, 218), Păunescu Ion (403, 404, 426, 468, 486, 598, 663, 664, 670, E: 210, 216, 218), Zorilescu Dan (456, 466, 512, 513, 514, 518, 550, 603, 604, 608, 611, 615, 621, 624, 632, 633, 645, 649, 650, 651, 655, 658, 659). Clasa XI-a. Vâță Florea (554, 563, 571, 578, 608, 611, 650, 651, 664, 673, 676, 677).

Redactarea soluțiilor

Pe aceiaș foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul complect al problemei. Se poate scrie în continuare și pe contra pagină; iar dacă soluția necesită figură, se va desena cu îngrijire.

— Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie.

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluție, numele, școala, clasa și localitatea. Soluțiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

— La orice problemă propusă se primesc soluții cel puțin timp de 6 luni dela publicarea enunțului.

— Se mai primesc soluții la problemele cu numărul de ordine: 526, 527, 529, 531, 532, 533, 534, 538, 540, 543, 544, 546, 548, 549, 551, 552, 579 și următoarele; iar pentru elementar, la exercițiile E: 160 și următoarele.

— Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse și însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți să înceapă a propune probleme după ce au soluționat un număr mare de exerciții și probleme.

— Intrucât sosesc la redacție cereri de numere mai vechi ale revistei, sau reclamații ale abonaților de neprimirea revistelor, vă informăm că pentru abonamente și procurări de reviste să vă adresați Centrului de difuzare a presei, după cum se arată pe coperta revistei.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice și fizice, articole, dări de seamă asupra activităților cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, sugestii și propuneri, etc. se trimit pe adresa: Revista Matematică și Fizică, Strada Dionisie Lupu 40, parter, Raionul Stalin, București.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: STR. DIONISIE LUPU, 40. Parter. — BUCUREŞTI
RAIONUL STALIN

Országos Múzeumi Könyvtár TULAJDONA

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus

★

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti, precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru intreprinderi . . . . . Lei 60 anual
„ „ muncitori, technicieni, elevi . . „ 12 „

DIN CATALOGUL

EDITURII TEHNICE

★

CĂRŢI APĂRUTE

* * *

Calculatorul general

540 pag. 37 lei

M. E. E. I. E.

Curs de matematici vol. IV (trigonometria)

208 pag. 6,86 lei

M. E. E. I. E.

Curs de matematici vol. III (algebra)

244 pag. 9,36 lei

S. E. Friş şi
A. V. Timoreva

Curs de fizică generală vol. II
(Trad. din limba rusă)

536 pag. 26,60 lei

S. P. Strelcov, I. A. Elţin
şi I. A. Iacovlev

Culegere de probleme pentru cursul de fizică generală
(Trad. din limba rusă)

296 pag. 9,94 lei

C. 125. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4. — Bucureşti

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E 1426 XI

KAT

Institutul de documentare tehnică
BUCUREȘTI
OBMEN - ECHANGE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

★

Vom păstra în veci neștearsă amintirea marelui conducător și învățător al oamenilor muncii din întreaga lume, Iosif Vissarionovici Stalin.

★ ★ ★

ANUL IV

MARTIE 1953

3

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

Pag.

1. *Tovarăşul Iosif Vissarionovici Stalin a încetat din viaţă* 49
2. *Din partea Comitetului Central al Partidului Comunist al Uniunii Sovietice, a Consiliului de Miniştri al U.R.S.S. şi a Prezidiului Sovietului Suprem al U.R.S.S.* 51
3. *Comitetul Central al Partidului Muncitoresc Român, Consiliul de Miniştri al R.P.R. şi Prezidiul Marii Adunări Naţionale a Republicii Populare Române.* 53
4. *Valori medii de H. M. Ionescu* 55
5. *Luminiscenţa de V. Atanasiu* 62
6. *Probleme rezolvate (524, 531, 552, 570, 586)* 69
7. *Probleme propuse* (784—806) 71
8. *Exerciţii şi Probleme propuse pentru şcoala de şapte ani,* 73
9. *Premierea unor colaboratori elevi* 74
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 75

ANUL IV 3 MARTIE 1953

Országos ... Könyvtár TULAJDONA

Institutul de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - СМЕНА

IOSIF VISSARIONOVICI STALIN
1879—1953

TOVARĂȘUL IOSIF VISSARIONOVICI STALIN A ÎNCETAT DIN VIAȚĂ

DIN PARTEA COMITETULUI CENTRAL AL PARTIDULUI COMUNIST AL UNIUNII SOVIETICE, A CONSILIULUI DE MINIȘTRII AL U. R. S. S. ȘI A PREZIDIULUI SOVIETULUI SUPREM AL U.R.S.S.

Către toți membrii partidului, către toți oamenii mnncii din Uniunea Sovietică

Dragi tovarăși și prieteni !

Comitetul Central al Partidului Comunist al Uniunii Sovietice, Consiliul de Miniștri al U.R.S.S. și Prezidiul Sovietului Suprem al U.R.S.S. anunță cu adâncă durere partidul și pe tôți oamenii muncii din Uniunea Sovietică că la 5 Martie, ora 9,50 seara, a încetat din viață după o boală grea Iosif Vissarionovici Stalin, Președintele Consiliului de Miniștri al U.R.S.S. și Secretar al Comitetului Central al Partidului Comunist al Uniunii Sovietice.

A încetat să bată inima lui Iosif Vissarionovici Stalin, tovarășul de luptă și genialul continuator al cauzei lui Lenin, înțeleptul conducător și învățător al Partidului Comunist și al poporului sovietic.

Numele lui Stalin este nespus de drag partidului nostru, poporului sovietic, oamenilor muncii din lumea întreagă. Impreună cu Lenin, tovarășul Stalin a făurit puternicul partid al comuniștilor, l-a educat și l-a oțelit; împreună cu Lenin, tovarășul Stalin a fost inspiratorul și conducătorul Marii Revoluții Socialiste din Octombrie, întemeietorul primului Stat socialist din lume. Continuând opera nemuritoare a lui Lenin, tovarășul Stalin a condus poporul sovietic la victoria de importanță istorică mondială a socialismului în țara noastră. Tovarășul Stalin a condus țara noastră la victoria asupra fascismului în cel de al doilea război mondial, fapt care a schimbat în mod radical întreaga situație internațională. Tovarășul Stalin a înarmat partidul și întregul popor cu programul măreț și clar al construirii comunismului în U.R.S.S.

Moartea tovarășului Stalin, care și-a închinat întreaga sa viață slujirii fără preget a măreței cauze a comunismului, este cea mai grea pierdere pentru partid, pentru oamenii muncii din Țara Sovietică și din toată lumea.

Vestea încetării din viață a tovarășului Stalin va umple de adâncă durere inimile muncitorilor, colhoznicilor, intelectualilor și ale tuturor oamenilor muncii din Patria noastră, inimile ostașilor vitezei noastre armate și ai flotei maritime militare, inimile milioanelor de oameni ai muncii din toate țările lumii. In aceste zile de adâncă durere, toate popoarele țării noastre își strâng și mai mult rândurile în marea și frățeasca lor familie, sub conducerea încercată a Partidului Comunist, făurit și educat de Lenin și Stalin.

Poporul sovietic are o încredere nemărginită și este pătruns de dragoste fierbinte față de scumpul său Partid Comunist, deoarece el știe că legea supremă a întregii activități a partidului este slujirea intereselor poporului.

Muncitorii, colhoznicii, intelectuali sovietici, toți oamenii muncii din țara noastră urmează ferm politica elaborată de partidul nostru, care corespunde intereselor vitale ale oamenilor muncii și care are drept scop întărirea continuă a puterii Patriei noastre socialiste. Justețea acestei politici a Partidului Comunist este verificată în decenii de luptă, ea a dus pe oamenii muncii din Țara Sovietică la victoriile istorice ale socialismului. Insuflețite de această politică, popoarele Uniunii Sovietice, sub conducerea partidului, păşesc ferm înainte spre noi succese ale construcției comuniste în țara noastră.

Oamenii muncii din țara noastră știu că îmbunătățirea continuă a bunei stări materiale a tuturor păturilor populației — muncitori, colhoznici, intelectuali — satisfacerea maximală a nevoilor materiale și culturale mereu crescânde ale întregii societăți, au fost întotdeauna și sunt obiectul grijii deosebite a Partidului Comunist și a Guv ernulu Sovietic.

Poporul sovietic știe că capacitatea de apărare și forța Statului Sovietic cresc și se întăresc, că partidul întărește prin toate mijloacele armata sovietică, flota maritimă militară și organele de informație pentru a ridica în permanență pregătirea noastră pentru o ripostă zdrobitoare oricărui agresor.

Politica externă a Partidului Comunist și a Guvernului Uniunii Sovietice a fost și este politica de neclintit a menținerii și consolidării păcii, a luptei împotriva pregătirii și deslănțuirii unui nou război, politica colaborării internaționale și a dezvoltării legăturilor comerciale cu toate țările.

Popoarele Uniunii Sovietice, credincioase steagului internaționalismului proletar, întăresc și dezvoltă prietenia frățească cu marele popor chinez, cu oamenii muncii din toate țările de democrație populară, legăturile de prietenie cu oamenii muncii din țările capitaliste și coloniale, care luptă pentru cauza păcii, democrației și socialismului.

Dragi tovarăși și prieteni !

Marea forță călăuzitoare și conducătoare a poporului sovietic în lupta pentru construirea comunismului este Partidul nostru Comunist. Unitatea de oțel și coeziunea de monolit a rândurilor partidului constitue principala condiție a puterii și forței sale. Sarcina noastră este de a păstra ca lumina ochilor unitatea partidului, de a-i educa pe comuniști ca luptători politici activi pentru înfăptuirea politicii și a hotărîrilor partidului, de a întări și mai mult legăturile partidului cu toți oamenii muncii, cu muncitorii, colhoznicii, intelectualii, deoarece în această legătură indestructibilă cu poporul rezidă forța și invincibilitatea partidului nostru.

Partidul consideră ca una din sarcinile sale cele mai importante educarea comuniștilor și a tuturor oamenilor muncii în spiritul unei înalte vigilențe politice, în spiritul intransigenței și fermității în lupta împotriva dușmanilor interni și externi.

Comitetul Central al Partidului Comunist al Uniunii Sovietice, Consiliul de Miniștri al U.R.S.S. și Prezidiul Sovietului Suprem al U.R.S.S., adresându-se în aceste zile de adâncă durere partidului și poporului, își exprimă convingerea fermă că partidul și toți oamenii muncii din Patria noastră vor strânge și mai mult rândurile în jurul Comitetului Central și al Guvernului Sovietic, își vor mobiliza toate forțele și energia creatoare pentru măreața cauză a construirii comunismului în țara noastră.

Numele nemuritor al lui Stalin va trăi veșnic în inima poporului sovietic și a întregii omeniri progresiste.

Trăiască măreața, atotbiruitoarea învățătură a lui Marx-Engels-Lenin-Stalin !

Trăiască puternica noastră Patrie Socialistă !

Trăiască eroicul nostru popor sovietic !

Trăiască marele Partid Comunist al Uniunii Sovietice !

Comitetul Central
al Partidului Comunist al Uniunii Sovietice

Consiliul de Miniștri al U.R.S.S.

Prezidiul Sovietului Suprem al U.R.S.S.

5 Martie 1953.

COMITETUL CENTRAL AL PARTIDULUI MUNCITORESC ROMÂN, CONSILIUL DE MINIȘTRI AL R.P.R. ȘI PREZIDIUL MARII ADUNĂRI NAȚIONALE A REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

Către toți membrii Partidului Muncitoresc Român, către toți oamenii muncii din R.P.R.

Dragi tovarăși,

Vestea morții lui Iosif Vissarionovici Stalin — genialul conducător și învățător al oamenilor muncii din lumea întreagă, cel mai bun prieten al poporului român — a zguduit întregul nostru popor și ne-a îndoliat inimile.

Milioanele de muncitori, țărani muncitori, intelectuali, bărbați și femei din patria noastră sunt alături cu trup și suflet, în aceste momente grele, de poporul sovietic și împărtășesc nemărginita lui durere la moartea lui Iosif Vissarionovici Stalin.

Alături de Lenin, tovarășul Stalin a făurit glorioasul Partid Comunist, a condus Marea Revoluție Socialistă din Octombrie, a întemeiat primul stat socialist — cel mai puternic stat din lume.

Tovarășul Stalin a condus opera de construire victorioasă a socialismului în U.R.S.S. și a înarmat partidul comunist și poporul sovietic cu mărețul program de construire a celei mai înalte societăți, comunismul.

Numele tovarășului Stalin va rămâne pe veci legat de victoria istorică a Uniunii Sovietice în cel de al doilea război mondial, victorie care a salvat omenirea de barbaria fascistă.

Mărețele idei staliniste despre pace și prietenie între popoare au inspirat și au dat forță uriașei mișcări a popoarelor pentru apărarea păcii. Geniul marelui Stalin luminează calea spre victorie a partidelor comuniste și muncitorești, a întregii omeniri muncitoare.

Figura măreață a tovarășului Stalin va rămâne veșnic vie în conștiința tuturor oamenilor cinstiți din lumea întreagă.

Dragi tovarăși și prieteni,

Pentru partidul și poporul nostru moartea tovarășului Stalin constitue cea mai grea pierdere.

Poporul român nu va uita niciodată că în momente din cele mai grele ale existenței sale a simțit ajutorul părintesc, salvator, al marelui Stalin. Glorioasele Forțe Armate ale Uniunii Sovietice, sub conducerea tovarășului Stalin, au eliberat patria noastră de sub jugul fascismului cotropitor și al imperialismului înrobitor de popoare. Poporul român a dobândit astfel posibilitatea de a se bucura pentru prima dată în istoria sa de o adevărată independență națională, de a-și lua soarta în propriile mâini și de a construi o viață nouă, liberă și fericită.

Ideile geniale ale tovarășului Stalin, grija și sfaturile sale părintești, ajutorul frățesc al Uniunii Sovietice, au stat și stau la baza tuturor succeselor poporului român și ale minorităților naționale în cucerirea regimului democrat-popular, a marilor drepturi și libertăți democratice, în construirea noii economii și culturi socialiste, în consolidarea puterii populare, a independenței și suveranității de Stat a R.P.R.

Fiecare cetățean cinstit al patriei noastre știe că el este astăzi un om liber într'o țară liberă, că poporul nostru — stăpân pe bogățiile țării și pe destinele lui — își construește o viață nouă, datorită lui Iosif Vissarionovici Stalin.

De aceea, pe cât de mare este durerea noastră la moartea iubitului prieten și părinte al poporului nostru, pe atât de fierbinte este recunoștința noastră față de tovarășul Stalin și hotărîrea de a merge cu fermitate pe drumul ce ni l-a luminat cu geniul său nemuritor.

Tovarăși muncitori, țărani, intelectuali, ostași, bărbați și femei, tineri — cetățeni ai R.P.R.,

C.C. al P.M.R., Consiliul de Miniștri și Prezidiul Marii Adunări Naționale a R.P.R. își exprimă convingerea că oamenii muncii dela orașe și sate vor munci neobosit pentru întărirea puterii populare

și a alianței dintre clasa muncitoare și țărănimea muncitoare — baza regimului democrat-popular; își vor întări unitatea și coeziunea și vor strânge rândurile în jurul Partidului Muncitoresc Român și al Guvernului R.P.R. în lupta pentru izbânda cauzei socialismului; vor întări capacitatea de apărare a țării și Forțele Armate ale Republicii Populare Române; își vor ascuți vigilența împotriva dușmanilor interni și externi ai poporului român, pentru a zdrobi orice încercare de agresiune îndreptată împotriva independenței și suveranității de Stat a R.P.R.

Poporul nostru este pe deplin conștient că prietenia și alianța dintre R.P.R. și U.R.S.S. constitue garanția sigură a libertății, independenței și viitorului fericit al patriei. De aceea, întărirea necontenită a prieteniei veșnice, a alianței și colaborării frățești dintre poporul român și marele popor sovietic constitue o datorie sfântă a fiecărui comunist, a fiecărui om al muncii, a fiecărui cetățean ce-și iubește patria.

In lupta pentru realizarea sarcinilor istorice care stau în fața noastră, întărirea necontenită a Partidului Muncitoresc Român — forța conducătoare în Republica Populară Română — este o condiție de bază a victoriei. Sarcina de cinste a tuturor membrilor de partid este să apere ca lumina ochilor unitatea rândurilor partidului, să întărească legăturile partidului cu massele, să se strângă și mai puternic în jurul Comitetului Central, să-și însușească fără încetare ideile atotbiruitoare ale lui Marx-Engels-Lenin-Stalin și experiența revoluționară a gloriosului Partid Comunist al Uniunii Sovietice, să nu se abată nicio clipă dela învățătura tovarășului Stalin.

C.C. al P.M.R., Consiliul de Miniștri și Prezidiul Marii Adunări Naționale a R.P.R. au convingerea că poporul nostru va merge cu hotărîre nestrămutată înainte spre victoria definitivă a socialismului în patria noastră, contribuind la întărirea lagărului păcii și cucerirea păcii trainice în întreaga lume, pe calea puternic luminată de geniul marelui Stalin.

Vom păstra în veci neștearsă amintirea marelui conducător și învățător al oamenilor muncii din întreaga lume, Iosif Vissarionovici Stalin.

Trăiască atotbiruitoarea învățătură a lui Marx-Engels-Lenin-Stalin!

Trăiască Partidul Comunist al Uniunii Sovietice — farul călăuzitor al tuturor partidelor comuniste și muncitorești!

Trăiască invincibila Uniune Sovietică — constructoarea comunismului, bastionul păcii și libertății popoarelor!

Trăiască Partidul Muncitoresc Român!

Trăiască scumpa noastră patrie, Republica Populară Română!

Trăiască prietenia veșnică, alianța și colaborarea frățească între poporul român și eroicul popor sovietic!

Comitetul Central
al Partidului Muncitoresc Român

Consiliul de Miniștri
al Republicii Populare Române

Prezidiul Marii Adunări Naționale a Republicii Populare Române

6 Martie 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.
Anul IV, Nr. 3 Martie 1953

VALORI MEDII

H. M. IONESCU

Introducere

In operaţiunile care se ivesc în ştiinţele aplicate se foloseşte în mod curent noţiunea de « valoare medie », caracterizând prin aceasta un întreg ansamblu de valori. Aşa de pildă, salariul mediu pentru un muncitor dintr'o anumită întreprindere caracterizează într'o primă aproximaţie ordinul de mărime al salariului pe care-l primesc muncitorii acelei întreprinderi. Se înţelege, că între salariul mediu şi salariile efectiv încasate de fiecare muncitor vor exista diferenţe şi numai în unele cazuri excepţionale salariile efective coincid cu media lor. Intâlnim deasemenea noţiunile de temperatură medie, viteză medie, producţie medie, preţul mediu al unui anumit fel de marfă pe un interval determinat de timp, etc. Aceste mărimi medii, capabile să reprezinte într'o măsură satisfăcătoare o serie de valori sunt folosite pe o scară întinsă aşa încât cunoaşterea lor trebue să facă parte din bagajul de cunoştinţe generale ale fiecăruia şi îndeosebi al celor care trebue să aplice în mod corect principiile matematicei la nevoile practice.

In articolul de faţă se face o introducere elementară în teoria mediilor, folosind în mod special noţiunile de matematică din şcoala medie. Cu aceste cunoştinţe, evident nu vom putea prezenta decât un aspect parţial al problemei, suficient însă pentru a pune în adevărata lumină importanţa unui studiu sistematic în această direcţie.

Acel care s'a ocupat pentru prima dată de problema mediilor, a fost matematicianul francez Cauchy. El a adus importante contribuţii de ordin teoretic şi a reuşit într'o măsură redusă să definească noţiunea complect arbitrară de valoare medie. Cea mai generală însă şi cea mai precisă definiţie a noţiunii de medie a fost dată aproape în acelaş timp (1929) de către Boiarski (U.R.S.S.) şi Chisini (Italia). In partea finală a articolului se arată esenţa acestei teorii căreia îi vom spune « definiţia Boiarski-Chisini ». In virtutea acestei definiţii valoarea medie este impusă de natura problemei, eliminându-se astfel arbitrarul în alegerea mediei. Pentru studiul mediilor cu ajutorul cunoştinţelor mai înalte de matematici au adus contribuţii însemnate o serie de matematicieni de seamă ca Nagumi, Colmogorov şi alţii.

§ 1. In aritmetica elementară se dă următoarea definiţie: « Suma mai multor numere, împărţită la numărul lor, se numeşte *media aritmetică* a acelor numere ». Să considerăm deci şirul de numere

$$19,\ 21,\ 22,\ 18 \qquad (1.1)$$

pe care le vom numi în general « *valori* ».

Media lor aritmetică, conform definiţiei de mai sus, va fi

$$M = \frac{19 + 21 + 22 + 18}{4} = 20.$$

In mod analog, media aritmetică a şirului de valori

$$18,\ 21,\ 19,\ 22,\ 19,\ 18,\ 18,\ 19,\ 19,\ 21 \qquad (1.2)$$

va fi dată de formula

$$M' = \frac{18+21+19+22+19+18+18+19+19+21}{10} = 19{,}4$$

sau încă, grupând valorile egale între ele:

$$M' = \frac{3 \cdot 18 + 4 \cdot 19 + 2 \cdot 21 + 1 \cdot 22}{3+4+2+1} = 19{,}4$$

Comparând formulele cu care am calculat mediile M şi M' constatăm că în media M' valorile 18, 19 şi 21 se repetă respectiv de 3, 4 şi 2 ori iar valoarea 22 este simplă în timp ce în media M valorile 18, 19, 21 şi 22 sunt toate simple. Numărul care arată de câte ori se repetă fiecare valoare se numeşte *ponderea valorii respective*. Aşadar în M valorile 18, 19, 21 şi 22 au ponderile 1, 1, 1, 1, iar în M' ponderile 3, 4, 2, 1. Deşi valorile sunt aceleaşi, mărimile ponderilor fac ca mediile lor aritmetice să fie diferite între ele.

Media M se numeşte *media aritmetică simplă* a valorilor 18, 19, 21 şi 22, iar M', *media aritmetică ponderată* a acelorași valori, cu ponderile respective 3, 4, 2, 1.

Tot în aritmetică se definește media armonică a șirului (1.1) prin relația

$$H = \frac{4}{\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{18}}$$

Media armonică a șirului (1.2) va fi deci

$$H' = \frac{3+4+2+1}{\frac{3}{18}+\frac{4}{19}+\frac{2}{21}+\frac{1}{22}}$$

Media H se numește *media armonică simplă* iar H' *media armonică ponderată* a valorilor 18, 19, 21 și 22.

Tot în aritmetică și în geometria elementară întâlnim relații de forma

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

de unde se deduce $x = \sqrt{a \cdot b}$. Se spune că x este *media geometrică* a numerelor pozitive a și b, deci media geometrică a numerelor 5 și 9 de exemplu este rădăcina patrată din produsul lor: $\sqrt{5 \cdot 9}$. Extinzând această definiție pentru mai multe valori, vom numi media geometrică a valorilor (1.1) expresia

$$G = \sqrt[4]{18 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 22}$$

iar media geometrică a șirului (1.2) va fi

$$G' = \sqrt[10]{18^3 \cdot 19^4 \cdot 21^2 \cdot 22}$$

Media G se numește *media geometrică simplă* iar G' *media geometrică ponderată* a valorilor 18, 19, 21 și 22 cu ponderile respective 3, 4, 2 și 1.

Din cele arătate până aici rezultă că valorile medii M, H, G, — precum și altele care din necesități de ordinul cel mai practic au fost studiate — sunt niște numere atașate unei mulțimi finite de valori. Șirurile (1.1) și (1.2) se pot cencepe ca fiind generate de o cantitate variabilă x care ia succesiv valorile din aceste șiruri, fiecare socotindu-se cu pondera sa. Prin urmare, mărimea x este caracterizată prin mulțimea valorilor ce le ia și în corespondență cu acestea, prin ponderile respective.

Să notăm în general prin

$$x_1, x_2, \ldots x_n \tag{1.3}$$

mulțimea valorilor pe care le poate lua variabila x și prin

$$p_1, p_2, \ldots p_n \tag{1.4}$$

ponderile respective ale acestor valori.

In baza definițiilor date mai înainte, mediile simple ale șirului (1.3) vor fi

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ H &= \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \\ G &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

iar mediile ponderate sunt date de formulele

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \\ H' &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i}} \\ G' &= \sqrt[\Sigma p_i]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}} \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

I. *Observație.* Mediile simple M, H, G se deduc din mediile ponderate M', H', G' particularizând ponderile și anume egalându-le cu aceiași pondere p, adică făcând

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p.$$

Reciproc, mediile ponderate M', H', G' se deduc din M, H, G grupând valorile x_i egale între ele. Această observație este utilă deoarece ea ne permite să stabilim unele proprietăți ale mediilor raționând asupra formelor mai simple M, H, G.

II. *Proprietate fundamentală.* Mediile M, H, G sunt cuprinse între cea mai mică și cea mai mare din valorile (1.3).

Să presupunem valorile șirului (1.3) aranjate în ordinea lor de mărime și fie

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

această ordine.

In formula $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ înlocuind în partea doua valorile x_i $(i = 2, 3, \ldots n)$ prin valorea mai mică x_1 avem

$$M = \frac{1}{n}(x_1 + x_1 + \ldots + x_1) = \frac{nx_1}{n} = x_1.$$

Dacă din contră înlocuim valorile x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ prin x_n adică printr'o valoare mai

mare, obținem $M \leqslant x_n$, așa încât pentru media aritmetică avem dubla inegalitate

$$x_1 \leqslant M \leqslant x_n$$

egalitatea având loc când toate valorile sunt egale între ele. In același mod se demonstrează inegalitățile pentru mediile H și G.

III. *Relația de mărime între mediile M, H și G.* Subsistă întotdeauna inegalitățile

$$H \leqslant G \leqslant M. \qquad (1.7)$$

Să verificăm în primul rând inegalitatea $G \leqslant M$, adică media aritmetică nu poate fi inferioară mediei geometrice:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \qquad (1.8)$$

Acestei inegalități s'au dat mai multe demonstrații cu caracter elementar. Vom schița însă o demonstrație simplă dată de către Cauchy, remarcabilă prin ingeniozitatea ei. Mai întâi, observăm că egalitatea are loc atunci când valorile x_i sunt egale între ele

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$$

deoarece partea întâi devine $\sqrt[n]{x^n} = x$, iar partea doua

$$\frac{x + x + \dots + x}{n} = \frac{nx}{n} = x.$$

Pentru verificarea inegalității (1.8) în cazul general când valorile x_i nu sunt toate egale între ele procedăm prin inducție completă asupra numărului valorilor x_i. Reamintim pe scurt principiul acestei metode: Dacă două expresii matematice $E_1(n)$ și $E_2(n)$ depinzând de numărul natural n sunt egale pentru $n = 1$ (sau pentru primele valori ale lui n), adică $E_1(1) = E_2(1)$, admitem că $E_1(n) = E_2(n)$ și demonstrăm că $E_1(n+1) = E_2(n+1)$ atunci expresiile E_1 și E_2 sunt identic egale pentru orice număr natural. Această metodă se sprijină direct pe una din cele 5 axiome ale lui Peano care stau la baza studiului mulțimei numerelor naturale 1, 2, 3, $\dots n, \dots$. Mai departe, vom aplica această metodă la demonstrarea unei importante identități.

Cauchy a demonstrat inegalitatea (1.8) utilizând metoda de inducție în sens invers celui arătat mai sus și anume a presupus-o adevărată pentru $n+1$ valori și a verificat-o pentru n.

Când $n = 2$, inegalitatea

$$\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (1.9)$$

rezultă imediat din identitatea

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 = x_1 x_2$$

suprimând scăzătorul din prima parte, deci

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geqslant x_1 x_2$$

de unde, extrgând rădăcina patrată (ambele părți fiind pozitive), rezultă inegalitatea (1.9).

Pentru $n = 4$ avem

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{x_3 x_4}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2} \leqslant \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}$$

(acestea în baza inegalității (1.9)). Prin urmare găsim

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

In mod asemănător se demonstrează inegalitatea (1.8) pentru $n = 8, 16, \dots$ și în general pentru un număr de valori egale cu 2^m. Pentru n oarecare însă, vom considera șirul de valori

$$x_1 x_2, \dots x_n, \quad x_{n+1} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Deoarece numerele x_i, $(i = 1, 2 \dots n)$ nu sunt toate egale între ele rezultă că în general $x_i \neq x_{n+1}$ pentru $i = 1, 2, \dots n$. Admitem adevărată inegalitatea

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \qquad (1.10)$$

și să demonstrăm că subsistă (1.8).

Folosind proprietățile operațiilor cu radicalii aritmetici vom putea scrie

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}} = \sqrt[n+1]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{n+1}{n}}} =$$

$$= \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

deci, înlocuind în (1.10) obținem

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n+1}$$

de unde efectuând calculele se găsește

$$n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

adică inegalitatea ce trebuia verificată (1.8).

Verificarea inegalității $H \leqslant G$. Să aplicăm inegalitatea (1.8) șirului de numere pozitive

$$\frac{1}{x_1}, \quad \frac{1}{x_2}, \dots \frac{1}{x_n}.$$

Vom avea relația

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n},$$

sau încă

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} \leqslant \frac{1}{\left(\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dots+\dfrac{1}{x_n}}\right)}$$

Ţinând seama de formulele (1.5) avem $\frac{1}{G} \leqslant \frac{1}{H}$, deci $H \leqslant G$, prin urmare inegalităţile (1.7) sunt generale. In baza observaţiei I rezultă că avem şi relaţiile $H' \leqslant G' \leqslant M'$.

§ 2. *Medii de ordin superior.* Problemele practice precum şi cele de ordin teoretic au sugerat ideea unei generalizări a noţiunii de medie. Astfel media simplă $M = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ a fost extinsă asupra puterii valorilor x_i aşa încât s'au obţinut mediile de forma

$$M_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k}{n}} \qquad (2.1)$$

numite medii aritmetice de ordinul k ale valorilor $x_1, x_2, \dots x_n$. Luând $k = 1$ obţinem media simplă M şi pe care pentru uniformitatea scrisului o notăm M_1. Mediile $M_2, M_3, \dots M_n, \dots$ se numesc medii de ordin superior; acestea împreună cu M_1, formează şirul de medii

$$M_1, M_2, \dots M_n, \qquad (2.2)$$

al valorilor $x_1, x_2, \dots x_n$.

In legătură cu şirul de medii (2.2) ne punem două probleme şi anume:

I. *Extinderea acestui şir pentru valori negative şi zero ale indicelui* i.

Scriind media (2.1) sub forma

$$M_k = \left(\frac{x_1^k + x_2^b + \dots + x_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

să facem în această formulă $k=0$. Vom obţine pentru media M_0 o expresie de forma 1^∞, adică o expresie căreia în matematica elementară nu i-se atribue nici un sens. In matematicile superioare însă, o asemenea expresie se poate calcula. In cazul de faţă putem afirma că valoarea M_0 coincide cu media geometrică G *).

*) Luând logaritmii neperieni obţinem $LM_k = \frac{L\sum x_i^k - Ln}{k}$. Când $k \to 0$, aplicând regula lui Höpital obţinem:

$$\lim_{k\to 0} LM_k = \lim_{k\to 0} \frac{\sum x_i^k Lx_i}{\sum x_i^k} = \frac{\sum Lx_i}{n}$$

deci $LM_0 = L(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$, adică $M_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$.

Pentru $k = -1$ obţinem media

$$M_{-1} = \left(\frac{x_2^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1}}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dots+\dfrac{1}{x_n}}{n}\right)} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dots+\dfrac{1}{x_n}}$$

Aşadar $M_{-1} = H$, adică media armonică, şi aşa mai departe.

II. *Relaţia de mărime între mediile* M_i. Din calculele făcute mai înainte rezultă inegalităţile $M_{-1} \leqslant M_0 \leqslant M_1$. Putem încă completa acest şir cu inegalitatea $M_1 \leqslant M_2$. Intr'adevăr, această inegalitate este echivalentă cu relaţia $n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geqslant (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$, pentru verificarea căreia folosim identitatea lui Lagrange care pentru n perechi de numere *)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

*) Identitatea lui Lagrange joacă în ştiinţele aplicate un rol important, deaceea este bine să se reţină modul ei de scriere cu ajutorul schemei de mai sus. Pentru completare, vom da o demonstraţie elementară a ei prin inducţie. Când $n = 1$ avem $x_1^2 y_1^2 = (x_1 y_1)^2$ deci identitatea se verifică. Admitem identitatea pentru n natural oarecare:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum_{i\neq k}^{n} (x_i y_k - x_k y_i)^2 \qquad (a)$$

şi să demonstrăm că ea subsistă şi pentru $(n+1)$ perechi, adică avem

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i\right)^2 + \sum_{i\neq k}^{n+1} (x_i y_k - x_k y_i)^2 \qquad (b)$$

Introducem notaţiile:

$$\sum_1^n x_i^2 = X_n; \quad \sum_1^n y_i^2 = Y_n; \quad \sum_1^n x_i y_i = Z_n,$$

$$\sum_{i\neq k}^{n} (x_i y_k - x_k y_i)^2 = Tn. \qquad (c)$$

Prin ipoteză avem egalitatea $X_n Y_n = Z_n^2 + Tn$, care rezultă din (a). Cu notaţiile (c) egalitatea (b) se poate scrie

$$X_n Y_n + X_n Y_{n+1}^2 + Y_n X_{n+1} + x_{n+1}^2 Y_{n+1}^2 =$$

$$= Z_n^2 + 2Z_n x_{n+1} Y_{n+1} + x_{n+1}^2 Y_{n+1}^2 + T_n +$$

$$+ x_{n+1}^2 Y_n + Y_{n+1}^2 X_n - 2Z_n x_{n+1} Y_{n+1}$$

Ţinând seama de relaţia precedentă şi făcând reducerile necesare se găseşte o identitate, ceeace demonstrează valabilitatea identităţii lui Lagrange. Cu ajutorul matricilor sau al calculului vectorial acestei identităţi se dau demostraţii mult mai simple.

se scrie în modul următor.

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) =$$
$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 +$$
$$+ (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 +$$
$$+ \ldots + (x_1 y_n - x_n y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 +$$
$$+ \ldots + (x_2 y_n - x_n y_2)^2 + \ldots +$$
$$+ (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1})^2.$$

Făcând aici $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$ obținem

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + \sigma_n$$

unde $\sigma_n = (x_1 - x_2)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 \geqslant 0$ deoarece în general $x_i \neq x_k$.

Suprimând σ_n din partea doua rămâne

$$n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

adică relația ce trebuia să demonstrăm.

Așa dar avem relațiile $M_{-1} \leqslant M_0 \leqslant M_1 \leqslant M_2$ adică mediile M_i cresc odată cu indicele i. Putem afirma că în general avem relația

$$M_i \leqslant M_k \tag{2.3}$$

dacă $i < k$. Demonstrațiile cu caracter elementar date până aici nu ne permit a demonstra inegalitatea generală (2.3). In acest scop se folosește următoarea inegalitate:

$$F\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 p_2 + \ldots + p_n}\right) \leqslant \frac{p_1 F(x_1) + p_2 F(x_2) + \ldots + p_n F(x_n)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \tag{2.4}$$

numită inegalitatea Holder-Jensen a cărei demonstrație depășește cadrul prezentului articol. In această relație numerele p_i și x_i se presupun pozitive iar F o funcție convexă regulată *), de variabilă x pentru orice $x > 0$.

Funcțiunea particulară $F(x) = x^k$ îndeplinește toate condițiunile cerute de valabilitatea inegalității (2.4); dacă în (2.4) facem $F(x) = x^k$ obținem:

$$\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^k \leqslant \frac{p_1 x_1^k + p_2 x_2^k + \ldots + p_n x_n^k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

în care, schimbând x_i prin x_i^t:

$$\left(\frac{p_1 x_2^t + p_2 x_2^t + \ldots + p_n x_n^t}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right)^k \leqslant \frac{p_1 x_1^t + p_2 x_2^t + \ldots + p_n x_n^t}{p_1 + p + \ldots + p_n}$$

Dacă extragem rădăcina de ordinul tk se găsește relația

$$\sqrt[t]{\frac{p_1 x_1^t + p_2 x_2^t + \ldots + p_n x_n^t}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}} \leqslant \sqrt[tk]{\frac{p_1 x_1^{tk} + p_2 x_2^{tk} + \ldots + p_n x_n^{tk}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}}$$

adică $M_t \leqslant M_{tk}$ pentru orice $k > 1$ și t pozitiv. Deci pentru i și k pozitivi inegalitatea (2.3) este demonstrată. In mod analog se demonstrează și pentru i, k negativi introducând în inegalitatea generală x_i^{-t} în loc de x_i.

Concluzii generale

I. Mediile studiate până acum posedă o serie de proprietăți comune. Ele fac parte din clasa mediilor definite printr'o funcțiune oarecare $\varphi(x)$ de un singur argument, astfel:

$$\varphi(M) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{2.5}$$

Particularizând funcția φ obținem mediile cercetate mai înainte. Astfel, pentru $\varphi(x) = x$ avem:

$$\varphi(M) = M, \quad \varphi(x_i) = x_i$$

deci

$$M = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

adică se obține media aritmetică ponderată.

Pentru $\varphi(x) = x^2$ rezultă $\varphi(M) = M^2$, $\varphi(x_i) = x_i^2$ deci

$$M^2 = \frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

de unde, rezolvând în raport cu M:

$$M = \sqrt{\frac{\Sigma p_i x_i^2}{\Sigma p_i}} = M_2$$

deci media aritmetică de ordinul al doilea. In general pentru $\varphi(x) = x^t$ obținem media de ordinul t.

*) Funcția $F(x)$ se numește convexă în intervalul (a, b) dacă $\frac{1}{2}[F(x_1) + F(x_2)] \geqslant F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ pentru orice x din $(a\ b)$.

Când $\varphi(x) = \log x$ vom găsi

$$\log M = \frac{\Sigma p_i \log x_i}{\Sigma p_i} = \frac{1}{\Sigma p_i} \log \left(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}\right) =$$

$$= \log \left(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_i}}$$

de unde rezultă media geometrică ponderată

$$M = \sqrt[\Sigma p_i]{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}} = G'.$$

Pentru $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ obținem media armonică și așa mai departe.

§ 3. *Definiția Chisini-Boiarski.* Așa după cum am arătat în introducere, noțiunea de valoare medie se prezintă în mod natural în cele mai variate probleme de ordin practic. Natura unei asemenea probleme impune însă utilizarea mediei corespunzătoare. Pentru a arăta aceasta să considerăm din nou șirul (1.3) cu ponderile respective date de șirul (1.4), care definesc variabila x.

Definiția I. Se numește proprietate determinantă a variabilei x, acea proprietate legată de valorile șirului (1.3), care rămâne invariabilă la diferitele variații ale valorilor x_i.

Definiția II. Se numește media variabilei x, după proprietatea ei determinantă, acea valoare M a lui x care prin substituția $x_i = M$, nu-i modifică proprietatea determinantă.

Aceste două definiții conțin esența teoriei Chisini-Boiarski asupra valorilor medii. In baza primei definiții rezultă că proprietatea determinantă a variabilei x se poate exprima ca o funcțiune de valorile pe care aceasta le poate lua; fie $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$ această funcțiune. Din definiția doua, rezultă imediat ecuația ce determină media M:

$$\Phi(M, M, \dots M) = \Phi(x_1, x_2, \dots x_n) \quad (3.1)$$

Această teorie se va fixa mai bine examinând câteva probleme simple.

1°. O uzină produce în prima lună a trimestrului T_1 tone de fontă, în luna doua T_2 tone și în luna treia T_3 tone de fontă. Să se calculeze producția medie lunară pentru trimestrul respectiv.

Variabila în această problemă este T producția lunară de fontă; ea poate lua valorile T_1, T_2, T_3. Proprietatea determinantă este producția totală pe trimestru, care trebue să rămână aceiași oricare ar fi valorile luate de T_1, T_2, T_3, deci

$$\Phi(T_1, T_2, T_3) = T_1 + T_2 + T_3.$$

Făcând $T_i = M$, $(i = 1, 2, 3)$, media lunară M se determină din relația

$$M + M + M = T_1 + T_2 + T_3$$

adică $M = \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3)$, deci media aritmetică simplă.

2°. Se topesc 4 aliaje de aur cu titlurile t_1, t_2, t_3, t_4, având greutățile respective G_1, G_2, G_3 și G_4. Să se afle titlul noului aliaj.

Variabila este t, titlul care ia valorile t_1, t_2, t_3, t_4 cu ponderile G_1, G_2, G_3, G_4. Prorpietatea determinantă impune ca să menținem constantă cantitatea de aur dinainte și după topire; aceasta se obține făcând suma $\sum_{i=1}^{4} G_i t_i$, deci

$$\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4) = G_1 t_1 + G_2 t_2 + G_3 t_3 + G_4 t_4$$

de unde

$$M \sum_{i=1}^{4} G_i = \sum_{i=1}^{4} G_i t_i.$$

Media valorilor t_i în asemenea probleme va fi deci o medie artimetică ponderată a titlurilor prin greutățile respective

$$M = \frac{\Sigma G_i t_i}{\Sigma G_i}$$

3°. In industria textilă se face câtul dintre lungimea unui fir de tors (în metrii) și greutatea firului (în grame). Acest raport se numește *numărul tortului*, și el variază pe diferitele porțiuni ale firului. Presupunând că pe porțiunile

$$l_1, l_2, \dots l_n$$

numerele corespunzătoare sunt

$$N_1, N_2, \dots N_n.$$

să se calculeze numărul corespunzător bucății întregi $l_1 + l_2 + \dots l_n$.

Variabila N ia valorile N_i $(i = 1, 2, \dots n)$. Proprietatea determinantă cere ca greutatea totală a firului să rămână aceeași, deci

$$\Phi(N_1, N_2, \dots N_n) = g_1 + g_2 + \dots + g_n$$

unde g_i este greutatea porțiunii de lungime l_i. Cum prin definiție $l_i/g_i = N_i$ rezultă $g_i = l_i/N_i$, deci

$$\Phi(N_1, N_2, \dots N_n) = \frac{l_1}{N_1} + \frac{l_2}{N_2} + \dots + \frac{l_n}{N_n}.$$

Media căutată se calculează din ecuația

$$\frac{\Sigma l_i}{M} = \sum \frac{l_i}{N_i}$$

adică obținem media armonică ponderată

$$M = \frac{\Sigma l_i}{\sum \frac{l_i}{N_i}}$$

4°. O mașină consumă pe unitatea de timp o cantitate de benzină proporțională cu patratul vitezei. In intervalele de timp $t_1, t_2, \dots t_n$ mașina merge cu vitezele $v_1, v_2, \dots v_n$. Se cere viteza medie ca în același timp $t = \Sigma t_i$ să consume aceiași cantitate de benzină.

Variabila v ia valorile v_i $(i = 1, 2, \ldots n)$. Proprietatea determinantă este cantitatea de benzină consumată, dată de formula $\sum_{i=1}^{n} k v_i^2 t_i$, unde k este un factor de proporționalitate. Funcția determinantă va fi deci

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots v_n) = k \sum v_i^2 t_i$$

deci media M se deduce din ecuația

$$k \sum_{i=1}^{n} M^2 t_i = k \sum_{i=1}^{n} v_i^2 t_i$$

adică media aritmetică de ordinul al doilea

$$M = \sqrt{\frac{\sum v_i^2 t_i}{\sum t_i}}.$$

Problemele 3° și 4° se găsesc propuse în cursul de Statistică Matematică al lui V. Romanovski, editat în limba rusă.

Propunem cititorilor pentru rezolvare, următoarele probleme simple:

1° Prețul unui kg din marfa A a fost pe lunile *Oct.* și *Nov.* 1952 de 14 lei, iar în luna Dec. s'a redus la 12,30 lei. Știind că în primele două luni s'au vândut 1200 kgr iar în luna Decembrie 820 kg. să se determine prețul mediu al mărfii A pe trimestrul al patrulea.

2° In problema precedentă, se cunosc sumele realizate din vânzările pe Octombrie și Noembrie, în total 16 800 lei iar în luna Decembrie 10 000 lei. Să se afle prețul mediu trimestrial. (R. Media indicată este o medie armonică; să se arate din ce cauză media aritmetică ponderată nu convine acestui gen de probleme).

3° Producția unei uzine crește în interval de 4 luni astfel: In luna doua cu 2% față de prîma lună, în luna treia cu 1,3% față de luna doua și în luna a patra cu 1,1% față de luna treia. Să se calculeze creșterea medie lunară, cunoscând producția de 9 580 tone din prima lună. (R: Se va găsi o medie geometrică).

4° Variabila x ia valorile i $(i = 0, 1, \ldots n)$ cu ponderile $C_n^i a^{n-i} b^i$ unde a, b sunt numere pozitive iar C_n^i reprezintă simbolul combinărilor. Să se demonstreze că media aritmetică a acestor valori este egală cu $na/a + b$.

I. *Concluzia generală.* Din cele arătate până acum, rezultă că atunci când proprietatea determinantă a variabilei x este exprimată printr'o funcțiune de forma

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i) \qquad (3.2)$$

media sa M se determină cu ajutorul ecuației

$$\varphi(M) = \frac{\sum p_i \varphi(x_i)}{\sum p_i} \qquad (3.3)$$

Notând $\varphi(M) = y$ rezolvarea ecuației (3.3) este echivalentă cu determinarea funcției inverse a funcției φ, deci notând $\varphi^{-1}(y)$ funcția inversă a acesteia vom avea

$$M = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum p_i (x_i)}{\sum p_i}\right] \qquad (3.4)$$

Se ajunge în acest mod la șirul de medii (2.2) pe care l-am studiat la început. Astfel, dacă luăm $\varphi(x) = x^k$, funcția inversă a funcției $\varphi(x)$ este

$$x = \varphi^{-1}(y) = \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{\frac{\sum p_i x_i^k}{\sum p_i}} \text{ deci}$$

$$M = \sqrt[k]{\frac{\sum p_i x_i^k}{\sum p_i}}$$

adică media aritmetică de ordinul k. Pentru $\varphi(x) = y = \log x$ obținem media geometrică ponderată ș. a. m. d. De aici se poate vedea însemnătatea practică a ordinei ce s'a pus în utilizarea valorilor medii prin teoria elaborată de către Boiarski și Chisini.

Mediile care au format obiectul cercetărilor din acest articol formează, după cum am accentuat la timp, o clasă aparte de valori medii; ele sunt însă cele mai des întâlnite în aplicațiunile cele mai variate. Pentru un studiu mai înalt al clasei de medii de care ne-am ocupat acum precum și alte medii tot atât de importante, cititorul va găsi materialul necesar în tratatele de specialitate.

In încheiere, vom enunța o serie de proprietăți ale mediilor, în general:

1° O medie se numește *internă*, dacă este situată între valorile extreme ale șirului x_i;

2. *Monotonă*, când crește odată cu creșterea oricărei valori x_i;

3° *Asociativă*, dacă putem înlocui o parte din valorile x_i cu media lor particulară fără a schimba valoarea medie. Fie de exemplu valorile 2, 3, 4, 6, 5; media lor aritmetică este 4. Inlocuind primele trei prin media lor 3, obținem media $\frac{3+3+3+6+5}{5} = 4$, deci aceiași medie.

4°. *Simetrică*, dacă funcția determinantă $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ este o funcțiune simetrică în variabilele $x_1, x_2, \ldots x_n$.

5° *De o singură valoare*, atunci când egalitatea $x_i = a$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots n$, atrage după sine $M = a$.

6° *Omogenă*, dacă funcţia care o determină este omogenă şi de gradul întâi; şi

7° *Translativă* dacă subsistă relaţia

$$F(x_1 + a, \quad x + a, \ldots x_n + a) =$$

$$= F'(x_1, x_2, \ldots x_n) + a.$$

Media aritmetică, ne putem convinge uşor, posedă toate aceste proprietăţi.

Noţiunile elemntare expuse până aici cu privire la valorile medii se pot încă completa cu o categorie importantă de medii utilizate în mod curent în statistică; de asemenea este interesant să se cunoască şi procedeele simplificate pentru calculul practic al valorilor medii. Noţiunile pe care le-am dat însă, sperăm că sunt suficiente pentru o vedere de ansamblu a problemei mediilor.

LUMINISCENŢA

VIRGIL ATANASIU

Luminiscenţa, sau cum i se mai spune — dealtfel nu tocmai corect — radiaţia rece a corpurilor, constă în faptul că sub acţiunea luminii, unele corpuri solide, lichide sau gazoase emit o radiaţie caracteristică pentru ele, care se numeşte radiaţie de luminiscenţă.

S. I. Vavilov

Fenomenul de luminiscenţă constă în absorbţia luminii excitatoare şi emisia luminiscenţei, radiaţie luminoasă a cărei compoziţie este diferită de compoziţia luminii absorbite.

Această schimbare a luminii — cea emisă faţă de cea absorbită — este o dovadă a celei mai strânse interacţiuni între lumină şi corp, datorită căruia fapt, studiul luminiscenţei permite stabilirea celor mai subtile proprietăţi şi ale luminii şi ale corpului.

Unele aspecte ale luminiscenţei — radiaţia rece a unor corpuri solide şi lichide — au fost cunoscute de foarte multă vreme. Cu toate acestea însă, timp de câteva secole cunoaşterea acestui fenomen n'a depăşit limitele unor observaţii izolate şi a unor fapte experimentale însoţite de tot felul de reguli semiempirice şi ipoteze contradictorii.

Cel care s'a ocupat încă din primii ani ai activităţii sale ştiinţifice — acum mai bine de trei decenii — cu studiul acestui fenomen a fost academicianul sovietic S. I. Vavilov. Pe atunci nu exista încă o precizare ştiinţifică, nici a noţiunii însăşi de luminiscenţă şi ca atare nu se putea răspunde la întrebările: ce este luminiscenţa, care sunt proprietăţile ei principale, şi prin ce se deosebeşte ea de alte aspecte ale radiaţiilor.

După îndelungate cercetări, S. I. Vavilov a dat o definiţie a luminiscenţei, care este valabilă şi în prezent: «luminiscenţă se numeşte un exces de emisie de lumină faţă de radiaţia termică a unuia şi aceluiaşi corp, într'un domeniu spectral dat şi la o temperatură dată, dacă acest exces are o durată finită, adică nu se întrerupe îndată după încetarea cauzei care l-a provocat».

Definiţia dată de S. I. Vavilov permite, având în vedere anumite fapte care pot fi măsurate, să se deosebească luminiscenţa de radiaţie termică, de lumină rezultată prin dispersie şi de alte fenomene luminoase.

Astăzi înţelegem prin luminiscenţă emisia de radiaţie luminoasă, vizibilă sau invizibilă, diferită de emisia termică. Excitarea izvorului luminiscent se poate obţine: printr'o descărcare electrică în gaze (luminiscenţă electrică), printr'o reacţie chimică (chemiluminiscenţă), prin iluminarea cu radiaţii de lungime de undă convenabilă (fotoluminiscenţă), prin frecare (triboluminiscenţă).

Fotoluminiscenţa este emisia de lumină a unor substanţe luminate cu radiaţie de lungime de undă convenabilă. Dacă emisia încetează odată cu încetarea excitaţiei luminoase, fenomenul se numeşte

deobicei *fluorescență*, iar dacă emisia continuă și după încetarea excitației, el se numește *fosforescență*. In cazul fluorescenței, durata de emisie depinde numai de probabilitatea tranzițiilor spontane energetice din atomul sau din molecula emițătoare, ceea ce durează, în general, $10^{-7} \ldots 10^{-9}$ s. In cazul fosforescenței, această durată este cauzată de fenomenele din interiorul moleculei sau al cristalului emițător, și care nu numai că durează, în general, un timp mai lung, dar depind și de temperatură. Dependența de temperatură, iar nu de durata de emisie, constitue deosebirea fundamentală dintre fluorescență și fosforescență. Spectrul luminii de fluorescență sau de fosforescență cuprinde, deobicei, radiații de alte lungimi de undă decât radiația excitatoare. Când radiația emisă are aceleași lungimi de undă ca și radiația excitatoare fenomenul se numește *rezonanță optică*. Rezonanța, fluorescența și fosforescența constitue fenomenele de fotoluminiscență.

Să cercetăm mai de aproape fenomenul emisiei de lumină.

Luminiscența gazelor (vaporilor) atomice și moleculare

Actul elementar al emisiei de lumină în cazul atomilor vaporilor și gazelor constă în pierderea unei cantități de energie ε, sub formă de lumină monocromatică, de frecvență ν determinată prin ecuația lui Planck

$$\varepsilon = h\nu \qquad (1)$$

Planck admite că lumina e radiată sub formă de cantități distincte de energie $\varepsilon = h\nu$, unde ν este frecvența radiației, iar h — o constantă. Valoarea constantei h a lui Planck, după măsurătorile cele mai noi, este $h = 6{,}624 \cdot 10^{-27}$ erg. s.

Dacă notăm energia atomului înainte de emisia luminii cu w_2, iar după emisie, cu w_1, atunci $\varepsilon = w_2 - w_1$ și, conform relației (1), $w_2 - w_1 = h\nu$ sau

$$\nu = \frac{w_2}{h} - \frac{w_1}{h}. \qquad (2)$$

Fiecare atom poate să se găsească numai într'un anumit șir discontinuu de stări staționare, caracterizate prin valori bine determinate ale energiei w_1. Aceste stări se numesc *staționare*. In stare staționară, atomul nu emite. Emisia se produce prin trecerea atomului dintr'o stare staționară în alta. In acest caz, regula frecvențelor (2), fără a examina însuși mecanismul emisiei, permite determinarea frecvențelor emise de atom, adică determinarea spectrului atomului, cu ajutorul energiilor atomului corespunzătoare diferitelor stări staționare.

In mod normal, atomul se găsește în starea staționară caracterizată prin valoarea cea mai mică a energiei. Cu alte cuvinte, în mod normal, atomul se găsește pe un nivel de energie inferior. Găsindu-se în această stare, el nu emite. Dacă, datorită unei perturbații energetice exterioare oarecare, atomul va ajunge într'o altă stare staționară, cu energie mai mare, va fi ridicat la un nivel superior, prin revenire la starea inițială el va emite anumite linii cu frecvențele date de formula (2). Emisia are loc, deci, prin tranziția atomului din starea staționară de energie mai mare în stare staționară de energie mai mică; absorbția luminii este legată de tranzițiile în sens invers. Deoarece în mod normal atomul se găsește în stare de energie minimă, rezultă că el poate să absoarbă numai lumina cu lungimile de undă care coincid cu lungimile de undă ale liniilor spectrale, care iau naștere prin tranziția atomului de pe nivelul superior pe nivelul normal. Acest lucru este confirmat de experiență.

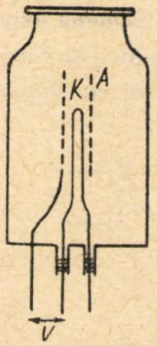


Fig. 2.— Schema experienței bombardamentului cu electroni.

Poziția nivelelor poate fi verificată direct prin experiență. In primul rând, sunt experiențele cu bombardament de electroni, a căror schemă este reprezentată în fig. 2. In centrul unui vas de metal cilindric, din care se scoate aerul, este așezat un catod cald k. Electronii emiși de acest catod sunt accelerați de un câmp aplicat între catod și anodul A, având forma unui cilindru din plasă metalică. Distanța dintre catod și anod se lasă atât de mică, încât electronii care traversează acest spațiu să nu sufere ciocniri cu atomii vaporilor în studiu și care umplu vasul. Datorită acestui fapt, energia electronilor care ating anodul este egală cu eV, în care V este diferența de potențial dintre catod și anod. Pereții vasului sunt puși la același potențial ca și anodul. Datorită acestui fapt, electronii care au trecut prin ochiurile grătarului anodic se mișcă mai departe în spațiul lipsit de câmp, cu o viteză constantă. In acest spațiu se produc ciocniri cu atomii vaporilor în studiu. Lumina care apare în acest caz poate fi observată printr'o fereastră care se găsește în partea de sus a vasului.

Atât timp cât energia eV a electronului este atât de mică, încât electronul nu poate aduce atomul din starea normală în starea staționară, imediat vecină din punct de vedere energetic, ciocnirea este elastică și nu se observă niciun fel de emisie. Indată ce energia electronului va fi suficientă pentru a aduce atomul într'o stare staționară supe-

rioară, această energie va fi transmisă integral atomului prin ciocnire. După ciocnire atomul va reveni la starea normală și va emite aceeași energie $\Delta W = eV$ sub forma unei radiații de frecvență $\nu = \frac{\Delta W}{h} = \frac{eV}{h}$ sau cu lungimea de undă $\lambda = \frac{ch}{eV}$ în care c este viteza luminii. Inlocuind pe e, h și c cu valorile lor numerice și exprimând pe λ în angströmi, iar pe V în volți, obținem o relație foarte simplă, care permite calcularea lungimii de undă a liniei emise cu ajutorul potențialului de accelerare:

$$\lambda = \frac{12\,340}{V}$$

O a doua grupă de experiențe, care confirmă schema nivelelor, o constitue experiențele cu *fluorescență*, în special în așa numita emisie de *rezonanță*. Vaporii de sodiu iluminați cu lumină a cărei frecvență coincide cu frecvența liniei galbene a sodiului încep să emită lumină care cuprinde aceeași linie galbenă (lumina de rezonanță). Schema experienței cu fluorescența vaporilor de sodiu este reprezentată în fig. 3, în care A este vasul cu vaporii

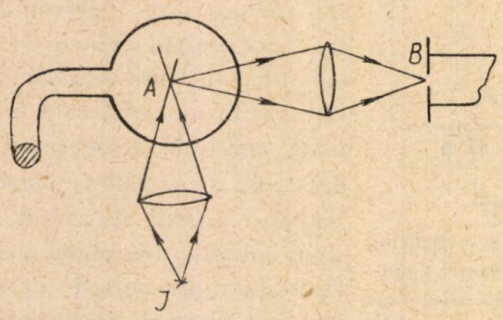


Fig. 3. — Schema experienții cu fluorescență a vaporilor.

de sodiu la presiune joasă, j — sursa de lumină de sodiu. Observația se face în direcția AB. Spectrul de fluorescență se studiază cu ajutorul unui spectrograf. Acest fenomen se explică prin faptul că atomul de sodiu, absorbind lumina, trece din starea normală în stare vecină. Revenind în starea normală, el emite aceeași linie pe care a absorbit-o. Dacă se iluminează vaporii de sodiu cu lumină ultravioletă, se observă deasemenea o iluminare a vaporilor (fluorescență) însă, în acest caz, nu este emisă numai linia care a fost absorbită, ci și linia galbenă, deoarece atomul poate să treacă și pe nivele intermediare.

In cazul moleculelor, de exemplu al moleculelor biatomice, fiecărei tranziții dintre două nivele energetice anumite W' și W îi corespunde emisia unei frecvențe $\nu = \frac{W' - W}{h}$. Dacă în moleculă ar exista numai mișcări de oscilație a nucleelor, spectrul lor ar fi format numai din linii separate. Peste orice mișcare de oscilație a nucleelor din moleculă se suprapune însă o mișcare de rotație a moleculei. Aceasta duce la înlocuirea liniei izolate printr'o « bandă » formată dintr'un număr mare de linii așezate foarte strâns. Prin urmare, fiecărei tranziții dintre două stări de oscilație ale moleculei îi corespunde nu o linie, ci o bandă.

Schema nivelelor de oscilație este confirmată experimental de experiențele de fluorescență a vaporilor biatomici. Aceste experiențe se fac la fel ca și experiențele cu spectrele de fluorescență ale atomilor. Prin luminarea vaporilor cu o lumină monocromatică de o anumită frecvență, moleculele vor fi aduse din starea normală într'o stare superioară. Trecând înapoi dela această stare, molecula poate trece în orice altă stare de oscilație inferioară, iar în spectrul de fluorescență va exista atunci o grupă de bande. Astfel, spectrul de fluorescență va fi mult mai complicat decât spectrul de excitație care l-a produs. In spectrul de fluorescență, toate frecvențele afară de cele care coincid cu frecvența de excitație sunt mai mici decât cele ale luminii excitatoare. Cu alte cuvinte: *spectrul de luminiscență conține radiații având lungimea de undă egală sau mai mare decât lungimea de undă a radiației excitatoare.* Această concluzie a fost obținută pe baza analizei materialului experimental al lui Stokes și se numește deaceea *regula lui Stokes*.

Abaterile dela regula lui Stokes sunt posibile în cazul când inițial o parte din molecule se găsesc în stări excitate de oscilație, ceeace poate avea loc datorită agitației termice. In acest caz, pot exista în spectrul de luminiscență și bande cu frecvențe care contrazic regula lui Stokes.

Luminiscența (fotoluminiscența) corpurilor lichide și solide

Am văzut în capitolul precedent în ce constă fenomenul de luminiscență în cazul gazelor sau vaporilor în stare atomică sau moleculară. S'a văzut că procesul se reduce la aducerea atomului sau a moleculei dintr'o stare excitată, sub influența absorbției, după care urmează o emisie luminoasă prin revenirea particolei excitate la starea normală.

Fenomenul de luminiscență există deasemenea și la corpurile lichide și solide, el prezentând în unele cazuri o intensitate foarte mare.

Afară de aceasta, unele corpuri solide prezintă o fosforescență, o emisie de lumină care continuă după ce a încetat acțiunea luminii excitatoare. Fosforescența a fost pusă în evidență la începutul secolului al XIX-lea de V. V. Petrov ca o formă specială a radiației.

Metoda de observare a luminiscenței corpurilor lichide și solide este — în principiu — aceeași ca și pentru observarea luminiscenței gazelor. La multe substanțe (soluții de coloranți de ex.: fluoresceină) o emisie luminoasă, cu totul particulară, este vizibilă chiar la lumina difuză a zilei sau într'un fascicol de raze solare. Un dispozitiv mai comod, folosit pentru alte corpuri, care nu luminează atât de clar este arătat în fig. 4.

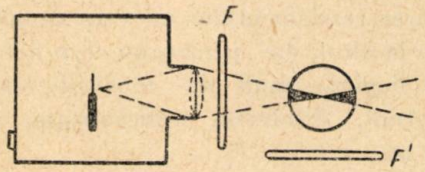


Fig. 4. — Schema dispozitivului pentru observarea luminiscenții la lichide.

Lumina sursei (un arc electric de pildă) este concentrată cu ajutorul unei lentile asupra substanței cercetate, de exemplu, un recipient cu o soluție de chinină, petrol, etc. Ochiul nu vede pe fondul întunecat urma fascicolului de lumină sub forma unei fâșii albe, ci sub forma unui fascicol colorat, a cărui culoare depinde de felul substanțe cercetate: verzuie la fluoresceină, portocalie la rodamină, albăstruie la chinină, etc.

Culoarea emisiei luminoase ivite, constitue semnul caracteristic al luminiscenței. Ea se deosebește de culoarea luminii excitatoare, ceea ce înlesnește observarea fenomenului.

Spre deosebire de gaze, corpurile solide și lichide, în timpul luminiscenței, emit lumină care nu este formată din linii spectrale izolate, ci dintr'o serie de bande continue mai largi sau mai înguste. In acest caz, este caracteristic variația compoziției spectrale a luminii emise față de lumina absorbită. In majoritatea cazurilor este îndeplinită regula lui Stokes, conform căreia lumina de luminiscență este caracterizată printr'o lungime de undă mai mare decât lumina care a produs luminiscența. Regula lui Stokes arată deci că maximul benzii de absorbție este deplasat înspre partea undelor scurte față de maximul luminiscenței.

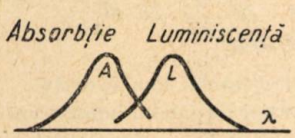


Fig. 5. — Poziția benzilor spectrale de luminiscență și absorbție.

Folosind regula lui Stokes, se pot îmbunătăți condițiile de observare a luminiscenței, lăsând în drumul razelor excitatoare un filtru luminos F, care absoarbe lungimile de undă ale luminiscenței transmițând însă lumina care poate fi absorbită de corpul studiat. Dimpotrivă, între obiectul studiat și ochiul observatorului se plasează un filtru F', complimentar cu primul, adică absorbind undele benzii A (fig. 5) și transmițând pe cele ale domeniului L. Astfel, ochiul va fi ferit de lumina difuzată în mod accidental și, în același timp, luminiscența va fi excitată și va ajunge la observator fără vreo pierdere apreciabilă de intensitate. Această metodă a filtrelor încrucișate este de mare însemnătate la cercetarea substanțelor slab luminiscente.

Regula lui Stokes reiese în mod direct din reprezentarea fotonică a luminii: Dacă corpul absoarbe un foton de frecvență ν_0 a cărei energie este $\varepsilon_0 = h\nu_0$ atunci această energie este redată parțial sub forma unui foton de energie $\varepsilon = h\nu$, iar parțial se transformă în interior, în alte forme de energie; notând această ultimă fracțiune de energie prin A, avem:

$$h\nu_0 = h\nu + A \qquad (3)$$

deoarece $A \geqq 0$, $\nu \leqq \nu_0$, adică frecvența luminii de luminiscență este egală sau este mai mică decât frecvența luminii excitatoare. Prin urmare, lungimea de undă a luminii de luminiscență este egală sau este mai mare ca lungimea de undă a luminii excitatoare.

Revenind la bandele de absorbție și de emisie, trebue subliniat că și în cazul fenomenului de luminiscență la solide și lichide întâlnim abateri dela regula lui Stokes. Aceasta poate avea loc în cazul când $A < 0$, adică atunci când prin luminiscență, la energia fotonilor excitatori se adaugă și energia datorită surselor de luminiscență ale corpului care produce luminiscența.

Emisia corpurilor sub influența radiației excitatoare poate prezenta caractere deosebite. Astfel, ea poate fi o simplă reflexie a luminii pe suprafața corpului, luminiscență, și în fine o emisie termică, datorită încălzirii corpului prin radiația absorbită. Pentru a separa luminiscența de alte feluri de emisie, trebue să indicăm caracteristicele ei specifice. Lumina de luminiscență — în general — are o altă lungime de undă decât lumina excitatoare. Prin aceasta, luminiscența se deosebește de reflexia și refracția luminii. In al doilea rând, luminiscența are un *timp de extincție* (relaxare) *finit*, adică ea nu dispare imediat după întreruperea acțiunii luminii excitatoare. In fine, intensitatea luminii de luminiscență *este mai mare decât intensitatea emisiei unui corp absolut negru*, la aceeași temperatură cu aceea la care se găsește corpul luminiscent.

Nu toată energia absorbită este emisă sub formă de energie luminiscentă. Raportul între energia emisă și energia absorbită de corpul luminiscent

este numit randamentul luminiscenței. [1]) S. I. Vavilov studiind randamentul energetic al luminiscenței a arătat contrar părerilor existente atunci că randamentul poate atinge valori mari și în unele cazuri (ex. la fluoresceină) se apropie de 100%, în alte cazuri, dimpotrivă, valoarea randamentului este foarte mică. El este acela care a măsurat primul dependența randamentului energetic al luminiscenței de lungimea de undă a luminii de excitație în intervalul larg al lungimilor de undă dela 254 până la 546 m μ. S. I. Vavilov a stabilit următoarele două legi referitoare la randamentul luminiscenței:

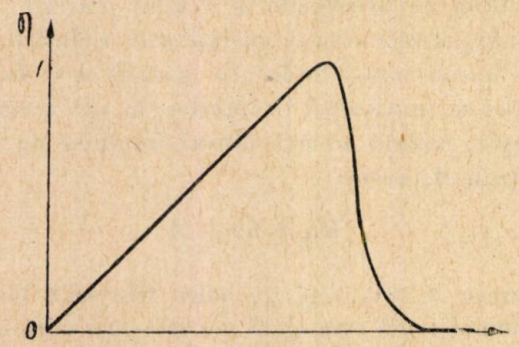


Fig. 6. — Dependența randamentului luminiscenți în funcție de lungimea de undă a luminii excitatoare.

1) *randamentul energetic al luminiscenței este totdeauna mai mic decât unitatea*;

2) *dacă lungimea de undă a luminii de luminiscență este mai mică decât lungimea de undă a luminii excitatoare, randamentul energetic este cu atât mai mic, cu cât mai mare este diferența de lungime a acestor unde și cu cât mai joasă este temperatura corpului care emite.*

Prima lege a lui S. I. Vavilov afirmă — și aceasta este conform cu legile de bază ale termodinamicei — că energia calorică a unui corp nu poate să treacă, la luminiscență, în cantități mari în energie luminoasă, și invers, deobicei o parte din energia luminii excitatoare trece în căldură în corpul luminiscent.

Dacă lungimea de undă a luminii de luminiscență este mai mică decât a celei absorbite, înseamnă că se emite mai multă energie decât a fost la absorbția luminii excitatoare. Diferența de energie se împrumută în acest caz dela energia calorică a corpului luminiscent. Prin urmare, avem de a face aici cu o transformare a energiei calorice în energie luminoasă. Asemenea fenomene sunt foarte rare și probabilitatea lor scade repede cu creșterea cantității de energie calorică care trebue să treacă în radiație.

Această probabilitate depinde mult de temperatura corpului și scade odată cu coborîrea temperaturii. Acesta este înțelesul fizic al celei de a doua legi a lui S. I. Vavilov.

Intrucât dela energia luminii este ușor de trecut la frecevnța ei, aceste legi dau rezolvarea fenomenului de transformare spectrală a luminii de luminiscență.

In fig. 6 este reprezentat graficul dependenței randamentului energetic al luminiscenței η de lungimea de undă a luminii excitatoare, construit pe baza teoriei lui S. I. Vavilov.

Valoarea randamentului nu variază numai dela un corp la altul, dar, pentru un corp dat, această valoare depinde mult de condițiile exterioare: temperatură, disolvant, concentrație, adausuri străine, etc.

Fenomenul de slăbire a luminiscenței prin introducerea unei substanțe străine poartă numele de *extincția* luminiscenței.

In cazul multor soluții, intensitatea luminiscenței scade puternic, dacă se adaugă soluției respective iodură de potasiu. Se pare că prezența substanței străine provoacă consumarea energiei de excitare a moleculelor luminiscente în favoarea unui oarecare proces secundar al cărui mecanism nu a fost încă stabilit. In definitiv, energia sustrasă moleculelor excitate se răspândește deobicei prin toată substanța, servind la încălzirea ușoară a acesteia. Mecanismul extincției prin mărirea concentrației substanței luminiscente (extincția prin concentrare) este deasemenea neclarificat. Experiența arată că mărind considerabil concentrația substanței disolvate se micșorează foarte mult randamentul luminiscenței, acesta tinzând către

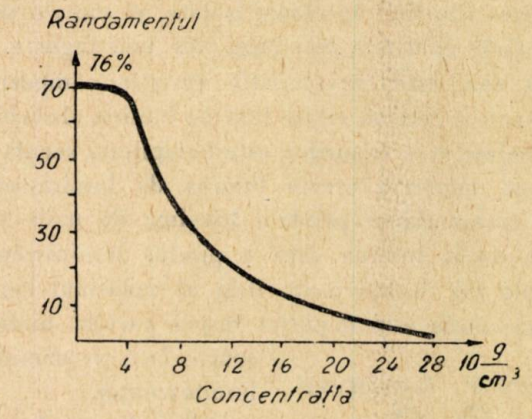


Fig. 7. — Dependența randamentului luminiscență în funcție de creșterea concentrației corpulului luminiscent.

zero pentru concentrații foarte mari. Fig. 7 ne arată scăderea randamentului în cazul creșterii concentrației la fluoresceină. Nu este exclusă posibilitatea ca prezența uneia sau alteia din cauzele de extincție condiționează și scăderea randamentului luminiscenței, observată în multe cazuri.

[1]) Această caracteristică a fenomenului de luminiscență este introdusă pentru prima oară de S. I. Vavilov.

Mediul înconjurător nu influențează numai intensitatea luminiscenței, ci și compoziția ei spectrală. Inlocuirea unui disolvant cu altul poate deplasa banda de luminiscență cu câteva sute de angströmi.

Fosforii cristalini

Dintre numeroasele substanțe luminiscente, în ultimii ani s'a evidențiat un grup de substanțe, deosebit de interesant atât din punct de vedere științific cât și tehnic. Substanțele luminiscente care fac parte din acest grup se numesc *fosfori cristalini*.

Capacitatea de luminiscență a acestor substanțe nu este bazată pe proprietatea individuală a atomilor sau moleculelor lor, ci este o urmare a unei structuri cristaline amintite. In acest caz la fenomenul de luminiscență participă întregul cristal, sau cel puțin o regiune a sa, care are o întindere spațială ce întrece mult dimensiunile atomului. In procesul de luminiscență avem de a face astfel cu acțiunea comună a unor atomi foarte numeroși.

Fosforii clasici a lui Lenard fac parte deasemeni din acest grup. De aici fac parte și sulfurile de zinc și cadmiu, silicați și wolframați foarte interesanți din punct de vedere tehnic.

Aceste substanțe se caracterizează printr'o emisie întârziată de lungă durată, care, depinde mult de temperatură. Urcarea temperaturii reduce în mod considerabil durata emisiei luminoase, mărind în același timp strălucirea ei, deoarece *emisia totală* adică, cantitatea totală radiată dela început și până la stingere, este aceiași indiferent de durată. Datorită acestui fapt intensitatea de emisie, prin încălzire, crește mult.

Randamentul energetic al fosforilor, adică raportul dintre cantitatea totală de energie emisă sub formă de lumină și cantitatea de energie luminoasă absorbită, care a servit la excitarea lor, poate fi foarte mare ajungând uneori aproape de unitate. Valoarea mare a randamentului deschide perspective pentru utilizarea fosforilor ca surse de lumină.

Aplicațiile luminiscenței

Studiind fenomenul de polarizare a luminei luminiscente S. I. Vavilov împreună cu elevii săi V. I. Levșin și P. P. Feofilov a deschis o cale nouă spre stabilirea naturii și proprietăților corpurilor cu însușiri radiante.

Cercetând la diferite corpuri graficele dependenței gradului de polarizare a luminiscenței de lungimea de undă a luminii excitatoare S. I. Vavilov a constatat că se poate stabili ce fel de grupe de atomi în moleculele compuse ale acestor corpuri emit sau absorb lumină cu anumite lungimi de undă. Datorită acestui fapt se pot obține prețioase informații despre structura moleculelor compuse.

Studierea extincției luminiscenței soluțiilor efectuată de S. I. Vavilov și elevii săi a dus la descoperirea unui nou aspect al transmiterii energiei în corp — *migrația energiei*. La migrație, energia se transmite la distanțe mari (în comparație cu dimensiunile atomilor și moleculelor) în urma unui deosebit fel de interacțiune între atomii vecini ai corpului respectiv. Acest aspect al propagării energiei joacă un rol enorm în soluțiile concentrate de coloranți organici, în cristale, în albumină și în diferite fenomene biochimice.

In ultimii ani luminiscența este pe larg aplicată în diferite domenii ale științei și tehnicii: în radiolocație și televiziune, în medicină, chimie, biologie și mineralogie, în industria metalurgică — peste tot ea ajută la rezolvarea a unui mare număr de probleme practice. Pe baza luminiscenței sunt elaborate metode noi de analiză chimică și de calitate a diferitelor corpuri.

O particularitate însemnată a luminiscenței o constitue faptul că lumina emisă poate fi observată chiar la concentrații extrem de mici ale corpului respectiv. Un conținut de ordinul 10^{-9} g/cm^3 este adeseori suficient; deoarece pentru o observare comodă volumul se poate limita la câteva zecimi de cm^3 este suficient să dispunem de 10^{-10} g din corpul fluorescent pentru a avea posibilitatea să-i constatăm prezența, prin luminiscența sa caracteristică. Această mare sensibilitate a observațiilor permite aplicarea analizei prin luminiscență la rezolvarea multor probleme practice. Fluorescența petrolului, sau a adausurilor, pe care le conține este foarte însemnată și deaceea este folosită la explorarea rapidă, cu ocazia sondajelor de petrol. Examinând fluorescența bucăților de rocă extrase prin sondaje, care conțin urme de petrol, se pot trage concluzii cu privire la apropierea straturilor petrolifere, și adeseori la calitatea petrolului.

Cu ajutorul analizei prin luminiscență se pot deosebi diferitele calități de sticlă, se pot tria sgurile, separând pe cele stabile, bune pentru pavarea drumurilor, de cele casabile, se apreciază gradul de porozitate și structura rocilor și materialelor de construcție, îmbibându-le cu soluții fluorescente și observând figura de răspândire a fluorescenței.

Analiza prin luminiscență permite industriilor chimice recunoașterea diferitelor componete din amestecurile complexe.

In industria textilă analiza prin luminiscență permite recunoașterea ușoară a petelor de grăsime de pe țesături, care nu sunt vizibile cu ochiul liber.

Fotoluminiscența multor minerale înlesnește explorările geologice. Toate acestea nu epuizează posibilitățile analizei prin luminiscență în ce privește determinările calitative. S'a încercat aplicarea ei și la cercetările cantitative. S'a reușit astfel să se cerceteze conținutul în ozon al aerului chiar la înălțimi mari (aerul fiind cules prin baloane stratosferice.

In desvoltarea aplicării practice a luminiscenții un mare merit îi revine lui S. I. Vavilov. In această direcție o deosebită importanță au însă lucrările lui în crearea surselor luminiscente de lumină, care au deschis o etapă nouă în istoria tehnicii luminii.

Lămpile electrice cu incandesncență — sursă de bază a luminii în zilele noastre au mari lipsuri. Randamentul luminos atins de lămpile cu incandescență este foarte scăzut; abia 3% din energia electrică consumată e redată sub formă de lumină, iar restul de 97% este transformată în căldură și radiații infraroșii. O mărire a randamentului luminos al lămpii cu incandescență ar fi posibilă numai prin mărirea temperaturii filamentului de incandescență până la 6000°. Cu mult înainte însă de realizarea acestei temperaturi filamentul lămpii se topește sau se fărâmițează. Wolframul folosit astăzi la fabricarea lămpilor cu incandescență are o temperatură de topire de 3390°. Până astăzi, nu se cunosc alte metale cu temperatură mai ridicată de topire, afară de unele carburi, în special carbura de tantal care se topește la o temperatură de 4327°. Totuși lămpile cu filament de carbură de tantal nu sunt durabile și din această cauză nu și-au găsit aplicație până astăzi.

Randamentul scăzut al lămpilor cu incandescență, precum și coloritul radiațiilor, diferit de coloritul radiațiilor luminii naturale, au determinat căutarea unor noi surse de lumină mai economice și mai bune în ce privește coloritul luminii. Asemenea surse de lumină s'au dovedit a fi lămpile luminiscente. Corpurile luminiscente apar în rolul de transformatori de lumină. Ele pot transforma un fel de lumină în altul, de ex. razele ultraviolete, invizibile, adică raze nefolositoare în domeniul tehnicii luminii, în raze vizibile.

Transformarea luminii stă la baza tuturor lămpilor luminiscente. S. I. Vavilov a propus primul folosirea radiațiilor puternice ultraviolete a lămpilor cu mercur, pentru obținerea unei lumini vizibile, cu ajutorul corpurilor luminiscente. Urmând această cale el a realizat lămpile luminiscente cu lumina zilei.

Lumina electrică aplicată lămpii luminiscente produce o descărcare electrică în vaporii de mercur care umplu balonul lămpii. Radiația care se produce datorită descărcării electrice, luminează un strat subțire din compoziția luminiscentă aplicată pe pereții tubului producând luminiscența acestuia (fotoluminiscență).

Compoziția luminiscentă (luminoforul) transformă radiațiile descărcării electrice în vapori de mercur, acționând în special sub influența regiunii ultraviolete a spectrului, pe care o transformă în radiații vizibile, ceeace mărește mult randamentul luminos al lămpii.

Fig.— 8. Lampa luminiscentă a lui S. I. Vavilov.

Ca substanțe fotoluminiscente pentru lămpi se întrebuințează compoziții solide cristaline luminiscente (luminofori) care trebue să posede următoarele proprietăți principale:

— să folosească la maximum radiațiile ultraviolete ale descărcării electrice în vapori de mercur, pentru a le transforma în radiații vizibile cu compoziția spectrală necesară;

— să aibă un spectru de radiație continuu;

— să fie suficient de stabilă la temperaturile înalte, să nu se decoloreze sensibil și să fie rezistente la acțiunea electrică ce are loc în lampă.

Se construesc lămpi luminiscente de joasă tensiune cu electrozi preîncălziți și lămpi luminiscente de înaltă tensiune cu electrozi reci.

In fig. 8 se vede lampa luminiscentă a lui S. I. Vavilov. Partea principală o constitue un tub de descărcare în gaz umplut cu vapori de mercur

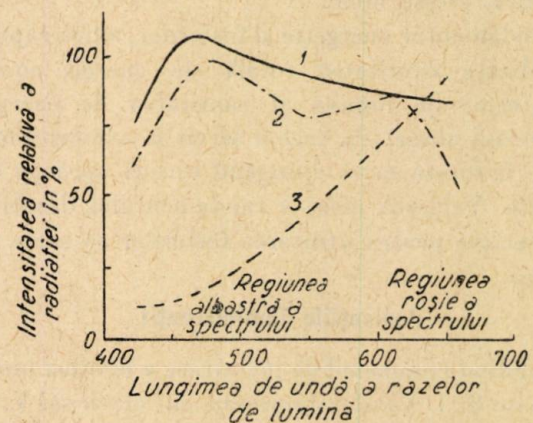


Fig. 9. — Graficul luminii de zi, a lămpilor de lumină de zi, și a lămpilor cu incandescență.

la presiune joasă. Electronii trecând prin tub în timpul descărcării excită radiația ultravioletă a mercurului care se transformă în lumină vizibilă prin intermediul prafului luminiscent (luminoforul) aplicat pe pereții interiori ai tubului. După

natura luminoforului se poate obține lumină de orice culoare. Cel mai mare interes practic îl prezintă luminoforii a căror radiație este mai apropiată de lumina zilei.

In fig. 9 sunt arătate curbele spectrale ale luminii de zi (1) lămpile cu lumină de zi (2) și lămpile cu incandescență obișnuită (3). Din această figură se poate vedea în ce măsură este mai aproape de lumina zilei radiația lămpii luminiscente decât aceea a lămpii cu incandescență.

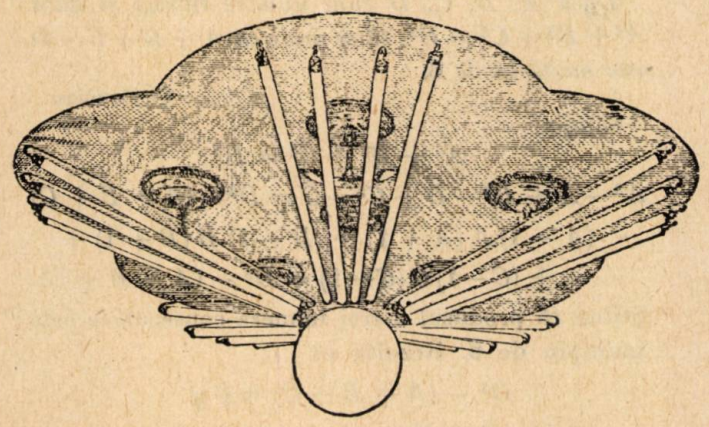


Fig. 10. — Lampă cu luminiscență.

Durata medie de funcționare pentru lampa luniscentă este de 1500 ore.

Lămpile luminiscente au căpătat deja o largă întrebuințare în U.R.S.S. (fig. 10). Cu ele sunt luminate atelierele de triere și colorimetrice ale fabricilor textile, care înainte funcționau numai câteva ore la lumina zilei; ele crează condiții minunate de luminare a muzeelor și galeriilor de tablouri. Datorită unei depline securități în contra exploziilor ele sunt folosite cu mult succes în minele sovietice. Cu asemenea lămpi sunt luminate stațiile metroului din Moscova (fig. 11) magazinele, instituțiile, etc.

Importanța lămpilor cu luminiscență a fost caracterizată în felul următor de către S. I. Vavilov:

« Lumina rece — este unica rezolvare rațională a iluminării, ea reprezintă eliberarea de calea bătă-

Fig. 11. — Lămpi cu luminiscență la stația de metrou « Cursckaia » Moscova.

torită a surselor termice de lumină, spre care ne împinge natura, ea reprezintă stăpânirea naturii și transformarea ei. Lumina rece este o parte inalienabilă a vieții civilizate a viitoarei societăți comuniste. Datoria noastră este să accelerăm realizarea și aplicarea generală a luminii reci ».

PROBLEME REZOLVATE

Problema 524

Se consideră fracțiile

$$f_1 = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}\,; \quad f_2 = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}\,;$$

$$F_1 = \frac{x^2 - (1 + a^2)\,x + a^2}{x^4 - (1 + a^4)\,x^2 + a^4}$$

unde a *este real. Se cere:*

1. Să se afle fracția algebrică F_2, *care să îndeplinească condiția:*

$$\frac{f_1 - F_1}{f_2 - F_1} : \frac{f_1 - F_2}{f_2 - F_2} = -1.$$

2. Dacă $0 < a < 1$, *să se demonstreze că*

$$\frac{f_1 - F_2}{f_2 - F_2} < 0$$

când x *nu este cuprins în intervalul* $(-4;\ 2)$.

3. *Facem notația:*

$$E(a) = \frac{f_1 - F_1}{f_2 - F_1}$$

și considerăm fracția algebrică:

$$F(x) = \frac{(x^2 + 3x - 1)\,E(O) + 2}{(x^2 + 3x - 1)\,E(O) - 2x^2 + 2x + 3}$$

Dintre toate valorile pozitive ale fracției $F(x)$ să se afle valoarea cea mai mică.

Gh. Dumitrescu

Soluție. 1. Avem:

$$\frac{f_1 - F_1}{f_2 - F_1} = \frac{F_2 - f_1}{f_2 - F_2}$$

de unde

$$\frac{f_1 + f_2 - 2F_1}{f_2 - F_1} = \frac{f_2 - f_1}{f_2 - F_2};$$

$$F_2 = f_2 - \frac{(f_2 - F_1)(f_2 - f_1)}{f_1 + f_2 - 2F_1}.$$

Inlocuind valorile f_1, f_2, F_1 și observând că ele se pot simplifica astfel

$$f_1 = \frac{x-1}{x+1}; \quad f_2 = \frac{x+3}{x+1}; \quad F_1 = \frac{1}{(x+1)(x+a^2)}$$

găsim

$$F_2 = \frac{x+3}{x+1} - \frac{2[x^2 + (3+a^2)x + 3a^2 - 1]}{(x+1)[x^2 + (1+a^2)x + a^2 - 1]}$$

2. Ținând seamă de egalitatea dela 1, este tot una a demonstra că

$$\frac{f_1 - F_1}{f_2 - F_1} > 0$$

sau

$$\frac{x^2 - (1-a^2)x - 1 - a^2}{x^2 + (a^2+3)x + 3a^2 - 1} > 0 \qquad (1)$$

Vom arăta că rădăcinile numărătorului $f_1(x)$ și ale numitorului $f_2(x)$ ai fracției (1) sunt cuprinse între -4 și 2 când $0 < a < 1$.

Intr'adevăr, când $0 < a < 1$, $f_1(x)$ și $f_2(x)$ au rădăcini reale deoarece

$$(1-a^2)^2 + 4(1+a^2) > 0$$

$$(a^2+3)^2 - 4(3a^2-1) > 0.$$

Apoi, când $0 < a < 1$, $f_1(-4)$, $f_1(2)$, $f_2(-4)$, $f_2(2)$ sunt pozitive, iar semisumele rădăcinilor $\left(\frac{1-a^2}{2}\right.$ și $\left.\frac{-a^2-3}{2}\right)$ sunt cuprinse între -4 și 2.

Deci pentru $0 < a < 1$ rădăcinile trinoamelor $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sunt cuprinse în intervalul $-4; 2$.

In condițiile de mai sus $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sunt pozitive, ceeace demonstrează inegalitatea (1).

3. Avem

$$E(O) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 3x - 1},$$

deci

$$F(x) = \frac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 2}.$$

Pentruca $F(x)$ să fie minim, trebue ca, în același timp, $x^2 - x + 1$ să fie minim iar $-x^2 + x + 2$ să fie maxim. Minimul lui $x^2 - x + 1$ este pentru $x = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$. Maximul lui $-x^2 + x + 2$ este pentru $x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$. Deci $F(x)$ are o valoare minimă, care este $\frac{1}{3}$.

Problema 531

Dacă A, B, C, D sunt numere întregi și dacă $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$, să se arate că $A + B + C - D$ este multiplu de 6.

V. Claudian

Soluție.

$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3$$

$$A^3 - A + B^3 - B + C^3 - C = D^3 - (A + B + C)$$

$$(A-1)A(A+1) + (B-1)B(B+1) + (C-1)C(C+1) = D^3 - (A+B+C).$$

Știind că produsul a trei numere consecutive este multiplu de 6. Rezultă că

$$D^3 - (A + B + C) = 6y$$

$$A + B + C = D^3 - 6y$$

Dacă înlocuim în $A + B + C - D = x$

$$D^3 - 6y - D = x$$

$$D^3 - D = x + 6y$$

$$(D-1)D(D+1) = x + 6y$$

Cum și produsul de trei factori consecutivi numere întregi fiind multiplu de 6.

$$6z = x + 6y$$

$$x = 6(z - y)$$

Prin urmare $A + B + C - D$ este multiplu de 6.

Problema 552

Se dă un cerc O și un punct A fix pe cerc. Un unghi constant cu vârful în A se deplasează în așa fel încât laturile sale AB, AC sunt coarde ale cercului. Se cere: a) *Locul centrului de greutate al triunghiului ABC*, b) *locul ortocentrului triunghiului ABC.*

V. Claudian

Soluție. *a)* Unghiul A fiind constant coarda $\overline{BC}$ păstrează o lungime constantă, deci mijlocul ei M descrie cercul $O(\overline{OM})$. Ținând seamă că $\overline{AG} = 2\overline{MG}$, rezultă că centrul de greutate G al triunghiului ABC descrie un cerc omotetic față de cercul $O(\overline{OM})$, în raport cu punctul A, raportul de omotetie fiind 2/3. Raza acestui cerc este $\frac{2}{3}\overline{OM}$, iar centrul său se află pe $\overline{OA}$ la distanța $\frac{2}{3}\overline{OA}$ față de A.

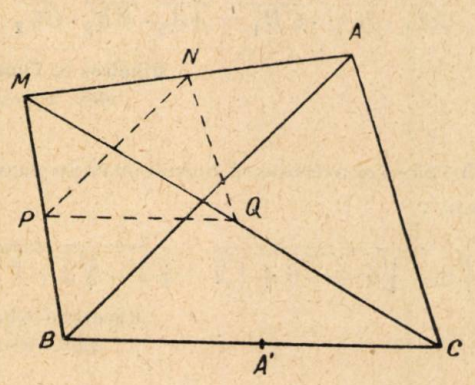
b) Se știe că centrul cercului circumscris al unui triunghi ABC, centrul său de greutate G și ortocentrul său H sunt colineare și că $2\overline{OG} = \overline{GH}$. Prin urmare ortocentrul H al triunghiului ABC descrie un cerc omotetic față de cercul descris de centrul de greutate G, în raport cu O, raportul de omotetie fiind 3. Prin urmare acest cerc are centrul în A și raza $2\overline{OM}$. ($\overline{AH} = 2\overline{OM}$).

Problema 570

Să se construiască un triunghi ABC, cunoscând mijlocul A' al laturii BC, precum și mijloacele distanțelor unui punct M din planul triunghiului la vârfurile sale.

M. Ghermănescu

Soluție. Fie N, P, Q respectiv, mijloacele distanțelor MA, MB, MC. Presupunem problema rezolvată. Se observă astfel ușor că triunghiul NPQ



este asemenea cu ABC, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$. Deducem următoarea construcție: ducem prin A' o dreaptă paralelă cu PQ pe care luăm de o parte și de alta a lui A', $\overline{A'B} = \overline{A'C} = \overline{PQ}$. Prelungim CQ cu o lungime $\overline{QM} = \overline{QC}$, apoi pe MN în sensul dela M la N luăm $\overline{NA} = \overline{MN}$.

Problema este posibilă când punctele N, P, Q sunt necolineare. In cazul posibilității problemei avem întotdeauna o singură soluție.

Problema 586

Un număr multiplu de 35, *într'un sistem de numerație cu baza de două cifre se scrie* 1234. *Cum se scrie acest număr în baza* 10?

L. Lopovoc (Proscurov)

Soluție. Fie $N_{10} = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ numărul $1234_{(x)}$ scris în baza 10.

N_{10} fiind multiplu de 35 se divide prin 5 și prin 7. Pentru a fi divizibil prin 5, trebue să se termine în 5 sau în 0. Se găsește ușor că dintre toate numerele de două cifre numai numerele terminate în 1 și 6, considerate ca valori ale lui x, dau lui N_{10} valori terminate în O. Prin urmare x, se găsește printre numerele: 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96.

Fie $x = M\,7 + n$; $(O \leqslant n \leqslant 6)$. Inlocuind în valoarea lui N_{10} găsim

$$N_{10} = M\,7 + n^3 + 2n^2 + 3n + 4.$$

N_{10} va fi multiplu de 7 numai pentru acele valori ale lui n, cuprinse între 0 și 6, care dau polinomului $n^3 + 2n^2 + 3n + 4$ o valoare divizibilă prin 7. Incercând toate valorile ce le poate lua n, găsim că numai $n = 4$ răspunde problemei, deci

$$x = M\,7 + 4.$$

Singurele numere, din cele înșirate mai sus, care depășesc cu 4 un multiplu de 7, sunt

11, 46 și 81.

Ele sunt valorile căutate ale lui x.

Numerele care răspund problemei sunt deci

$1234_{(11)} = 1610_{(10)}$, $1234_{(46)} = 101.710_{(10)}$ și $1234_{(81)} = 544.810_{(10)}$.

PROBLEME PROPUSE

784. Un pendul care bate secunda la București este pus să oscileze într'un loc de latitudine necunoscută. In acest loc perioada simplă a pendulului crește cu 0,00083 secunde față de cea dela București. Să se calculeze latitudinea necunoscută a locului. Se dă g la București 980,554 cm/s² și g la pol 983,16 cm/s².

Savin V. Ionescu
elev, Pitești

785. O rază de lumină cade pe o placă transparentă cu fețe plane și paralele sub unghiul de incidență i. Fie d grosimea plăcii și n indicele de refracție. Să se determine deplasarea h a razei emergente. Să se calculeze unghiul i când $d = h$ și $n = 1{,}75$.

Anatolie Mândru
elev, București

786. Capacitatea de producție a uzinei A reprezintă 41% din capacitatea de producție a uzinei B. Numărul care reprezintă procentul creșterii anuale a producției în uzina A este de 30 de ori mai mare decât numărul care reprezintă procentul creșterii anuale a producției în uzina B. Care

este procentul creşterii anuale a producţiei uzine A, dacă după patru ani de lucru uzina A dă aceiaşi cantitate de producţie ca şi uzina B.

* * *

787. Distanţa de 49 km a fost parcursă în 6 ore şi 30 minute. S'a pornit pe bicicletă cu viteza de 11 km/oră şi apoi s'a continuat pe jos cu o viteză în km/oră exprimată de acelaş număr cu numărul de ore mers pe bicicletă.

Care este distanţa parcursă pe jos?

C. Ionescu-Ţiu

788. Pentru încărcarea unui acumulator se foloseşte un grup convertizor dintr'un motor care învârteşte un generator de curent continuu. In plină acţiune generatorul de curent continuu debitează 200 amperi la o tensiune continuă de 24 volţi iar motorul absoarbe o putere de 6,5 kW.

Care este randamentul grupului?

Cornel Popescu
elev, Ploeşti

789. Un răcitor funcţionează pe principiul compresiunii, iar compresorul reprezintă un motor de putere P (exprimată în CP). Să se calculeze frigul produs de răcitor în timp de h ore, dacă evaporatorul este menţinut la temperatura t_1, temperatura mediului înconjurător fiind t şi presupunând că nu există pierderi de căldură.

Ioan Licea
elev, Galaţi

790. Fluxul de electroni necesar microscopului electronic, cu lungimea de undă egală cu 5.10^{-10} cm., este emis într'un tub catodic.

Să se determine diferenţa de potenţial din tubul catodic, viteza electronilor ca şi mărimea cuantei de energie a acestui flux

Valeriu Udrescu
elev, Piteşti

791. Dacă pe laturile unui triunghiu ABC construim în exterior triunghiurile echilaterale BCI, CAJ, ABK, atunci dreptele AI, BJ, CK, sunt concurente în M. (R.M.F. III. pag. 51) şi avem relaţia:

$$MA + MB + MC = \frac{MI + MJ + MK}{2}.$$

St. M. Fotă
elev, Giurgiu

792. Să se afle ce cantitate de căldură e necesară transformării a 150 grame de ghiaţă, cu temperatura de $-10°$, în vapori. (Căldura latentă de topire a ghieţii 80; căldura de vaporizare a apei 539)

Descompunând printr'un mijloc oarecare vaporii de apă în hidrogen şi oxigen, să se afle volumul acestor gaze la 100°.

Se dă V_0 al hidrogenului 160 litri, iar V_0 al oxigenului 80 litri.

Gh. Gh. Dănilă
elev, Giurgiu

793. Intr'un cazan închis avem 1 kg aer la 17°C şi o atmosferă. Prin încălzire, presiunea s'a ridicat la 4 atmosfere absolute. Să se afle câtă căldură a fost nevoie ($C_v = 0{,}18$).

Petre Padar
elev, Bucureşti

794. In triunghiul ABC se duc bisectoarele AA_1, BB_1, CC_1. Din punctele A_1, B_1, C_1 se duc paralele respectiv la AB, BC, AC. Aceste paralele taie laturile AB, BC. AC respectiv în punctele A_2, B_2, C_2. Să se stabilească relaţia:

$$\overline{AC_1} \cdot \overline{BA_1} \cdot \overline{CB_1} = \overline{AA_2} \cdot \overline{BB_2} \cdot \overline{CC_2}.$$

Mihalcea S. Constantin
elev, Ploeşti

795. Să se construiască numai cu rigla şi compasul expresia:

$$E = \sqrt{8 + \sqrt{4 + \sqrt{6 + \sqrt{2}}}} - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}}$$

Gheorghe Gh. Păun
elev, Piteşti

796. In triunghiul oarecare ABC se notează cu I şi O respectiv centrul cercului înscris şi centrul cercului circumscris triunghiului. Fie I_1, I_2, I_3 şi O_1, O_2, O_3 respectiv simetricele lui I şi O faţă de laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Să se arate că cercurile BI_1C, CI_2A, AI_3B au un punct comun M, iar cercurile BO_1C, CO_2A, AO_3B, au deasemenea un punct comun N.

Mihail I. Popescu
elev, Craiova

797. Prin vârfurile B şi C ale unui triunghiu oarecare OBC se duc paralele la laturile AC şi AB şi se iau pe ele segmentele $\overline{BD} = \overline{AB}$ şi respectiv $\overline{CE} = \overline{AC}$. Dreptele BE, CD întâlnesc laturile AC, AB respectiv N şi P şi se întâlnesc în O, iar AO taie latura BC în S. Se dă $\overline{AC} = b$ şi $\overline{AB} = c$. Să se afle în funcţie de b şi c rapoartele ariilor: $APC : ANB$; $ASC : ASB$ şi $NOC : POB$ şi să se demonstreze că ele sunt în progresie geometrică.

Torjescu S. Florin
elev, Ploeşti

798. Pe diagonala AC a dreptunghiului $ABCD$ se ia un punct M. Dreapta BM întâlnește laturile AB, CD respectiv în B', B''. Analog, dreapta DM determină punctele D', D'' respectiv pe AB, CB. Să se arate că diagonala dreptunghiului e medie geometrică între segmentele $\overline{B'D'}$, $\overline{B''D''}$.

Eugen I. Gheția
elev, București

799. Fie H punctul de întâlnire al înălțimilor AA', BB', CC' și D, E, F, mijloacele laturilor BC, AC, AB ale unui triunghi ABC. Să se stabilească relațiile:

$$\overline{A'D} \cdot \overline{BC} = 2\,(\overline{HE}^2 - \overline{HF}^2)$$

$$4\,\overline{A'D}^2 = \overline{BC}^2 = 4\,\overline{AA'}\,\overline{HA'}.$$

Dan C. Panu

800. Se dă ecuația:

$$(m^2 + n^2 - 4mn)\,X^2 - 4\,(m - n)\,X + 1 = 0.$$

1° Să se arate că X este real oricare ar fi m și n.
2° Să se arate că dacă $X = \pm 3$, avem $m = n$.

Mihai Silișteanu
student

801. Să se arate că:

$$(x + a)^9 + C_9^2\,(x + a)^5\,(x^2 - a^2)^2 +$$
$$+ C_9^4\,(x + a)\,(x^2 - a^2)^4 + C_9^6\,(x - a)^3\,(x^2 - a^2)^3 +$$
$$+ C_9^8\,(x - a)^7\,(x^2 - a^2) + (x - a)^9 = 2^8\,(x^9 + a^9).$$

C. Ionescu-Țiu

802. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x} +$$
$$+ \frac{\sec^2 x}{1 + \sec x} + \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1 + \operatorname{cosec} x} = \frac{25}{4}.$$

C. V. Costăchescu

803. Să se rezolve ecuația

$$3x^4 + x^3 + 4x^2\,(1 - 2a) + x\,(1 + 2a) +$$
$$+ 4a\,(a - 2) + 3 = 0.$$

Gh. I. Bercea
Student Timișoara

804. Să se construiască grafic un triunghi când se cunoaște mărimea razei cercului circumscris, a razei cercului înscris și una din laturi. Discuție.

Fl. Dudiță
student, Orașul Stalin

805. Să se calculeze intervalul de variație al sunetului semnalului unei locomotive care se apropie de un observator cu viteza de 30 m/s și se depărtează cu aceiaș viteză.

A. T. Bărbulescu
elev, Pitești

806. Să se determine progresiile geometrice cu termeni reali știind că produsul a cinci termeni consecutivi este 1024 și că suma acestor termeni este 341.

Emil D. Tătaru
elev, Aiud

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E. 266. La o cooperativă s'a vândut în prima zi jumătate din totalul de kilograme de orez și încă o jumătate de kilogram; în a doua zi o jumătate din rest plus o jumătate de kilogram; iar în a treia zi o jumătate din ceeace a rămas și o jumătate de kilogram. Care este cantitatea totală de orez, dacă după trei zile a mai rămas în cooperativă încă un kilogram de orez?

Anatolie Mândru,
elev, București

E. 267. Trei gospodării agricole colective au construit împreună un pod în valoare de 63.000 lei. Prima gospodărie la o distanță de 1,800 km de pod și are 37 curți, a doua la o distanță de 2,800 km și are 22 curți; a treia la o distanță de 3,200 km și are 29 curți. Cu cât trebue să contribue fiecare gospodărie colectivă, dacă suma trebue să fie direct proporțională cu numărul curților și invers proporțională cu distanța până la pod.

***

E. 268. Prin vârful A al unui triunghiu ABC ducem de aceiaș parte cu AB, dreapta AE perpendiculară pe AC și egală cu AB; deasemenea de aceiaș parte cu AC, ducem dreapta AF perpendiculară pe AB și egală cu AC. Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABE și ACF.

Să se arate că unghiul O_1AO_2 este unghi drept.

Zamfira Petrică,
elevă București

E. 269. Două pendule oscilează în acelaș timp și în acelaș loc; primul face 12 oscilații în timp ce

al doilea nu face decât 7 oscilații. Să se calculeze lungimile celor două pendule, știind că unul este mai lung ca celălalt cu 19 cm.

***

E. 270. Intr'un triunghi oarecare ABC, mediana din vârful prelungit întâlnește cercul circumscirs triunghiului ABC în punctul D. Să se arate că

$$\overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{DC} \cdot \overline{AC}.$$

Valentin Dihoru,
elev. Buzău

E. 271. O gospodărie agricolă de stat a despărțit pentru diferite culturi 375 hectare de pământ în trei sectoare. După ce s'a despărțit din primul sector $\frac{1}{3}$ din suprafața sa, din al doilea $\frac{1}{5}$ și din al treilea 0,3, toate întinderile de pământ rămase au devenit egale. Cât erau de mari sectoarele înainte de a se fi făcut această operație.

***

E. 272. Se dau cercuri secante O_1 și O_2 de raze R_1 și R_1 care se taie în punctele A și B. Să se exprime lungimea coardei AB pentru cazul când patrulaterul O_1AO_2B este inscriptibil.

Mihail I. Popescu
elev, Craiova

E. 273. Dacă $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, să se arate că

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}}$$

C. I. Ț.

E. 274. Pe o dreaptă se ia în ordine punctele C_1, A, C_2, M, C_3, B, C_4 unde M este mijlocul segmentului AB.

Să se arate că:

$$2\,\overline{C_1M} = \overline{C_1A} + \overline{C_1B}$$
$$2\,\overline{C_2M} = -\overline{AC_2} + \overline{C_2B}$$
$$2\,\overline{MC_3} = \overline{AC_3} - \overline{C_3B}$$
$$2\,\overline{MC_4} = \overline{AC_4} + \overline{BC_4}.$$

C. I. Ț.

E. 275. O bară de fier are lungimea de 503 mm la temperatura 10°C; iar altă bară de zinc are lungimea tot la 10°C de 499 mm. Ce temperatură trebue să avem într'un cuptor în care fiind introduse cele două bare ele ajung să aibă lungimile egale. Coeficientul de dilatare liniară pentru fier este 0,000012, iar pentru zinc este 0,000029

***

PREMIEREA UNOR COLABORATORI ELEVI

Pentru activitatea deosebită desfășurată de unii corespondenți, evidențiați în anul 1952, s'a hotărît premierea acestora prin acordare de cărți și abonamente la publicațiile Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R.

Dăm mai jos lista elevilor de școală medie, premiați. In dreptul fiecăruia sunt trecute numerele de ordine ale cărților pe care le primesc ca premiu.

1. IOSIFESCU MARIUS, elev cl. X Liceul de băieți Pitești (1; 2; 3; 6; 8; 9; 12).
2. UDRESCU VALERIU, elev cl. XI Liceul de băieți Pitești (1; 2; 4; 6; 7; 8; 9).
3. DOGARU T. MIHAI, elev cl. X Liceul de băieți Ploești (2; 4; 5; 7; 10; 12).
4. POPESCU AL. DAN, elev cl. X Liceul mixt Reșița (1; 4; 5; 6; 11; 15).
5. TORJESCU FLORIN, elev cl. X Liceul de băieți Ploești (1; 4; 5; 6; 8; 15).
6. MUEDIN SUREIA, elev anul IV Școala hidrotehnică Constanța (2; 6; 7; 9; 14; 15).
7. GHEȚIA EUGEN, elev cl. XI Liceul de băieți Nr. 5 București (1; 4; 5; 8; 9; 12).
8. LICEA ION, elev cl. X Liceul de băieți Galați (4; 5; 8; 9; 11; 14).
9. MIHĂILESCU N. ȘTEFAN, elev cl. XI Liceul de băieți Nr. 3 București (4; 5; 8; 9; 11; 12).
10. CODREANU IRINEL, elev cl. XI Liceul de băieți Buzău (4; 5; 8; 9; 13).
11. CAZANACLI NICOLAE, elev cl. X Liceul de băieți Nr. 2 Craiova (4; 5; 8; 9; 15).
12. MICLĂUȘ VASILE, elev cl. XI Liceul mixt Roșiorii de Vede (4; 5; 8; 9; 11).
13. CONDREA NELU, elev cl. IX Liceul de băieți Bârlad (5; 11; 12; 13; 15).
14. TĂTARU EMIL, elev cl. IX Liceul mixt Aiud (4; 8; 9; 13; 15).
15. WESZELY TIBERIU, elev cl. X Liceul de băieți «Rangheț Iosif», Tg. Mureș (4; 8; 9; 13; 15).
16. TIȚA D. CONSTANTIN, elev cl. XI Liceul de băieți Tg. Jiu (5; 8; 9; 11; 12).
17. PĂUN GHEORGHE, elev cl. XI Liceul de băieți Pitești (5; 8; 9; 11; 12;).
18. CONSTANTINESCU MIRCEA, elev cl. X Liceul de băieți Nr. 1 București (4; 8; 11; 12; 13).
19. SAVIN DAN, elev anul II Școala Tehnică de cărbuni, C. Lung-Argeș (5; 8; 9; 12; 15).
20. ABDULAMIT MUTLU, elev anul IV Școala Hidrotehnică Constanța (4; 5; 9; 11; 12).
21. OPREA A. AURELIU, elev cl. VIII Liceul Târgoviște (4; 5; 8; 12).
22. MÂNDRU ANATOLIE, cl. XI Liceul de băieți Nr. 10 București (4; 5; 11; 15).
23. ANTON VASILE, elev cl. XI Liceul de băieți Nr. 5 București (4; 5; 12; 15).
24. LAZĂR ALDO IORAM, cl. XI, Liceul de băieți Roman (4; 5; 8; 15).
25. ȘINCAN CORNELIU, elev cl. XI Liceul de băieți Nr. 10 București (4; 5; 9; 12).
26. HAMMER LADISLAU, elev cl. X Liceul Belloyanis Timișoara (4; 9; 12; 13).

27. FILIMON RODICA, elev cl. IX Liceul de fete Nr. 1 București (5; 8; 12; 15).

28. SCHILERU DINU, elev cl. VII Școala Nr. 4 București (8; 9; 12; 15).

29. TIHAN ALEXANDRU, elev cl. XI Liceul de băieți Galați (8; 9; 13).

30. PETROVICI LIVIU, elev cl. XI Liceul de băieți Oradea Mare (8; 9; 12).

31. SCUTELNICU CONSTANTIN, elev cl. XI Liceul de băieți Dorohoi (8; 9; 12).

32. CULIȚĂ T. CEZAR, elev cl. XI Liceul de băieți Focșani (9; 14).

33. BĂRBULESCU T. ALEXANDRU, elev anul III Școala medie tehnică Pitești (12; 13).

34. MIHAI IULIAN, elev cl. X Liceul de băieți Ploești (9; 12).

35. PANTEA ALEXANDRU, elev Liceul seral Petroșani (9; 13).

36. CLONDA OVIDIU, elev cl. IX Liceul de băieți Tg. Jiu (8; 12).

37. CIGAN LEONTIN, elev cl. X Liceul de băieți Carei (8; 15).

38. DIHORU VALENTIN, elev cl. XI Liceul de băieți Buzău (9; 15).

39. PUPĂZAN NICOLAE, elev cl. X Școala medie « D. Cantemir » Predeal (9; 13).

40. CHELBA CONSTANTIN, elev cl. X Liceul de băieți Rădăuți (8; 12).

Se premiază și activitatea deosebită a unor absolvenți de școală medie, în prezent studenți la diferite Institute de Învățământ Superior din întreaga țară. Lor li se acordă drept premiu câte un abonament pe anul 1953 la publicațiile: « Gazeta Matematică și Fizică » și « Revista Matematică și Fizică ».

Dăm mai jos numele absolvenților premiați:

1. Gioncu Victor, 2. Dudiță Florea, 3. Goia Miron, 4. Papina Radu, 5. Bordeian Stelian, 6. Bunea Stelian, 7. Ciolac Ion, 8. Goia Ion, 9. Dobrescu Andrei, 10. Grigorescu Ligia, 11. Scurtu Florin, 12. Bercea Gh., 13. Raicu Alexandru, 14. Silișteanu Mihai, 15. Istrate Gh. Const., 16. Munteanu Ion, 17. Couți Romeo, 18. Nahaiciuc Mihai, 19. Truică N., 20. Beucă Eugen, 21. Dumitrescu Cornel, 22. Rudeanu Sergiu, 23. Mihalcea Ștefan, 24. Nicolae Petre.

Dăm lista cărților acordate ca premiu elevilor de școală medie, cu numerele lor de ordine:

1. Fizica Atomică, de Spolski; 2. Geometrie Superioară, de Efimov; 3. Mecanica rațională, vol. II, de Suslov; 4. Probleme și exerciții de Geometrie Analitică, de Țuberbiller; 5. Nucleul Atomic, de Corsunschi; 6. Calcule Aproximative, de Bezicovici; 7. Bazele Electrotehnicii, vol. I, de Crug; 8. Nomografie, de Pentcovschi; 9. Probleme de Construcții Geometrice, de Alexandrov; 10. Microscopul Electronic, de Suschin; 11. Culegere de Probleme de Mecanică, de Bucholtz; 12. Geometria lui Lobacevschi și Elementele de bază ale Geometriei, de Cutuzov; 13. Culegere de Probleme de Fizică, de Gunsberg; 14. Bazele Termoenergeticii, de Litvin; 15. Bazele Analizei Infinitezimale, de Privalov.

Rugăm pe tovarășii premiați să ne comunice pe adresa Revistei Matematice și Fizice adresa lor actuală pentru a li se expedia de urgență premiile ce li s'au acordat.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

In luna Ianuarie 1953, s'au evidențiat următorii rezolvitori de probleme din Revista Matematică și Fizică:

Udrescu Valeriu (Clasa XI-a, Pitești, *Torjescu Florin* (clasa X-a, Ploești), *Licea Ioan* (clasa X-a Galați), *Țiță I. Nicolae* (clasa XI-a, Craiova), *Dărămuș N. Teodor* (clasa XI-a, Aiud), *Mihai T. Iulian* (clasa X-a, Ploești), *Petrică Zamfira* (clasa IX-a D, Centrul Șc. 2, 10, 13 fete, București), *Racoveanu Em. Constatin* (clasa XI-a, Turnu Severin), *Mardare Petru* (clasa XI-a Bacău), *Cavaleru Alexandru* (clasa XI-a, Pitești), *Vrejoiu Constantin* (clasa XI-a, Craiova), *Zenovie Grigore* (clasa XI-a, Pitești), *Panaitescu Alexandru* (clasa IX-a, Ploești), *Petrovici L. Radu* (clasa X-a, Focșani), *Popescu Doru* (clasa X-a, Ploești), *Ioan D. Ioan* (clasa X-a, Focșani), *Botezat Radu* (clasa X-a, Rădăuți), *Cozma Mihai* (clasa XI-a, Bacău), *Popescu Milița* (clasa VIII-a Craiova, *Enescu Dumitru* (clasa XI-a, Pitești), *Covaci Fl. Andrei* (clasa X-a, Oradea Mare), *Țifui Vasile* (clasa XI-a, Piatra Neamț), *Mitu Velicu* (clasa X-a, Giurgiu), *Dănilă Sofia Monica* (An. II Șc. Ped. Giurgiu), *Mândru Anatolie* (Clasa XI-a, L. B. 10 București), *Davidescu Ilie* (Clasa XI-a, Piatra Neamț), *Buzdugan Ion* (clasa XI-a, Aiud).

★

Până la 25 Ianuarie 1953, s'au mai primit cel puțin cinci soluții bune la probleme propuse în Revista Matematică și Fizică în anul 1952, *dela următorii rezolvitori:*

AIUD. Liceul mixt. Clasa XI-a. Buzdugan Ion (518, 528, 533, 536, 537, 550, 554, 555, 563, 583, 591, 597, 604, 605, 608, 611, 621, 624, 625, 629, 638, 650, 655, 658, 677), Dărămuș N. Teodor (514, 518, 522, 528, 536, 537, 541, 545, 550, 553, 554, 555, 561, 563, 571, 578, 581, 583, 591, 592, 597, 603, 604, 605, 607, 611, 621, 624, 625, 629, 630, 633, 638, 642, 650, 651, 658, 663, 673, 677), Olteanu Victor (528, 536, 537, 550, 554, P).

ALEXANDRIA. Liceul mixt. Clasa VIII-a. Ceampuru I. Stelian (E: 204, 213, 217, 218, 222, 223, 227, 230, 231), Clasa IX-a, Georgescu I. Emil (618, 651, 666, E: 176, 203, 207, 208, 209, 213, 218, 228, 230), Nițu Gh. Petre (611, 615, 652, 655, E:206, 218), Clasa X-a. Rădulescu Ileana (504, 514, 518, 525, 543, 568, 578, E: 158, 173).

ALBA IULIA. Liceul de băeți. Clasa XI-a. Romoșan S. Nicolae (597, 608, 618, 621, 633, 670, P).

ARAD. Liceul de băeți. Clasa IX-a. Stănoiu Alexandru (615 E: 155, 159, 160, 167, 197, 213, 216, 218, 225, 230).

BACĂU. Liceul de băeți. Clasa VIII-a. Palaghiță I. Ștefan (E: 213, 216, 217, 218, 220, 223), Clasa XI-a. Cozma Mihai (527, 543, 550, 554, 555, 556, 583, 585, 604, 607, 608, 621, 632, 654, 653, 663, 664, 666, 669, 670, 678, 685, 687, 693), Mardare Petru (518, 533, 537, 540, 554, 555, 556, 568, 574, 587, 590, 598, 600, 607, 609, 611, 615, 625, 627, 630, 632, 633, 634, 636, 653, 657, 664, 666, 670, 678, 682, 683, 685, 687, 690, 691, 693, 698), Weininger Igo (518, 536, 554, 611, 633, 655, 658, 685).

BÂRLAD. Liceul de băeți. Clasa IX-a. Ibănescu I. Vasile (E: 213, 215, 217, 218, 220, 221, P), Dumitriu Constantin (E: 203, 208, 209, 213, 216, 218, 223, 224), Clasa XI-a. David Alexandru (527, 623, 631, 632, 633, 635, 670).

BOTOȘANI. Școala medie de textile. Anul III. Turcuman Maria (541, 543, E: 184, 213, 217, 218).

BUCUREȘTI. Liceul 1 fete. Clasa IX-a A. Belgrader Mariana (652, 734, E: 171, 235, 236, P) Cruceanu Viorica (593, 597, 601, 613, 632, 670, 676, 679, 682, 699). Clasa XI-a B, Dumbravă Doina (673, 676, 679, 681, 682). Liceul 1 băeți. Clasa IX-a. Nicolae Șt. Alexandru (518, 537, 541, 615, 621). Centrul școlar 2, 10,13 fete. Clasa IX-a D. Petrică Zamfira (514, 532, 533, 550, 552, 554, 555, 560, 561, 564, 567, 569, 576, 578, 583, 585, 586, 588, 606, 615, 672, 674, 675, 676, 677, 679, 681, 682, 694, 695, 703, 704, 705, 706 707, E: 169, 216, 221, 222), Timoficiuc Natașa (E: 213, 216, 217, 218, 221, 222), Wechsler Henriette (679, 685 691, 693, E: 213, 217, 218, 221, 223, 225, 226, 230). Liceul 3 băeți. Clasa VII. Marinescu Gabriel (E: 156, 165, 175, 204, 223). Clasa IX-a. Chear Ștefan (E: 156, 213, 216, 217, 218, 220, 221, 223, 224, 226, 228, 236, 239, 240), Clasa X-a. Nejloveanu Trandafir (615, 633, 655, 658, 665, 691, E: 216, 218, 220, 223), Școala elementară 3 băeți. Clasa VII-a. Harnik Victor (E: 156, 159, 194, 185, 186, 220, 223, 231), Liceul 4 fete. Clasa VII-a Florescu Sanda (E: 203, 204, 206, 209, 213, 215, 218, 225, 228, 230). Școala elementară 4 băieți. Clasa VII-a. Schileru Dinu (E: 223, 224, 225, 226, 227, 228, 230, 231, P). Liceul 5 băeți. Clasa IX-a. Dașcu Panait (536, 397, 613, 615, 618, 658, 679, E: 157, 175, 176, 182, 192, 173, 197, 199, 207, 209, 213, 217, 218, 220, 223, 224, 225, 226, 228, 230, 231, 232, P). Liceul 6 băeți. Clasa VIII-a A. Popovici I. Radu (E: 223, 224, 225, 227, 228, 230, 231, 232, 236, 239, 240), Clasa IX-a B. Kestenband Barbu (539, 548, 574, 582, 587, 600, 603, 617, 625, 627, 659, 683, 692, 693, 694, 705, 707, E: 172, 187, 205, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, P), Clasa XI-a A. Barșa D. Constantin (630, 633, 655, 670, 683, 685), Sandovici Mihai (644, 651, 652, 658, 665, 666, 670, P), Vasile Ion (502, 550, 618, 651, 664, 672, 675). Liceul 7 băeți. Clasa IX-a B. Ionescu Gabriel (654, 655, 658, 724, P), Clasa X-a. Ianovici Mircea (630, 632, 633, 643, 655, 658, 666, 670), Clasa XI-a A. Sandu I. Dorin (534, 536, 537, 543, 568, 574, 583, 585, 591, 597, 604, 609, 611, 615, 628). Liceul 8 băeți. Clasa VI-a. Gavrilă Horia (E: 223, 225, 227, 228, 230, 232), Clasa X-a B. Teodosiu Cristian (514, 536, 550, 554, 578, 633, 651, 658). Liceul 10 băeți. Clasa VII-a. Baciu Valeriu (E: 217, 218, 225, 227, 230, 232, 239, 240), Costea Nicolae (E: 225, 227, 231, 232, 239), Constantinescu Nicolae (E: 203, 204, 209, 225, 231, 239), Ion V. Petre (E: 217, 218, 225, 227, 232, 235), Ionescu Carol (E: 218, 225, 227, 230, 231, 232, 233, 240), Marinescu Dumitru (E: 204, 209, 223, 227, 230, 231, 239), Nistreanu N. Valeriu (E: 204, 218, 223, 225, 227, 230, 231, 232, 239, 240), Pârvulescu Alexandru (E: 225, 227, 230, 232, 239), Popa V. Mircea (223, 225, 227, 230, 231, 232, 233, 239, 240), Șteflea Nicolae (E: 213, 218, 223, 231, 232), Săvulescu Ion (E: 217 223, 225, 227, 232, 239), Staicu Vasile (E: 213, 215, 217, 218, 227, 230, 231, 232). Clasa VIII-a. Curciur Aurel (E: 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232), Constantinescu Teodor (E: 213, 215, 225, 228, 232), Eghiz Simion (E: 213, 215, 225, 228, 230, 232, 235), Grigorescu Nicolae (213, 217, 225, 230, 239), Mara I. Alexandru (E: 200, 211, 233, 234, 239), Păduraru Octavian (E: 193, 203, 204, 223, 239), Sandu Ion (632, E: 155, 156, 157, 207, (209, 213, 216, 218, 225, 230, 232, 239), Stănășilă N. Octavian (E: 155, 156, 157, 159, 160, 175, 185, 186, 190, 213, 218, 220, 225, 226, 231), Teodorescu Dan (E: 185, 225, 228, 230, 232). Clasa X-a B. Andreescu Mircea (607, 614, 617, 621, 627, 628, 630, 658, 666, 667, 672, 685). Clasa XI-a A. Mândru Anatolie (533, 537 ,554, 556, 559, 561, 562, 563, 568, 571, 572, 573, 574, 582, 583, 589, 597, 603, 604, 605, 608, 624, 633, 641, 651, 655, 658, 659, 664, 666, 670, P) Pascali Maximilian (651, 655, 658, 664, E: 207, 208), Pașcu D. Constantin (503, 520, 522, 554, 608, 633, 641, 670), Șincan Corneliu (567, 578, 685, 709*, 714*, 716, 720, 723, 724, 728, E: 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 232).

Liceul 12 fete. Clasa 8-a. C. Dumitrescu Milena (E: 223. 224, 225, 226, 228), Liceul seral « I. C. Frimu » Clasa XI-a. Stoicescu Theodor (618, E: 185, 204, 213, 217, 218). Școala medie de măsurători terestre. Anul II D. Moga Emil (687, 724, E: 220, 223, 236), Școala medie mecanică Nr. 1. Anul IV. Sârbulescu Ion (685, 686, E: 223, 225, 228, 230). Școala elementară Chitila. Clasa VI-a. Chițimia M. Eustațiu (E: 150, 151, 152, 155, 156). Fără indicație de școală. Mincu C. Gheorghe (502, 517, 530, 568, 664, 666, 672).

BUZĂU. Clasa IX-a. Sandu Eugen (608, 633, 669, 670, 675, E: 213, 217), Clasa X-a. Castravete Gheorghe (685, 690, E: 223, 224, 225, 227), Golianu Petru (504, 521, 527, 543, 574, 585, 587, 618, 655, 666, 685, E: 161, 193, 197, 200, 202, 203, 204, 209, 210, 213, 216, 217, 218, 220, 221, 222, 232), Negulescu P. (514, 521, 655, 659, 664). Pavel Gh. Constantin (514, 527, 608, 611, 625, 633, 635, 643, 655, 658), Stoicescu T. Dumitru (528, 603, 611, 622, 654, 659, 663, 670, 685), Școala medie tehnică de Construcții civile. Anul II. Tudor T. Gheorghe (538, E: 159, 207, 213, 218).

CĂLĂRAȘI. Clasa X-a. Rădulescu Ion (651, 663, 664, 670, 683, 648, 702, 703), Vasilescu Constantin (621, 650, 651, 665, 669, 670).

CÂMPINA. Școala medie tehnică de petrol Nr. 2. Dima Gh. Aurelian (518, 536, E: 156, 157, 158, 161, 163, 165, 170, 172, 173), Banghea Oprea (501, 514, 517, 582, 611, 615, 618, 665, 666, 678, 685, 686, 703*, 707*). Liceul mixt. Clasa IX-a. Bruda Rodica (707*, E: 216, 217, 218, 220, P), Clasa XI-a. Neagu Vasile (685, 691, 718, 721, 724, E: 225, 226, 228, 230, 231), Rotaru Gh. Alexandru (539, 543, 574, 666, 685, E: 207, 208, 222, 225).

CÂMPULUNG-MUSCEL. Clasa IX-a. Irimia Carmen (517, 518, 536, 611, 658, E: 157, 172, 207. 216). Clasa X-a. Popescu Sanda (514, 518, 578, 608, 621, 658, 670, E: 217, 220, 233, 224), Școala medie de Agricultură. Anul III. Corneci Gheorghe (663, 685, 718, 730, E: 213, 216, 217, 218, 223).

CÂMPULUNG-MOLDOVENESC. Școala medie tehnică de Construcții. Anul II. Răileanu Gheorghe (548, 590, 595, 598, 600, 607, 608, 612, 615, 618, 627, 630, 633, 641, 642, P).

CARACAL. Clasa XI-a. Băică M Paul (521, 526, 530, 539, 568, 578, 580, 589, 598, 607, 608, 615, 618, 621, 629, 630, 631, 633, 641, 663, 666, 670, 673, P), Economu C. Apostol (569, 578, 590, 627, 630, 664, 666, 670, 686, 716, 720, 721, E: 160, 164, 165, 171, 194, 195, 220, 223, 224, 225, 227, 228 230, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, P), Predeteanu Nicoale (E: 156, 158, 161, 193, 202, 213, 216, 217, 218, 223, 229).

CARANSEBEȘ. Liceul mixt. Clasa IX-a. Ciric Ion (530, 540, 552, E: 170, 172, 176, 228), Udrițe Ioan (E: 213, 214, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 222, 224, 225, 226, 228). Clasa X-a. Vela Mihai (609, 627, 634, 568, 664, 670, 691, E: 192, 197, 200, 208, 213, 217, 218). Școala tehnică

Könyvtár TULAJDONA

Silvică. Anul III. Loziciu I. Ilie (633, 670, E: 160, 164, 200, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209).

CAREI. Liceul mixt. Clasa XI-a. Vaida Gheorghe (570, 576, 581, 588, 608, 610, 615, 629, 630, 633, 648, 658, 670, 685, 687), Clasa VII-a elementară. Gliga Doina (165, 171) 206, 213, 218).

CLUJ. Liceul 3 băieți. Clasa IX-a. Constantinescu Florin 536, 537, 591, 611, 632, 634, 641, 655, 676, E: 158, 218, 222), Muscalu C. Ștefan (663, 664, 666, 685, E: 217, 218, 220).

CONSTANȚA. Clasa VIII-a. Cristea I. Ion (611, 615, 621, 632, 633, 655, 658, E: 193, 215, 222), Clasa IX-a. A Dumitrescu M. Romeo (E: 213, 217, 220, 225, 230), Iusuf Timucin (571, 629, 663, 649, 666, 670, 676, 685, 716, 717, 718, 720, 721, 734), Clasa X-a. Cocoș Emanuel (517, 518, 528, 536, 537, E: 156, 157, 203, 204, 205), Școala medie tehnică. Anul II. Ionescu I. Nelu (615, 658, 685, 703*, 704*, 706, 707, E: 193, 206, 208, 213, 217, 218, 228, 230, 233), Panciu Ion (665, 670, 685, 703, E: 213, 215, 217, 218), Poenaru P. Mircea (667, 685, 703*, 704*, E: 217), Anul III Fotescu T. Nicolae (631, 633, 648, 666, 670, 685, 686, E: 161, 193, 223), Anul IV. Buzețelu Constantin (569, 574, 577, 621, 630, 631, 643, 658, 665, 666, 670, 671).

CORABIA. Liceul mixt. Clasa IX-a. Popescu Alexandru (611, 633, 652, 655, E: 198), Stovre Petre (691, 701, 703*, 707* E: 222, 224, 225, 226, P) Clasa XI-a. Filipescu Eugen (665, 678, E: 213, 216, 218, 223, P).

CRAIOVA. Liceul 1 fete. Clasa VII-a. Florea P. Lidia (E: 160, 174, 175, 176, 192, 213, 217, 218, 223). Clasa VIII-a. Popescu Milița (658, E: 156, 157, 158, 159, 160, 161, 163, 164, 167, 176, 179, 180, 181, 190, 192, 206, 207, 208, 213, 214, 215, 216, 218, 221, 222, 223, 224, 225, 228, 230), Clasa IX-a. Popescu Cireșica (537, 611, 613, 615, 621, 658, E: 157, 160, 176, 185), Șchiopu Eugenia (615, 651, 658, E: 197, 200, 208, 223, 225, 228, 230), Cetățeanu Cecilia (536, 587, 621, 632, 655, 685), Clasa XI-a A. Popescu Silvia (517, 536, 537, 560, 582, 583, 611, 615, 618, 621, 632, 633, 658), Florea C. Paula (504, 518, 525, 537, 574, 581, 634, 643, 666, 670, 685, 687, E: 213, 214, 215, 216, 217, 218, 221, 223, 226, 227, 228, 230), Gheorghiu Steliana (585, 604, 621, 630, 633, 634, 666, 670, 685, 703*, 705*, E: 195, 200, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 220), Șerban Ileana (685, 687, 703, 704, 705, 706, E: 212, 223, 226, 228. Liceul 1 băeți. Clasa VIII-a. Nimbus V. James (E: 216, 223, 225, 230, 231), Șerban I. Radu (E: 213, 215, 216, 217, 218, 220, 223, 225, 226, 228, 230). Clasa IX-a. Popescu I. Daniel (655, 658, E: 156, 160, 175, 176, 197, 198, 200, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 223, 225, 226, 230, 236, 239) Clasa X-a. Istinie Crăciunel (691, E: 157, 159, 160, 176, 197, 200, 207, 208, 213, 222, 223, 225, 228, 231, P), Clasa XI-a. Dinu Constantin (517, 536, 618, 630, 632, 643, 655, 685, E: 165, 173, 193, 197, 208, 216), Tița I, Nicolae (532, 540, 543, 550, 561, 562, 563, 567, 568, 574, 578, 583, 612, 613, 625, 629, 654, 665, 666, 671, 674, 681, 685, 687, 690, 691, 698, 701). Liceul 2 băeți. Clasa X-a. Cazanacli Nicolae (664, 665, 670, 673, 674, 682, 684, 691, 703*, 705*, 707*,), Marciu Gr. Marius (665, 670, 703*, 704*, 703*, 706*, E: 213, 215, 216, 217, 219, 220). Vrejoiu Constantin (521, 528, 537, 554, 561, 563, 583, 588, 591, 598, 608, 611, 615, 629, 630, 632, 633, 651, 652, 655, 658, 673, 685, 691, 693, 695, 696, 701, 703*, 705*, P), Zidăroiu Gh. Cornelius (514, 582, 591, 601, 604, 655, 664, 681, 682, 691, 695, P), Școala medie tehnică Construcții C. F. R. Anul IV. Vasile Alexandru (536, 574, 578, 604, 633, 635, 664, 670, E: 200, 217, 218, 220). Școala elementară Salcia Filiaș. Clasa V. Dănănău C. Eugen (159, 176, 202, 207, 208).

DOROHOI. Clasa XI-a. Munteanu Marcel (533, 603, 616, 642, 675, 682, 685, 691, 693, 696, 703*), Scutelnicu Constantin (570, 582, 621, E: 207, 208, P).

FĂGĂRAȘ. Clasa XI-a. Stelea Nicolae (501, 503, 505, 511, 578, 608, 621, 651, 670, 685, 687, 718, 724), Trifu Romulus (558, 580, 600, 608, 621, 629, 640, 643, 651).

FĂLTICENI. Clasa XI-a. Mitoșeru Th. Constantin (504, 528, 538, 543, 545, 548, 555, 560, 561, 564, 565, 567, 573, 574, 584, 586, 587, 590, 591, 593, 598, 601, 602, 603, 605, 607, 610, 613, 623, 624).

FOCȘANI- Casa X-a. Ioan D. Ioan (509, 514, 521, 534, 551, 550, 588, 593, 597, 598, 603, 604, 607, 608, 609, 610, 613, 630, 651, 662, 675, 679, 681, 682, 685, 693, E: 222, P), Petrovici L. Radu (504, 543, 545, 550, 554, 561, 563, 567, 572, 576, 578, 581, 583, 585, 591, 604, 608, 613, 615, 620, 621, 627, 630, 632, 633, 643, 655, E: 175, 159, 231, P), Școala Profesională Industria Lemnului, Gugești. Anul II C. Ciocan Veronica (E: 188, 192, 198, 200, 201, 202, 223, 224, 225, 228, 230).

GIURGIU. Școala pedagogică. Anul II. Dănilă Sofia Monica (517, 518, 525, 527, 534, 540, 542, 548, 568, 590, 591, 592, 593, 595, 609, 630, 644, 666, 685, E: 156, 165, 167, 176, 180, 181, 183, 184, 197, 203, 204, 205, 218, 225, 230). Școala medie tehnică Agricolă. Anul II. Popescu Petru (615, 629, 643, 666, 685), Anul IV. Laudă P. Aurel (E: 142, 147, 148, 213, 216). Liceul de băeți. Clasa VIII-a Cazacu A. Dumitru (E: 172, 210, 213, 223, 225, 230),

(urmarea în numărul 4 R.M.F.)

REDACTAREA SOLUȚIILOR

Pe aceeași foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul complect al problemei. Se pot scrie în continuare și pe contrapagină; iar dacă soluția necesită figură, se va desena cu îngrijire.

— Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie.

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluție, numele, școala, clasa și localitatea.

— La orice problemă propusă se primesc soluții cel puțin timp de 6 luni dela publicarea enunțului.

— Se mai primesc soluții la problemele cu numărul de ordine: 529, 532, 533, 534, 535, 538, 543, 544, 546, 548, 549, 551, 552, 579 și următorarele; iar pentru elementar, la exercițiile: E: 180 și următoarele.

— Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse și însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți ca să înceapă a propune probleme, după ce au soluționat un număr mare de exerciții și probleme.

— Intrucât sosesc la redacție cereri de numere mai vechi ale revistei, sau reclamații ale abonaților de neprimirea revistelor; vă informăm că pentru abonamente și procurări de reviste să vă adresați Centrului de difuzare a presei, după cum se arată pe coperta revistei.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice și fizice, articole, dări de seamă asupra activităților cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, sugestii și propuneri, etc. se trimit pe adresa: Revista Matematică și Fizică, Strada Dionisie Lupu 40, parter, Raionul Stalin, București.

CĂRȚI APĂRUTE ÎN

EDITURA TEHNICĂ

B. IOSUB

Matematici recreative

160 pagini — 5,87 lei

M. I. P.

Tabele și formule matematice

410 pagini — 10 lei

I. I. ALEXANDROV

Probleme de construcții geometrice

(traducere din limba rusă)

202 pagini — 9 lei

S. E. FRIS și A. V. TIMOREVA

Curs de fizică generală

(traducere din limba rusă)

volumul I, 504 pagini — 26,50 lei

volumul II, 592 pagini — 26,60 lei

C. 365. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4. — București.

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E1426/0C

KAT

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEH - ... RE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

Tineri și tinere! Munciți cu tot entuziasmul și avântul vostru tineresc pentru însușirea științei, tehnicii și culturii! Fiți dârzi și curajoși, gata să învingeți orice greutăți! Sporiți prin munca voastră succesele poporului nostru în construirea socialismului!

(Din Chemările de 1 Mai 1953 ale Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Român)

★ ★ ★

ANUL IV

APRILIE 1953

4

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Facultăţile de Matematică şi Fizică*	77
2.	*Operaţii aritmetice cu puncte, de Oscar Kreindler*	79
3.	*Stroboscopia, metodă de cercetare a mişcărilor periodice, de N Stănescu*	85
4.	*Construirea prin mijloace proprii a unui aparat pentru demonstrarea undelor staţionare, de V. Pavlu*	91
5.	*Probleme rezolvate (284, 285, 315, 394, 418, 451, 509, 557, 558, 575, 576, 589, 590, 591, 592, 594, 595, 596, 597, 598, 599)*	92
6.	*Probleme propuse (807—835)*	99
7.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E. 276—E 289)*	101
8.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	103

ANUL IV 4 APRILIE 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA; Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 4 Aprilie 1953

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

Institut. de Documentare Tehnică BUCUREŞTI SCHIMB - ECHANGE VYMENA - WYMIANA TAUSCH - CMEHA

ÎN AJUTORUL TINERILOR CARE SE PREGĂTESC SĂ INTRE ÎN INSTITUTELE DE ÎNVĂŢĂMÂNT SUPERIOR

FACULTĂŢILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Înfăptuirea măreţei opere de construire a socialismului în patria noastră, necesită cadre noi, temeinic pregătite, având la baza întregii lor activităţi cea mai înaintată teorie, învăţătura lui Marx-Engels-Lenin-Stalin.

In cuvântarea rostită la Congresul învăţătorilor din R.P.R., tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej, iubitul conducător al poporului nostru, a arătat că sarcina învăţământului este « de a făuri cadre noi, necesare construcţiei socialiste, capabile să aplice în viaţă ştiinţa şi tehnica nouă ». A arătat că tineretul trebue să-şi însuşească acea ştiinţă înaintată, care serveşte interesele poporului şi care este strâns legată de viaţă, de practică, de producţie.

Pentru a făuri cadre noi de specialişti în toate domeniile ştiinţei, învăţământul din patria noastră a fost fundamental reorganizat, zdrobindu-se vechea orientare de esenţă burgheză a învăţământului. « La baza concepţiei regimului de democraţie populară asupra învăţământului, stă nu cultul morţii, ci cultul vieţii, cultul muncii creatoare, cultul luptei dârze pentru fericirea poporului » (din cuvântarea rostită la Congresul Invăţătorilor din R.P.R. de tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej).

Matematica şi Fizica constitue două sisteme ştiinţifice de cercetare a lumii materiale şi a materiei în mişcare. Ele tind să descopere anumite legi obiective ale naturii care urmează a fi puse în slujba ridicării buneistări şi a unei vieţi fericite pentru clasa muncitoare. Deaceea aceste ştiinţe au un rol deosebit în munca de construire a socialismului.

Facultăţile de Matematică şi Fizică din patria noastră au rolul de a pregăti cadre pentru învăţământul superior şi mediu, ca şi cercetători pentru Institutele Academiei R.P.R. şi marile laboratoare industriale. Aceste elemente au sarcina de a contribui cu tot entuziasmul lor la progresul ştiinţei.

Sub regimul burghezo-moşieresc oamenii de ştiinţă trebuiau să se ţină departe de tehnică. Ei duceau o existenţă obscură. Matematicienii nu erau preocupaţi de aplicaţiile practice; ei se închideau în domeniul matematicilor aşa zise « pure ». Fizicienii erau simple unelte ale capitalismului român sau străin, cărora li se înăbuşea orice iniţiativă creatoare. Ei constituiau un monopol al exploatatorilor. O latură caracteristică societăţii burgheze era tocmai prăpastia dintre munca intelectuală şi cea fizică. Oamenii de ştiinţă burghezi, cu rare excepţii, constitue în societatea capitalistă, un instrument pentru permanentizarea exploatării, un instrument pus în slujba distrugerii. Astfel „fizicianul" american Morrison *vorbind despre ştiinţa americană, o caracterizează ca « făuritoare de arme pentru un nou război şi mai îngrozitor ». Iată ce cult stă la baza activităţii societăţii burgheze.*

Partidul Muncitoresc Român şi Guvernul Republicii Populare Române, conducând cu clarviziune munca eroică a poporului nostru muncitor, cu ajutorul multilateral al Uniunii Sovietice, zdrobeşte zi cu zi moştenirea lăsată de guvernele burgheze şi construeşte o lume nouă, o viaţă nouă. S'au creiat condiţii nemaîntâlnite în ţara noastră, ştiinţei şi culturii. Scopurile învăţământului şi ale activităţii ştiinţifice s'au schimbat.

Oamenii de ştiinţă sunt preocupaţi de transformarea naturii în interesul omului, îşi dau seama că dezvoltarea ştiinţei e condiţionată de producţie, contribue activ, prin descoperirile lor, să scoată la iveală şi să folosească bogăţiile şi forţele naturii.

Facultăţile de Matematică şi Fizică trebue să pregătească oameni de ştiinţă legaţi de nevoile producţiei, să dezvolte dragostea faţă de patria noastră, să pregătească elemente care să pună toată ştiinţa lor în munca de construire a socialismului, în slujba păcii, a progresului.

Prin reforma învăţământului au fost larg deschise porţile învăţământului copiilor oamenilor muncii, care cu entuziasm şi cu patriotism fierbinte îşi

însușesc știința nouă, știința înaintată. Din grija Partidului și Guvernului se crează condiții de studii din ce în ce mai bune. Marea majoritate a studenților sunt bursieri, având astfel toate condițiile necesare de a se pregăti temeinic. Cei mai buni studenți primesc burse republicane sau bursa «Gh. Gheorghiu-Dej». Au la dispoziție biblioteci bine înzestrate și laboratoare utilate din ce în ce mai bine. Cadrele didactice prin toate mijloacele, se străduiesc să dea studenților o pregătire serioasă și să-i pregătească în așa fel încât să poată fi utili muncii uriașe de construire a socialismului în patria noastră. Incă din facultate studenții sunt antrenați în munca de cercetare științifică. Sub îndrumarea profesorilor, studenții din ultimii ani duc o susținută activitate în cercurile științifice, obținând rezultate remarcabile.

La baza activității noastre stă știința marxist-leninistă. Tovarășul Gh. Gheorghiu-Dej ne învață: «In știință se desfășoară o luptă ascuțită între materialism și idealism, lupta împotriva concepțiilor idealiste, pentru triumful materialismului. Aceasta este însă și lupta pentru progresul științei». Pentru aprofundarea cunoștințelor, pentru combaterea tendințelor idealiste și reacționare din domeniul științelor matematice și fizice, cadrele didactice și studenții din facultate acordă o atenție din ce în ce mai mare pentru însușirea științei lui Marx-Engels-Lenin-Stalin.

Studenții au la dispoziție și folosesc din ce în ce mai mult în studiul lor lucrări de specialitate sovietice, însușindu-și astfel orientarea și principiile de bază, ale celei mai înaintate științe, a științei sovietice.

In cele ce urmează ne propunem să facem cunoscut tinerilor care se pregătesc pentru a intra în învățământul superior, modul cum funcționează unele din aceste Institute pentru a-i înarma cu o cunoaștere temeinică a modurilor de funcționare.

In rândurile următoare prezentăm cititorilor felul cum funcționează Facultatea de Matematică și Fizică dela Universitatea «C. I. Parhon» din București.

Facultatea de Matematică și Fizică din București în noua organizare are patru secții: 1) Matematică; 2) Mecanică; 3) Astronomia; 4) Fizica. Durata studiilor este de 5 ani.

Secția de matematici *pregătește cercetători în domeniul teoriei ecuațiilor diferențiale, teoriei funcțiunilor de variabilă reală și complexă, geometriei superioare, teoriei probabilităților și statisticii matematice.*

Foarte mulți au încă impresia că matematica este ruptă de orice aplicații practice. Elevilor încă li se prezintă această disciplină ca ruptă de practică. Ori, se știe că din cele mai vechi timpuri matematica a fost strâns legată de practică. Nevoile tehnicii au fost însăși origina primelor cercetări matematice. Herodot *atribuia nașterea geometriei necesităților agrimensurii în valea Nilului. Origina dezvoltării calculului diferențial coincide cu dezvoltarea mecanicii, etc.*

Dezvoltarea producției pe baze tehnice înaintate în statul socialist duce la aplicarea domeniilor celor mai abstracte ale matematicii în practică. Vom da câteva exemple din cercetările moderne sovietice, utilizarea teoriei numerelor la telefonie, folosirea algebrei logice la studiul mecanismelor automate folosirea topologiei combinatorii la studiul rețelelor electrice, folosirea teoriei probabilităților și statisticii matematice în fizico-chimie, astronomie, biologie, tehnică (probleme de telefonie, mișcare turbulentă, cristalizarea metalelor, structura materiei, etc.).

Secția de mecanică *pregătește specialiști în domeniul mecanicii aplicate, hidrodinamicii, aerodinamicii, teoriei elasticității. Numeroase și importante probleme stau în fața cercetătorilor. Vom da doar câteva exemple: studiul aripilor de avion, studiul rezistenței hidrodinamice, studiul infiltrării în medii poroase cu aplicații în construirea barajelor, studiul deversoarelor pentru construcția hidrocentralelor, fenomenele termoelastice, vîscoelastice, etc.*

Secția de astronomie *pregătește specialiști în astrofizică, mecanică cerească și seismologie. Cercetările astronomice se desfășoară la observatoarele astronomice din București, Cluj, Iași și Timișoara.*

La serviciul meridian se observă stelele fundamentale și variabile iar la serviciul ecuatorial se studiază planetele mici. Cercetările seismologice sunt foarte importante și sunt necesare la construcții. Existența epicentrului din Vrancea dă posibilități de studiu deosebite.

Se studiază și se adâncesc teoriile cosmogonice sovietice, mai ales ale academicianului sovietic Schmidt.

Importante sunt și studiile referitoare la petele solare cu aplicații la meteorologie, etc.

Secția de fizică *pregătește specialiști în fizica teoretică, optică, fizica atomică și nucleară, electronică.*

Astăzi este foarte cunoscut faptul că cercetările fizice au un rol deosebit în progresul tehnicii. Construcțiile de noi aparate, automatizarea proceselor de producție, ridicarea calității producției au la bază cele mai noi cuceriri din domeniul fizicii.

Cu ocazia întocmirii planului de electrificare, tovarășul Gh. Gheorghiu-Dej a arătat cât de importantă este fizica în construirea socialismului din patria noastră.

Industria noastră are nevoie de specialiști în tehnica iluminatului, spectroscopiei, specialiști pentru

construcţiile aparatelor şi instrumentelor optice, în analiza luminiscentă, cât şi de fizicieni care să lucreze în problemele de metalurgie, fizică, etc.

Fizicienii noştri au la baza cercetărilor lor realizările din Uniunea Sovietică, unde realizările din domeniul fizicii au o importanţă deosebită pentru economia naţională. Toate aceste succese ale fizicienilor sovietici sunt puse în slujba păcii. Tovarăşul G. M. Malencov *în raportul de activitate al Comitetului Central al P. C. (b) al U.R.S.S. la Congresul al XIX-lea al Partidului a arătat că «dispunând de posibilităţi reale pentru producerea energiei atomice, Statul sovietic este profund interesat ca acest nou gen de energie să fie folosit în ţeluri paşnice, pentru binele poporului, căci o astfel de folosire a energiei atomice extinde nelimitat puterea omului asupra forţelor elementare ale naturii, deschide în faţa omenirii posibilităţi uriaşe pentru creşterea forţelor de producţie, pentru progresul tehnic şi cultural, pentru sporirea avuţiei sociale».*

Iată care este adevăratul rol al fizicii.

In Patria noastră se acordă o deosebită atenţie cercetărilor din domeniul fizicii. Numeroasele probleme sovietice cât şi cele cerute de industrie cer un număr mare de fizicieni. Industria şi tehnica noastră a început să folosească din ce în ce mai mult metodele fizice. In marile laboratoare ştiinţifice industriale fizicienii au un rol deosebit de important.

Absolvenţii Facultăţiilor de Matematică şi Fizică vor putea lucra în învăţământul superior (cadre didactice), în institutele de cercetări ale Academiei R.P.R. în Institutele departamentale sau în laboratoarele industriale.

Când ne punem problema alegerii profesiunii, să nu uităm cuvintele marelui teoretician al comunismului ştiinţific I. V. Stalin: *«In faţa noastră se află o fortăreaţă. Această fortăreaţă se chiamă ştiinţa, cu numeroasele ei ramuri de cunoaştere. Această fortăreaţă trebue s'o cucerească tineretul, dacă vrea să fie constructorul vieţii noi»...*

OPERAŢII ARITMETICE CU PUNCTE

OSCAR KREINDLER
profesor la Institutul Politehnic

Calculul cu puncte, ale cărui principii le expunem mai jos are două caracteristici: pe de o parte aplică operaţiile aritmetice direct punctelor fără a utiliza drumul ocolit al coordonatelor şi pe de altă parte ne permite să transpunem direct pe figură, rezultatele obţinute prin calcul. El ne arată strânsa legătură, care există între relaţiile aritmetice şi anumite proprietăţi geometrice. Importanţa lui rezidă în faptul că din el s'a desvoltat calculul vectorial, care are o largă aplicaţie in mecanică, în electrotehnică şi în mecanica fluidelor.

Pornind dela anumite definiţii, putem efectua operaţiuni aritmetice asupra punctelor.

Punctele asupra cărora efectuăm operaţiile sunt *fixe* (desenate) în plan sau în spaţiu.

Vorbind despre punctele $A, B, \ldots$, înţelegem deci prin aceste simboale puncte existente, materiale, care ocupă un loc determinat.

Vom reaminti pe scurt un principiu de statică, şi anume acela al compunerii a două forţe paralele: dacă asupra punctelor materiale A şi B lucrează două forţe paralele de mărime λ şi μ, rezultanta lor este: 1) paralelă cu ele; 2) aplicată în C pe linia AB; 3) egală cu suma $\lambda + \mu$; 4) împarte segmentul după egalitatea $AC.\lambda = CB.\mu$ (legea pârghiilor).

Avem deci

$$(1) \qquad \frac{AC}{CB} = \frac{\mu}{\lambda}$$

şi punctul C împarte segmentul AB în raportul $\frac{\mu}{\lambda}$.

C este mai apropiat de punctul unde se aplică o greutate mai mare.

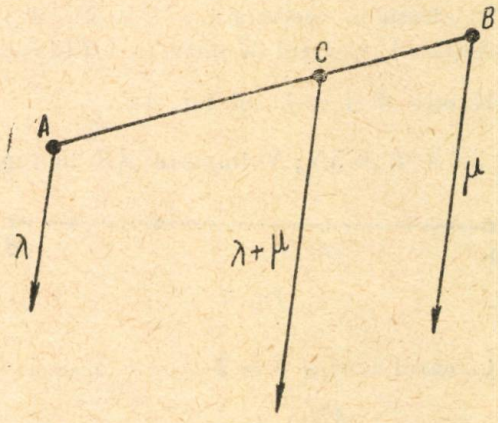


Fig. 1

Dacă forţele sunt de sens contrar, punctul C cade în afara segmentului AB.

După această pregătire, vom defini ce înţelegem prin suma a două puncte.

Fie două puncte materiale fixate în plan, A şi B. Le afectăm două numere, (doi coeficienţi sau două greutăţi) λ şi μ.

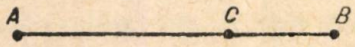


Fig. 2

Suma: $\lambda A + \mu B$ reprezintă, conform cu analogia din mecanică, un punct material C situat pe segmentul AB, afectat cu numărul $\lambda + \mu$ şi care împarte AB în raportul $\mu : \lambda$.

Scriem această operaţie simbolic astfel:

$$\lambda A + \mu B = (\lambda + \mu) \cdot C \tag{2}$$

Numerele λ, μ şi $\lambda + \mu$ sunt «greutăţile» sau coordonatele punctelor respective. Ele caracterizează operaţiile geometrice pe care trebue să le efectuăm pentru a ajunge dela A şi B la punctul C, care reprezintă ca poziţie suma lor.

Scriind egalitatea (2) sub forma

$$\lambda A + \mu B - (\lambda + \mu) C = 0$$

şi notând

$$-(\lambda + \mu) = \nu$$

avem

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0 \tag{3}$$

cu condiţia

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

Observare importantă: Dacă trei puncte din plan sunt legate de relaţia (2) sau (3), ele sunt coliniare.

Să facem câteva aplicaţii.

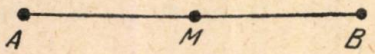


Fig. 3

I. Să efectuăm operaţia $A + B = 2M$ (A şi B au «greutăţile» 1) punctul M împarte AB în raportul $\frac{1}{1}$; el este deci mijlocul lui AB.

II. $2A + B = 3N$; N împarte AB în raportul

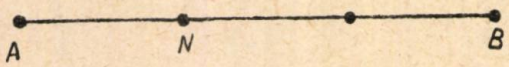


Fig. 4

$\frac{1}{2}$; în cazul nostru $\lambda = 2$ şi $\mu = 1$ deci

$$\frac{AN}{NB} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{2}.$$

Efectuăm operaţia geometrică indicată prin adunarea de mai sus, împărţind AB în 3 părţi egale (adică în $\lambda + \mu$ părţi egale) şi luând pe N la distanţa 1 (adică μ) de A.

III. In operaţia $P + 2Q = 3R$, împărţim segmentul PQ tot în 3 părţi egale dar îl luăm pe R

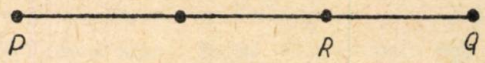


Fig. 5

la distanţa 2 (adică μ) de P.

IV. In mod analog $2B + 3C = 5X$

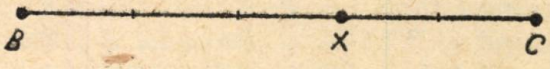


Fig. 6

$$\lambda + \mu = 5$$

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{3}{2}.$$

V. Pentru a efectua scăderea a două puncte, o transformăm, după regulile algebrei, într'o adunare

Operaţia $2B - C = D$ este echivalentă cu $2B = C + D$.

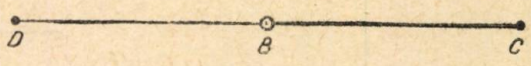


Fig. 7

B şi C fiind punctele date, rezultă că scăzându-le potrivit cu relaţia dată, B va fi mijlocul lui CD. Vom prelungi deci segmentul BC, dincolo de B cu încă odată lungimea lui. Observăm că D este de partea punctului B, care are «greutatea» mai mare.

VI. Fie de efectuat scăderea:

$$5B - 3C = 2X \quad \lambda = 5; \quad \mu = 3;$$
$$\lambda - \mu = 2.$$

Vom avea relaţia echivalentă

$$3C + 2X = 5B$$

adică B împarte pe CX în raportul $\frac{2}{3}$.

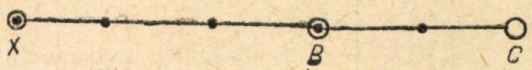


Fig. 8

Prin construcţie procedăm astfel: împart BC în 2 părţi (în $\lambda - \mu$ părţi) egale, şi port dincolo de B (punctul cu «greutatea» mai mare) 3 părţi (μ părţi).

VII. Să efectuăm scăderea: $2B - 6C = 4X$.

Impart BC în 4 părţi egale şi port dincolo de

Fig. 9

C două părţi Intr'adevăr construcţia satisface egalitatea echivalentă $2B + 4X = 6C$.

Evident că putem face suma algebrică a mai multor puncte, adunând două dintre ele, suma lor cu al treilea și așa mai departe.

Să efectuăm asupra trei puncte date (desenate) A,B,C operația:

$$B + C - A = X.$$

Vom avea succesiv

$$B + C = 2M$$

$$2M - A = X.$$

X este deci al patrulea vârf al paralelogramului

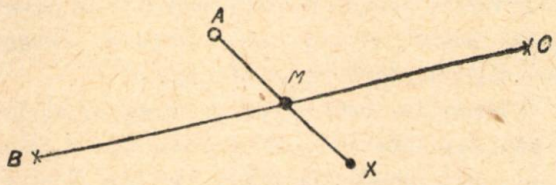


Fig. 10

determinat de A, B și C (BC fiind o diagonală).

Ce reprezintă:

$$4B + 3C - 6A = X^2$$

$$4B + 3C = 7M$$

$$7M - 6A = X$$

Avem

$$6A + X = 7M$$

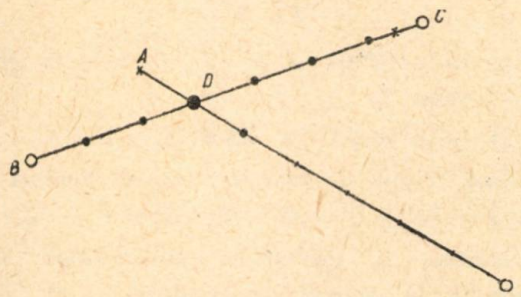


Fig. 11

Deci construcția este justificată.

Să reprezentăm punctul X dat de operația

$$4B - 2C - A = X$$

unde A, B, C sunt vârfurile unui triunghi și să spunem cu care perechi de puncte este colinear X.

Egalitatea

$$4B - 2C - A = X$$

este echivalentă cu

$$4B = X + 2C + A;$$

efectuăm:

$$2C + A = 3M$$

avem

$$3M + X = 4B$$

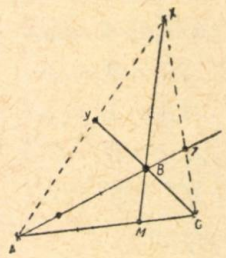


Fig. 12

Prelungim MB dincolo de B cu trei lungimi MB.

Scriind egalitatea sub forma

$$4B - 2C = A + X \quad \text{și} \quad 4B - 2C = 2Y.$$

avem

$$2Y = A + X,$$

deci X este colinear cu A și Y și Y este la mijlocul lui AX.

Scriind egalitatea sub forma

$$4B - A = 2C + X \quad \text{și} \quad 4B - A = 3Z$$

avem

$$3Z = 2C + X,$$

deci X este colinear cu C și cu Z și Z împarte XC în raportul 2:1.

Din acest exercițiu putem deduce un principiu.

Am avut:

$3M + X = 4B \cdots B$ colinear cu X și M

$2C + 2Y = 4B \cdots B$ colinear cu Y și C

și $A + 3Z = 4B \cdots B$ colinear cu Z și A.

Punctul B fiind colinear cu trei perechi de puncte (M, X) (C, Y) și (A, Z) rezultă că dreptele MX, CY și AZ sunt concurente.

Folosind acest principiu putem arăta că trei drepte definite prin A_1A_2, B_1B_2 și C_1C_2 sunt concurente, dacă putem găsi un punct X colinear respectiv cu punctele A_1A_2, B_1B_2 și C_1C_2.

Să aplicăm acest principiu la punctul dat de suma

$$-\frac{3}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{4}A = -\frac{5}{4}X.$$

In acest exemplu «greutățile» punctelor sunt numere fracționare și pentru a simplifica atât calculele cât și construcțile aferente, înmulțim relația cu 4 (operație permisă).

$$-6B + 2C - A = -5X$$

sau schimbând semnele:

$$6B - 2C + A = 5X$$

a) Notăm $6B - 2C = 4A'$

sau $(3B - C = 2A')$

$C + 2A' = 3B$

avem $4A' + A = 5X$

b) notăm $2C - A = B'$

avem $6B - B' = 5X$

c) notăm $A + 6B = 7C'$

$7C' - 2C = 5X$

In sfârșit avem:

$$5X = A + 4A' = 6B - B' = 7C' - 2C$$

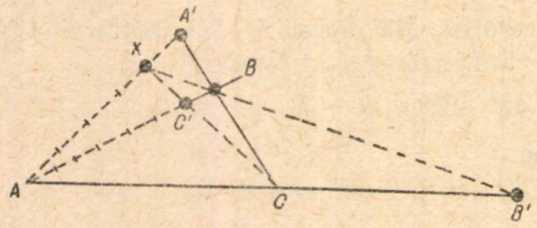


Fig. 13

așa încât X este colinear cu perechile de puncte AA', BB' și CC'.

Putem evident aduna și patru puncte, vârfurile unui patrulater. Să efectuăm suma

$$A + B + C + D = 4M.$$

Printr'o simplă asociere a literelor găsim o proprietate cunoscută a patrulaterului.

a) $4M = (A + B) + (C + D)$

Insă $A + B = 2X$

și $C + D = 2Y$

X și Y fiind mijloacele laturilor AB și CD, deci

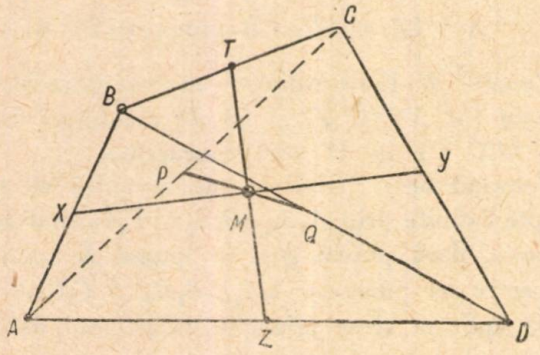


Fig. 14

M este situat pe dreapta XY.

b) $4M = (A + D) + (B + C)$

Insă $A + D = 2Z$

și $B + C = 2T$

deci M este situat pe dreapta TZ.

c) $4M = (A + C) + (B + D)$

Insă $A + C = 2P$

și $B + D = 2Q$

P și Q fiind mijloacele diagonalelor.

In rezumat

$$4M = 2X + 2Y = 2Z + 2T = 2P + 2Q$$

Rezultă:

1) că M e colinear cu perechile de puncte (X,Y), (Z,T) și (P,Q).

2) M împarte fiecare din aceste segmente în două părți egale.

M se numește mijlocul patrulaterului.

Am demonstrat astfel foarte ușor și simplu cunoscuta teoremă din Geometrie:

Unind mijloacele a câte două laturi opuse într'un patrulater oarecare și mijloacele diagonalelor obținem trei transversale concurente într'un punct (mijlocul patrulaterului), care împarte fiecare transversală în două segmente egale.

Să determinăm centrul de greutate al vârfurilor unui triunghi care au «greutățile» 1. Putem înlocui punctele materiale «grele» B și C prin mijlocul lor

$$B + C = 2A'$$

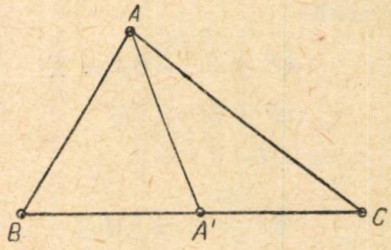


Fig. 15

Adunăm punctele A și A' (afectate de greutățile 1 resp. 2)

$$A + 2A' = 3S \quad \text{și} \quad 3S = A + B + C.$$

Scriind relația de mai sus în trei moduri

$$3S = A + (B + C) = B + (C + A) = C + (A + B)$$

demonstrăm că medianele unui triunghi sunt concurente în centrul de greutate.

Putem demonstra foarte ușor că centrul de greutate S coincide cu centrul de greutate S' al

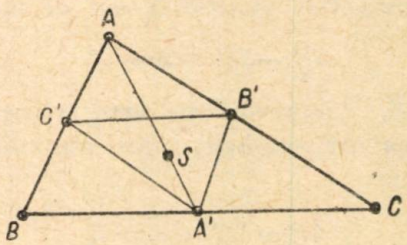


Fig. 16

triunghiului cu vârfurile pe mijloacele laturilor.

$$2A' = B + C \quad 2B' = C + A \quad 2C' = A + B$$

$$A' = \frac{B + C}{2} \quad B' = \frac{C + A}{2} \quad C' = \frac{A + B}{2}$$

dacă notăm cu S' centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ avem:

$$3S' = A' + B' + C' = \frac{B+C}{2} + \frac{C+A}{2} + \frac{A+B}{2}$$

$$3S' = A + B + C \quad \text{deci} \quad S' = s.$$

Să demonstrăm că luând pe laturile unui triunghi trei puncte arbitrare L, M, N, centrul de greutate X al triunghiului LMN este colinear

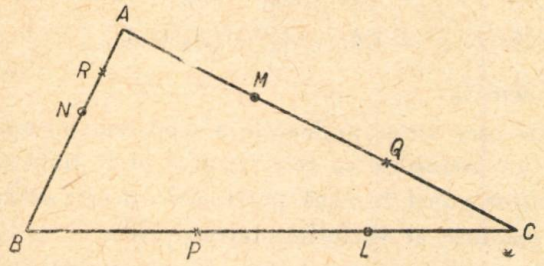


Fig. 17

cu centrul de greutate S al triunghiului și cu centrul de greutate V al mijloacelor a trei segmente nealăturate.

Avem:

$$3S = A + B + C$$
$$3X = L + M + N$$

Fie P, Q și R mijloacele a trei segmente BL, CM, AN nealăturate. Deci:

$$3Y = P + Q + R$$
$$2P = B + L$$
$$2Q = C + M$$
$$2R = A + N$$

adunând avem:

$$2(P + Q + R) = (A + B + C) = (L + M + N)$$

deci

$$6Y = 3S + 3X$$

sau simplificând cu 3

$$2Y = S + X$$

adică cele trei puncte sunt colineare și Y este la mijlocul segmentului SX.

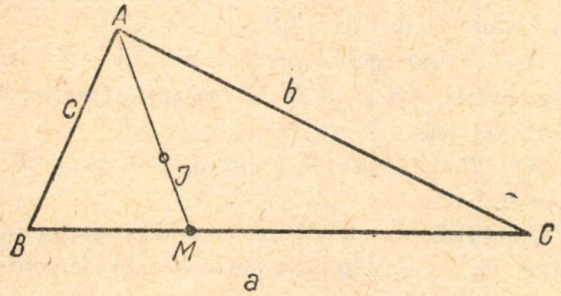


Fig. 18

Să aflăm centrul I al cercului înscris într'un triunghi. Bisectoarea AM împarte latura BC în raportul $c : b$.

Avem deci:

$$bB + cC = (b + c)\, M$$

iar I împarte AM în raportul $(b + c) : a$.

Vom avea

$$aA + (b + c)\, M = (a + b + c)\, I$$

sau

$$aA + bB + cC = (a + b + c)\, I.$$

Pentru a exprima centrul de greutate al laturilor unui triunghi trebue să definim centrul de greutate al unui segment material greu și omogen. Putem lua greutatea lui egală cu numărul care exprimă lungimea.

Fie BC segmentul de lungime (și deci și de greutate a).

Presupunem greutatea a repartizată în mod

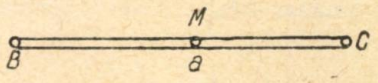


Fig. 19

egal celor două puncte B și C. Centrul de greutate M al segmentului va fi dat de relația

$$\frac{a}{2} B + \frac{a}{2} C = M \quad \text{sau} \quad aM = \frac{a}{2}(B + C)$$

Fie DE și F mijloacele laturilor unui triunghi cu laturile de «greutăți» a, b și c.

Vom avea

$$aD = \frac{a}{2}(B + C)$$

$$bE = \frac{b}{2}(C + A)$$

$$cF = \frac{c}{2}(A + B).$$

Am înlocuit laturile prin punctele «grele» D,

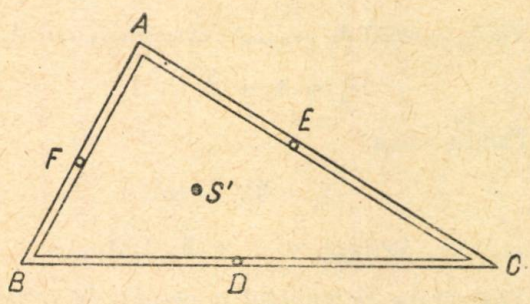


Fig. 20

E și F. Adunând obținem:

$$aD + bE + cF = (a + b + c)\, S.$$

Inlocuind avem

$$2(a+b+c)\, S' = a(B+C) + b(C+A) + c(A+B)$$

și grupând după A, B și C, obținem:

$2(a+b+c)S' = A(b+c) + B(c+a) + C(a+b)$ sau

$2(a+b+c)S' = (a+b+c)(A+B+C) - (aA+bB+cC)$

sau

$2(a+b+c)S' = (a+b+c)3S - (a+b+c)I$

și simplificând obținem:

$$2S' = 2S - I$$

relație care ne spune că centrul de greutate al vârfurilor unui triunghi, centrul de greutate al laturilor și centrul cercului înscris sunt colineare.

Evident că operațiile se pot extinde și asupra punctelor din spațiu.

Să găsim de exemplu centrul de greutate al vârfurilor unui tetraedru $A_1A_2A_3A_4$.

Le presupunem afectate de «greutăți» egale cu 1.

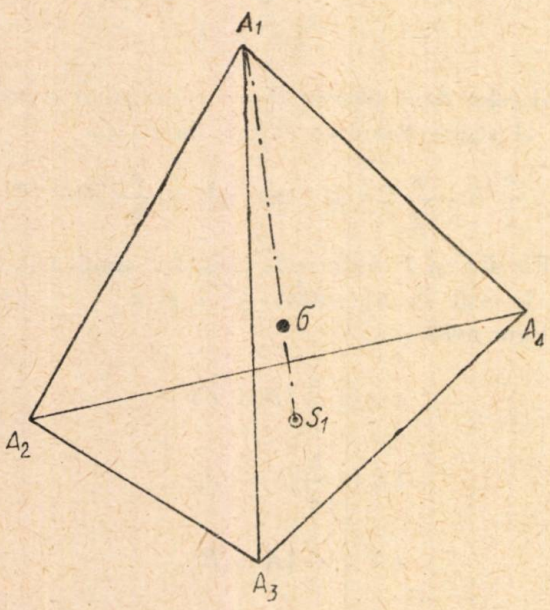


Fig. 21

Fie S_1 centrul de greutate al triunghiului $A_2A_3A_4$

$$3S_1 = A_2 + A_3 + A_4$$

Facem suma

$$A_1 + 3S_1 = 4\sigma$$

și $$4\sigma = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Vom arăta că punctul σ definit de relația de mai sus se bucură de proprietăți speciale.

Avem:

$$4\sigma = A_1 + (A_2+A_3+A_4) = A_2 + (A_3+A_4+A_1) = A_3 + (A_4+A_1+A_2) = A_4 + (A_1+A_2+A_3)$$

sau

$$4\sigma = A_1 + 3S_1 = A_2 + 3S_2 = A_3 + 3S_3 = A_4 + 3S_4$$

adică cele patru transversale ale unui tetraedru care unesc vârfurile cu centrele de greutate ale fețelor opuse sunt concurente.

Scriind relația sub forma

$$\begin{aligned} 4\sigma &= (A_1 + A_2) + (A_3 + A_4) \\ &= (A_2 + A_3) + (A_1 + A_4) \\ &= (A_1 + A_3) + (A_2 + A_4) \end{aligned}$$

obținem că:

liniile care unesc mijloacele a două muchii opuse într'un tetraedru se taie în σ și sunt împărțite de acest punct în două părți egale. σ este centrul de greutate al vârfurilor tetraedrului.

Operațiile pe care le-am efectuat asupra punctelor s'au limitat numai la adunare și scădere.

Și chiar la scădere n'am tratat cazul când punctele au «greutăți» egale, adică n'am definit operația

$$A - B \quad \text{avem} \quad A - B = 0 \cdot C.$$

Unde se află punctul C definit astfel.

Presupunem că diferența dintre «greutățile» lui A și B este foarte mică.

Luăm A și B cu greutăți aproape egale; de exemplu

$$1\,000\,000\,A - 999999\,B = C$$

Pentru a-l avea pe C purtăm lungimea AB de 1 milion de ori peste A.

Egalitatea se mai scrie

$$A - 0{,}999999\,B = 0{,}000001\,C$$

cu cât greutatea lui B se apropie de 1, cu atât greutatea lui C scade și C se îndepărtează de A. Când greutatea lui B devine 1 relația devine $A - B = 0 \cdot C$. greutatea lui C devine 0 și C este situat la infinit.

Relația $A - B = 0 \cdot C$ definește deci un punct la infinit în direcția AB.

Dacă avem egalitatea $A - B = A' - B'$ atunci segmentele AB și $A'B'$ au aceiași direcție, sunt deci paralele.

$A - B$ definește deci un segment orientat, un vector liber.

Operațiile de înmulțire efectuate asupra punctelor ne conduc în mod firesc la alte elemente, la vectorii lunecători.

Există deci o legătură între calculul expus mai sus și calculul vectorial.

STROBOSCOPIA, METODĂ DE CERCETARE A MIŞCĂRILOR PERIODICE

Conf. Univ. N. STĂNESCU

De multe ori, la cinematograf, am fost surprinşi observând roţile vehiculelor învârtindu-se în sens invers celui cerut de înaintarea vehiculului; uneori roţile chiar par că stau pe loc, deşi vehiculul se mişcă. Această aparentă mişcare a roţilor este un efect stroboscopic, urmare a unui fenomen, pe care ne propunem să-l analizăm.

1. Ce este stroboscopia?

Se cunoaşte proprietatea pe care o are ochiul de a păstra impresiunile luminoase pe retină timp de aproximativ 1/15 dintr'o secundă. Stroboscopia se bazează pe această proprietate, ca şi cinematograful. Dacă în faţa ochilor trece rapid o succesiune de imagini, care reprezintă diferite aspecte ale unei mişcări în aşa fel ca între 2 imagini consecutive să fie un interval de timp mai scurt decât $\frac{1}{15} = 0{,}08$ secunde, atunci ochiul are impresia unei mişcări continui. Un cărbune aprins mişcat în întunerec lasă o urmă luminoasă, ca o linie continuă, formată din poziţiile succesive ale cărbunelui dintr'un interval de 0,08 secunde. Dacă două imagini se succed la un interval mai mare de 0,08 secunde, ochiul le percepe distinct.

In cinematografie imaginile sunt luate şi proiectate în cadenţa de 24 pe secundă. Dacă vom considera o roată cu 8 spiţe, care se roteşte de 3 ori pe secundă, înseamnă că în timpul dintre două instantanee (fig. 1 *a*, *b*) o spiţă măturǎ un unghi

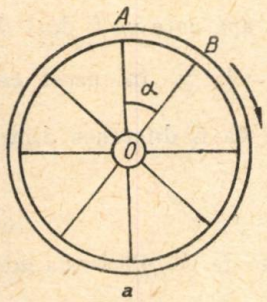


Fig. 1 a

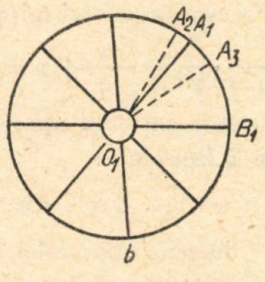


Fig. 1 b

$\alpha = \frac{3 \cdot 2\pi}{24} = \frac{\pi}{4} = 45°$, de exemplu spiţa OA vine în locul spiţei OB, adică O_1A_1, iar roata are aceeaşi înfăţişare; ochiul are impresia că roata a stat pe loc. Dacă roata se învârteşte mai încet, de ex. de 2 ori pe secundă, atunci între 2 instantanee o spiţă măturǎ un unghi $\alpha_1 = \frac{2 \cdot 2\pi}{24} = \frac{\pi}{6} = 30° < \alpha$, deci spiţa OA ajunge în poziţia O_1A_2, lăsând impresia că se roteşte în sens opus, dela B spre A. In cazul când roata se învârteşte mai repede decât de 3 ori pe secundă, de ex. de 4 ori pe secundă, atunci între 2 instantanee o spiţă parcurge unghiul $\alpha_2 = \frac{4 \cdot 2\pi}{24} = \frac{\pi}{3} = 60° > \alpha$, din poziţia OA venind în poziţia O_1A_3, iar ochiul are impresia că roata s'a învârtit mai încet, numai cu unghiul $A_1O_1A_3 = 15° = \frac{\pi}{12}$ adică pare a face numai o rotaţie pe secundă, în loc de 4 rotaţii pe secundă. Cu cât viteza roţii se apropie mai mult de viteza de sincronism (3 rotaţii pe secundă în exemplul ales) prin valori superioare, cu atât mişcarea pare mai încetinită. In felul acesta orice corp în mişcare periodică poate fi aparent imobilizat sau încetinit, această metodă numindu-se *stroboscopie*. Numele ei vine dela cuvintele vechi greceşti: strobos = rotaţie şi scopein = a observa. Prin urmare stroboscopia constă în luminarea intermitentă, la intervale egale, a unui corp care se află în mişcare periodică. Dacă intervalul dintre două iluminări succesive este egal cu perioada mişcării examinate, atunci diferitele instantanee vor fi identice căci corpul ocupă aceleaşi poziţii pe ciclul mişcării sale, încât el va părea imobil şi va putea fi studiat ca şi cum ar fi în repaus. Decalând uşor perioada iluminărilor faţă de perioada mişcării, se obţine o mişcare aparentă încetinită, dar de acelaşi fel cu cea reală. Ea serveşte la examinarea experimentală a pieselor mecanice, aflate în mişcare foarte rapidă.

In tehnică se aplică această metodă reglând frecvenţa iluminărilor, căci frecvenţa mişcării de examinat este dată. Se poate obţine o frecvenţă reglabilă a iluminării prin diferite dispozitive, care formează stroboscopul propriu zis. Cea mai simplă metodă este folosirea unui disc stroboscopic (fig. 2) care are pe margine p fante circulare echidistante şi se roteşte de n ori pe secundă.

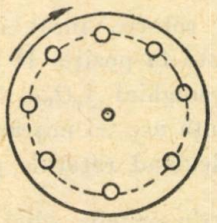


Fig. 2

Discul stroboscopic D se așează în vârful conului de lumină trimis de un izvor luminos asupra corpului de examinat (fig. 3) de exemplu o roată R care face ν rotații pe secundă. In felul acesta roata R, aflată în întunerec, este luminată ori

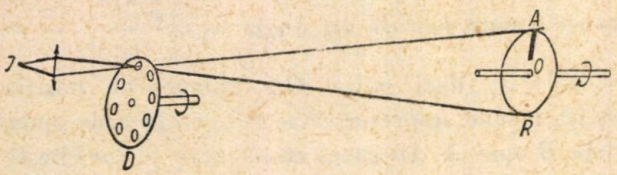


Fig. 3

de câte ori o fantă a discului stroboscopic trece prin dreptul conului de lumină, adică de $N = np$ ori pe secundă. Prin urmare frecvența iluminării este N, iar frecvența mișcării de examinat este ν. Variind pe n, frecvența de iluminare N variază după voia noastră.

1. Presupunem că frecvența de iluminare N este mai mică decât ν, adică $N = \nu - f$, f putând fi oricât de mic. Perioada iluminării T' va fi

$$T' = \frac{1}{N} = \frac{1}{\nu - f} > T$$

care este perioada mișcării de studiat. In inter-

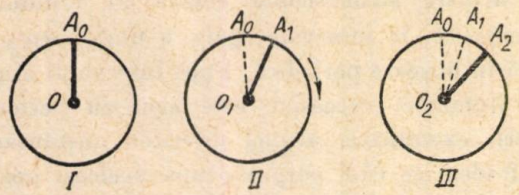


Fig. 4

valul de timp T' (dela o iluminare la alta) roata R face $\nu T' = \frac{\nu}{\nu - f} = 1 + \frac{f}{\nu - f}$ rotații, să zicem în sensul acelor dela ceasornic. Deci în intervalul T' sec. discul a făcut o rotație și o fracțiune $\frac{f}{\nu - f}$ de rotație, încât iluminarea următoare găsește roata în poziția II (fig. 4) ca și cum s'ar fi rotit cu unghiul $A_0O_1A_1$ *în sensul real de mișcare.* Frecvența acestei mișcări aparente, încetinită, o găsim calculând rotațiile pe care le face aparent roata într'o secundă, adică $\frac{f}{\nu - f} \cdot \frac{1}{T'} = \frac{f}{\nu - f}(\nu - f) = f$ este tocmai diferența dintre cele două frecvențe:

$$f = \nu - N \qquad (1)$$

Perioada mișcării aparente va fi $\tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{\nu - N}$ care dă

$$\tau = \frac{TT'}{T' - T} \qquad (2)$$

unde $T = \frac{1}{\nu}$ este perioada mișcării reale.

2. Să creștem pe N până ce $N = \nu$; în acest caz perioada de iluminare T' coincide cu perioada reală T, adică o iluminare găsește roata exact în faza de mișcare în care se afla în timpul iluminării precedente. Roata pare *imobilă*, realizându-se *repausul stroboscopic*, datorită persistenței imaginilor pe retină.

3. In cazul când roata este iluminată la intervale mai scurte decât perioada sa, adică $N' > \nu$ să notăm $N = \nu + f$. In timpul T' dintre 2 iluminări consecutive roata face $\nu T' = \frac{\nu}{\nu + f} = 1 - \frac{f}{\nu + f}$ rotații, adică mai puțin de o rotație cu fracțiunea $\frac{f}{\nu + f}$ dintr'o rotație. O iluminare a roții R o va găsi în poziția II (fig. 5) adică rotită cu unghiul $A_0O_1A_1$ față de poziția I pe care o

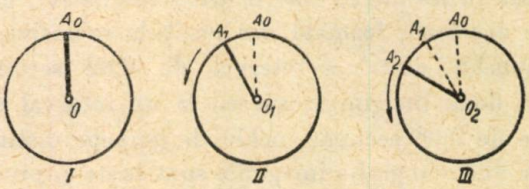


Fig. 5

avea în cursul precedentei iluminări. Impresia este că roata are o mișcare aparentă în *sens invers celui real.*

Frecvența acestei mișcări aparente va fi dată de $\frac{f}{\nu + f} \cdot \frac{1}{T'} = \frac{f}{\nu + f}(\nu + f) = f$. Și în acest caz frecvența mișcării aparente va fi diferența dintre cele 2 frecvențe:

$$f = N - \nu \qquad (3)$$

însă de sens opus celei dată de (1). Perioada mișcării aparente va fi:

$$\tau = \frac{TT'}{T - T'} \qquad (4)$$

4. Dacă $N = 2\nu$, perioada iluminării $T' = \frac{1}{2\nu} = \frac{T}{2}$ adică discul este iluminat de două ori în cursul unei rotații, deci raza OA_0 se vede ca două raze OA_0 și OA_1 (fig. 6) diametral opuse. Dacă N

este puţin mai mic sau mai mare decât 2ν, aceste 2 raze par a se roti încet în sensul real sau se vede triplată (fig. 7), etc. Dacă $N = k\nu$ atunci spiţa se vede sub forma a k spiţe echidistante. Să exemplificăm. Presupunem că cercetăm o roată care face 3.000 ture pe minut cu ajutorul

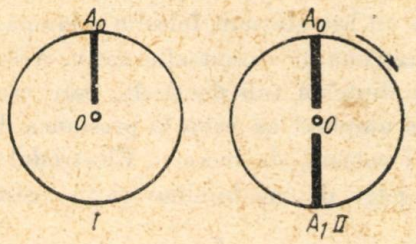


Fig. 6

unui disc stroboscopic, prevăzut cu 6 deschideri echidistante. Când discul face 499 rotaţii pe minut, $N = np = 499 \cdot 6 = 2994$ rot/min., adică roata va fi luminată de 2994 ori pe minut sau de 49,9 ori pe secundă. Roata va părea că se mişcă în

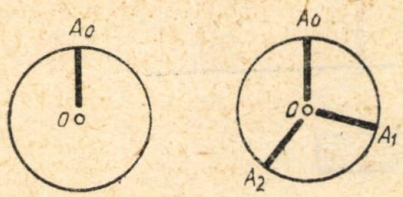


Fig. 7

sensul real cu $f = \nu - N = 50 - 49{,}9 = 0{,}1$ rot/s ceeace înseamnă 6 rotaţii pe minut; va fi extrem de uşor de urmărit mişcarea acestei roţi.

Dacă discul stroboscopic ar face 500 rot/min, atunci $N = 500 \cdot 6 = 3000$ rot/min, iar $T' = T = 0{,}02$ sec; roata va fi luminată când se află în aceeaşi fază a mişcării şi va părea în repaus stroboscopic.

Dacă discul stroboscopic ar face 501 rot/min, atunci $N = 501 \cdot 6 = 3006$, adică roata va fi luminată de 3006 ori pe minut sau de 50,1 ori pe secundă.

Roata va avea o mişcare aparentă în sens invers celui real, făcând 6 rotaţii pe minut.

Prin urmare stroboscopul dă instantanee ale unui corp, care se succed la intervale egale cu perioada de iluminare şi suprapunându-se pe retină, aceste instantanee permit să se observe un fenomen ca şi cum el şi-ar fi coborît frecvenţa. In concluzie stroboscopia este un procedeu prin care *observarea unui fenomen periodic de mare frecvenţă este înlocuită cu observarea unei mişcări aparente, identică cu cea dintâi, însă cu o frecvenţă destul de mică, încât să poată fi lesne urmărită cu ochiul.*

II. Realizarea practică a metodei stroboscopice

In folosirea practică a observării stroboscopice a unui corp în mişcare periodică, stroboscopul propriu zis este dispozitivul care permite iluminarea intermitentă, prin licăriri de foarte scurtă durată, care se succed cu o frecvenţă, ce o putem regla după necesităţi. Metoda stroboscopică de observare a mişcării se poate realiza în multe feluri. In general ele sunt variante a două metode:

1. Corpul care trebue observat stroboscopic se află în întunerec şi e luminat intermitent, fiind privit direct; ochiul primeşte dela corp impresii luminoase numai când şi cât timp este luminat, ca nişte instantanee ce se suprapun pe retină şi dau mişcarea aparentă a corpului.

2. Corpul care trebue observat stroboscopic se află în lumină, este însă văzut intermitent, fiind privit prin dispozitive speciale.

Putem realiza uşor prima metodă în laborator, în diferite feluri. De exemplu corpul în mişcare, să zicem o roată pe care am trasat un semn vizibil, este luminat cu scânteile date de o bobină de inducţie, de un tub Geisler, de scânteia unui condensator care se descarcă, etc. In aceste cazuri frecvenţa iluminărilor este fixă, deci trebue să variem frecvenţa mişcării corpului de cercetat.

Ca izvor intermitent de lumină se poate folosi o lampă electrică obişnuită, alimentată la reţeaua de curent alternativ. Acest curent îşi schimbă sensul de 100 ori pe secundă, deci lampa se aprinde şi se stinge de 100 ori pe secundă. Ochiul nu percepe însă aceste licăriri ale filamentului lămpii, deoarece se succed foarte repede. Inseamnă că o astfel de lampă este un izvor stroboscopic cu frecvenţa iluminării $N = 100$ *Hz*. Putem realiza cu ea câteva experienţe interesante. Pe un disc de hârtie de desen cu diametrul de 15 cm, desenăm la centru 5 raze echidistante lungi de 2 cm, apoi alte 10 raze echidistante tot de 2 cm; pe un cerc cu raza de 5 cm desenăm 25 puncte echidistante, pe altul cu raza de 6 cm desenăm 50 puncte echidistante, iar pe un cerc cu raza de 7 cm desenăm 100 puncte echidistante. Fixăm acest disc de hârtie pe unul de lemn, ca o sfârleză, pe care o punem în mişcare. La lumina zilei şirurile de puncte par o dungă cenuşie. La lumina unui bec electric însă, dacă sfârleaza se roteşte destul de repede, razele din centru parcă stau pe loc şi devin vizibile; înseamnă că frecvenţa de iluminare N este egală cu frecvenţa de succesiune a razelor. In scurtul timp cât lampa e stinsă o rază are timp să ajungă în poziţia celei vecine, adică noua aprindere a becului face să vedem razele în aceeaşi

poziție aparentă. Aplicând relația $N = np$ găsim $100 = n \cdot 5$, de unde $n = 20$ adică discul (sfârleaza) face 20 rotații pe secundă. Dar sfârleaza își încetinește treptat mișcarea de rotație și la un moment dat observăm distinct șirul al doilea de raze, apoi primul șir de puncte, al doilea, al treilea. Discul a ajuns succesiv la $n_1 = \frac{100}{10} = 10$ Hz, apoi la $n_2 = \frac{100}{25} = 4$ Hz, la $n_3 = \frac{100}{50} = 2$ Hz și la $n_4 = \frac{100}{100} = 1$ Hz sau o rotație pe secundă. Un mic disc de hârtie pe care am desenat un diametru gros fixat pe axul unui motor, ne arată în aceleași condiții că motorul face $n = \frac{100}{2} = 50$ Hz adică $50 \times 60 = 3000$ rotații pe minut.

Putem varia experiența cu un disc având diametrul de 11 cm, pe care am desenat la centru 8 raze echidistante, apoi 11 puncte echidistante, 12 puncte echidistante, 13 puncte echidistante. In acest caz se poate observa, în condițiile de mai sus, că din când în când punctele unui șir par a se roti înapoi, iar punctele celorlalte șiruri par a merge înainte. Explicația am văzut-o în partea întâia a articolului. Așa dar metoda stroboscopică ne permite în primul rând să determinăm frecvența de rotație a unui corp.

Pe această cale putem controla dacă patefonul funcționează bine, adică dacă discul face 78 rotații pe minut. Construim un disc de hârtie care să aibă 77 raze ori puncte echidistante și-l fixăm pe discul care se rotește al patefonului. Dacă se rotește normal, la lumina unui bec va părea că razele sau punctele stau pe loc, adică discul patefonului face $n = \frac{100}{77} = 1{,}3$ Hz $= 1{,}3 \cdot 60 = 78$ rotații pe minut. Dacă discul s'ar roti mai încet, punctele vor avea o ușoară mișcare de rămânere în urmă, iar dacă discul s'ar roti prea repede, ele ar avea o ușoară mișcare de înaintare.

In mod asemănător, folosind discul de mai sus, putem determina turația mașinii de cusut, a ventilatorului, etc. Rezultate mai frumoase obținem dacă în loc de un bec obișnuit folosim o lampă cu neon pusă la rețeaua de curent alternativ. Aceasta este alcătuită dintr'un tub de sticlă, care are 2 electrozi și e umplută cu neon la presiunea de câțiva milimetri coloană de mercur. Electrodul legat la polul negativ devine luminos și în acest fel cei

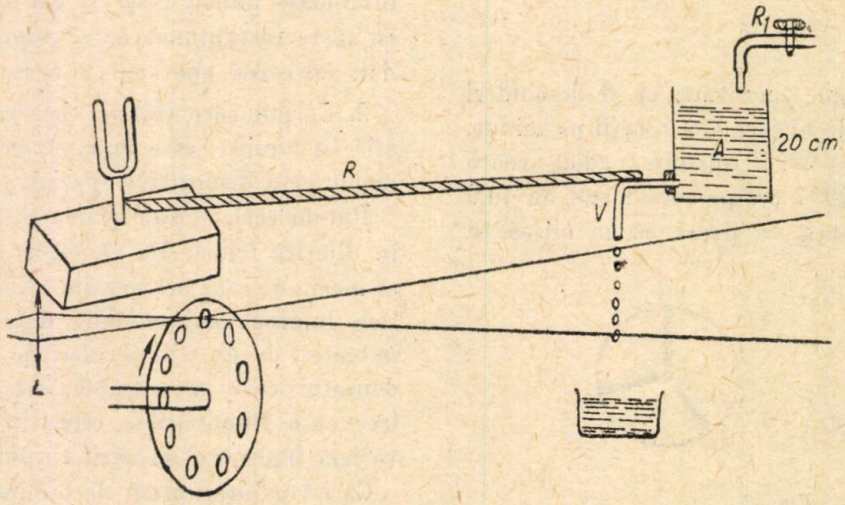


Fig. 8

2 electrozi devin alternativ luminoși cu frecvența de 100 Hz, fără a avea inerția termică, așa cum are becul obișnuit.

In lipsa acestor izvoare de lumină, stroboscopul se poate realiza cu ajutorul unui disc, care are un număr p de deschideri de-a-lungul unei circumferințe, prin montajul schițat în figura 8.

Pe această cale putem de exemplu să observăm formarea picăturilor sau scurgerea unei vâne de apă V (fig. 8), care curge dintr'un vas A, potrivit ca să aibă nivelul de apă constant la vreo 20 cm înălțime. Cutia de rezonanță a unui diapazon (sau ciocănașul unei sonerii) e pusă în legătură cu tubul prin care curge vâna de apă printr'o riglă R. Totul este în întunerec și e luminat printr'un disc D cu p găuri echidistante. Dacă frecvența de iluminare este egală cu frecvența diapazonului, vâna de lichid în picături pare imobilă și se pot observa picăturile mai mici între cele mai mari, precum și tremurul picăturilor. Dacă e o mică deosebire între aceste frecvențe, picăturile par a cădea încet, ori a se ridica încet.

Experiențele descrise până aci le putem realiza prin a doua metodă, lăsând corpul de cercetat în

lumină, dar privindu-l prin deschiderea prin care ar trebui să treacă lumina, prin discul D în rotație.

Oricine poate face foarte ușor această experiență, privind printre paletele unui ventilator la o lamă care vibrează, constatând că în acest fel lama pare că vibrează mai încet.

Toate aceste experiențe ne conving că prin stroboscopie putem observa un fenomen periodic, ca și cum i s'ar fi micșorat frecvența.

Discul stroboscopic cu fante este folosit și în tehnică, mișcarea lui de rotație putând fi variată cu ajutorul unui schimbător de viteze, conic. In felul acesta se obține o frecvență de analiză reglabilă, care este citită direct pe cadran. Aceste dispozitive prezintă însă un neajuns. Durata unei iluminări, deși scurtă, este însă prea lungă în cazul mișcărilor rapide ale organelor de mașini, încât în timpul iluminării corpul se deplasează suficient ca imaginea lui să nu fie clară. De exemplu o elice cu diametrul de 2 m, care face 1.000 ture pe minut să presupunem că este luminată numai a mia parte dintr'o secundă. Extremitatea palei elicei are viteza liniară

$$v = R\omega = 2\pi\nu R = 2\pi \cdot \frac{1.000}{60} \cdot 1 = 104{,}6 \text{ m/s, adică}$$

în timpul unei iluminări de $\frac{1}{1.000}$ secundă va parcurge 0,1 m, deci nu va fi văzută clar. Pentru ocolirea acestui neajuns, fantele discului stroboscopic se fac foarte înguste, dar apare alt neajuns; fluxul luminos care trece prin ele este foarte mic și corpul este prea slab luminat. Deaceea stroboscoapele industriale folosesc lămpi luminiscente, bazate pe electroluminiscența gazelor rarefiate, (R.M.F. Nr. 3—1953), în special lămpi cu neon, lipsite de inerție și cu lumină puternică, ceeace permite scurtarea duratei de iluminare foarte mult. S'a ajuns până la durata sub 10^{-5} secunde pentru o iluminare. Vom descrie două asemenea dispozitive.

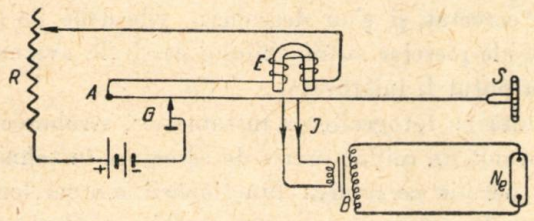


Fig. 9

Unul din ele are ca dispozitiv care reglează frecvența de iluminare N o bandă îngustă feromagnetică AS, întreținută electric în vibrare cu frecvența N de către un electromagnet E (fig. 9). Curentul de alimentare a electromagnetului face ca acesta să atragă banda și în felul acesta se întrerupe circuitul de alimentare în G, iar banda revine spre poziția de echilibru, restabilește curentul, etc. Când însă banda e atrasă de electromagnet, ea scoate și o mică punte metalică din 2 tuburi cu mercur, întrerupând astfel circuitul unei bobine de inducție B, care alimentează lampa cu neon Ne. Vibrațiile bandei întrerup și restabilesc în același ritm circuitul bobinei, încât lampa cu neon are o frecvență de iluminare egală cu frecvența bandei, care poate fi reglată cu șurubul de întindere S. Durata unei licăriri (unei iluminări) este mai mică decât 10^{-4} s.

Alt stroboscop industrial reușește să dea licăriri cu durata de 10^{-6} s (o milionime de secundă), încât la viteza de 100 m/s, un corp se deplasează abia cu $10^{-6} \cdot 100 = 10^{-4}$ m $= 0{,}1$ mm în timpul unei secunde. Cu acest dispozitiv se obțin imagini clare, chiar a corpurilor rapide, încât poate fi folosit la fotografiere stroboscopică. El este alcătuit în esență dintr'o lampă luminiscentă L (de obicei cu neon) alimentată de un condensator de mare capacitate C (fig. 10), care se descarcă prin lampă.

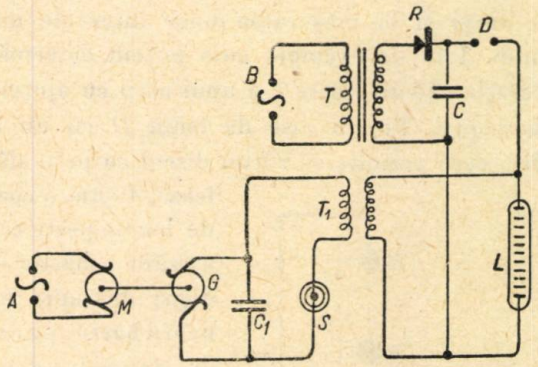


Fig. 10

Condensatorul este încărcat de un transformator T, printr'un redresor R și este totodeauna gata să se descarce prin lampă, însă descărcătorul D, format din cele 2 mici sfere aflate la o distanță puțin superioară celeia pe care ar putea-o sări tensiunea condensatorului, face ca descărcarea să nu se producă decât atunci când lampa este ionizată. Ionizarea lămpii este produsă de un al doilea circuit, care conține un condensator C_1, încărcat de un generator G care-i mișcat de un motor M, apoi un transformator T_1 și un ruptor S, sincronizat cu corpul de cercetat stroboscopic. Când S închide circuitul se naște un curent de înaltă tensiune în secundarul lui T_1 și lampa L se ionizează. Aceasta face să-i scadă rezistența, deci condensatorul C se poate descărca oscilatoriu prin D și lampa L se luminează, dând licăriri de 10^{-6} secundă. Așa dar circuitul pilot C_1 are rolul să

ionizeze lampa L cu un curent slab, făcând posibilă funcţionarea circuitului de mare putere C, care face lampa să dea iluminări scurte, dar de mare intensitate.

Lumina produsă este atât de intensă, încât acest dispozitiv poate servi la observarea mersului maşinilor chiar la lumina zilei.

III. Aplicaţiile stroboscopiei

Metoda stroboscopică are variate întrebuinţări în laborator. Cu ajutorul ei se pot observa diferitele mişcări periodice: rotaţii, oscilaţii, unde staţionare, etc. Poate servi la determinarea frecvenţei de rotaţie a unui disc sau a unui ax. Pentru aceasta este suficient să fixăm de corpul în rotaţie un disc stroboscopic cu puncte ori cu un număr de raze potrivite cazului în speţă şi se observă mişcarea la un bec dela reţeaua de curent alternativ sau cu o lampă cu neon. In ambele cazuri $N = 100$ Hz, iar dacă sunt p raze ce par imobile atunci frecvenţa de rotaţie a discului sau axului este $n = \frac{N}{p} = \frac{100}{p}$ Hz. Pe această cale, metoda poate servi şi la măsurarea unor intervale mici de timp. Iată de exemplu cum putem determina acceleraţia căderii libere g a unui corp cu ajutorul stroboscopiei. Pe un disc de lemn D cu un ax subţire, care permite să rotim discul ca pe o sfârleză, fixăm o coală de hârtie peste care aşezăm o hârtie indigo; deasupra punem o hârtie pe care am desenat un număr p de raze. De un stativ M (fig. 11) fixăm cu aţă, 2 bile A şi B la înălţimile s_1 şi s_2 faţă de disc.

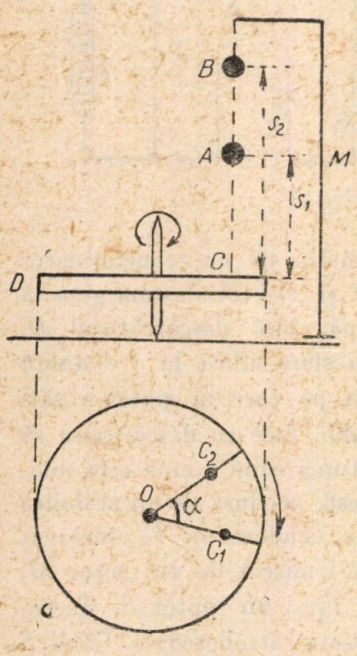


Fig. 11

Punem discul în rotaţie şi, în momentul când cele p raze desenate par imobile stroboscopic, ardem firul de aţă deasupra lui B. Cele 2 bile cad şi ating discul, A în C_1 şi B în C_2, făcând între razele corespunzătoare unghiul α, pe care-l măsurăm pe hârtia pe care hârtia indigo a lăsat cele 2 urme. Din $n = \frac{100}{p}$ avem frecvenţa discului D. Unghiul α ne permite calcularea intervalului de timp Δt în care a fost parcurs, ştiind că în timpul $T = \frac{1}{n}$ discul face o rotaţie completă, adică 360°. Atunci $\Delta t = \frac{\alpha}{360\,n}$. Dacă discul a avut să zicem 30 raze echidistante, atunci $n = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}$, deci $\Delta t = \frac{\alpha}{1.200}$ secunde. Pe g îl scoatem din legea spaţiului aplicată celor 2 bile:

$$s_1 = \frac{g}{2} t_1^2 \quad \text{şi} \quad s_2 = \frac{g}{2} t_2^2$$

de unde

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} \quad \text{şi} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2s_2}{g}}, \quad \text{deci}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2s_2}{g}} - \sqrt{\frac{2s_1}{g}}.$$

Ridicăm la patrat şi scoatem pe g obţinând:

$$g = \left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 \left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) - \sqrt{s_1 s_2}$$

din care g poate fi calculat, deoarece s_1, s_2 şi Δt se scot din experienţa făcută.

Aplicaţiile tehnice ale stroboscopiei sunt însă de cel mai mare interes şi călăuzesc pe inginerul constructor în cercetările sale. Construirea diferitelor maşini necesită calcularea diferitelor piese la dimensiuni, care să asigure rezistenţa maşinii la eforturi şi buna ei funcţionare.

In acest scop se fac numeroase încercări ale materialului, ca şi ale maşinii. Am văzut că fotoelasticimetria (R.M.F. Nr. 10/1952) este un preţios mijloc de cercetare a materialelor şi a rezistenţei pieselor. Stroboscopia oferă tehnicianului posibilitatea de a cerceta comportarea unei maşini în plin mers, atunci când ea este chemată să răspundă la toate eforturile impuse de funcţionarea ei. Deaceea este folosită în construcţia mecanică, electrică, în aeronautică, în industria maşinilor unelte, a automobilelor, a filaturilor, cinema, etc. Cu ajutorul ei s'au cercetat şi s'au descoperit vibraţiile periculoase ale pieselor automobilului ca şi ale avionului şi au putut fi înlăturate.

Unită cu fotografierea instantanee, stroboscopia a devenit un mijloc precis de cercetare în tehnică.

A permis cercetarea funcţionării motoarelor şi a dus la creşterea randamentului, arătând cum funcţionează supapele, resorturile, camele, arătând răsucirile şi îndoirile vilbrechinului. A fost folosită la studiul turbinelor, a locomotivelor şi a elicelor.

Mai ales aerodinamica are un ajutor preţios în această metodă, care permite cercetarea pe îndelete a micilor vibraţii ale elicelor, a aripelor, studiu

profilelor, a fenomenelor de cavitație, etc. Stroboscopia este o metodă de cercetare directă a avionului și pieselor sale în mărime naturală, ceeace înlătură presupunerile extrapolărilor, a legilor de similitudine, care uneori nu dau cel mai sigur rezultat, mai ales în domeniul vitezelor sonice sau hipersonice (egale sau mai mari decât viteza sunetului).

Metoda stroboscopică și-a găsit aplicarea și în reglajul cronometrelor, a mașinilor de cusut, la controlul vitezelor în filaturi. Și medicina folosește această metodă, prin cercetarea stroboscopică a laringelui și a coardelor vocale.

In general tehnica folosește și metoda «repausului stroboscopic», care permite fotografierea «dinamică» a organului de mașină și compararea lui cu fotografia lui «statică» pentru a-i descoperi deformările cauzate de funcționare. Dar tehnica folosește și «încetinirea» stroboscopică a mișcării, pentru a o cerceta cu răbdare și atenție în toate fazele sale. Spre deosebire de cazul când mașina s'ar mișca în realitate încet, încetinirea stroboscopică dă o mișcare aparent înceată a mașinii care funcționează cu viteza ei normală, deci observarea pieselor ei se face lent, însă în regim de funcționare normală. Pe această cale s'a ameliorat randamentul motoarelor, observând stroboscopic arborii camelor și a supapelor, pentru a depista cauzele umplerii defectuoase a cilindrilor și astfel s'a putut rectifica profilul camerelor pentru a da o bună funcționare a motoarelor.

CONSTRUIREA PRIN MIJLOACE PROPRII A UNUI APARAT PENTRU DEMONSTRAREA UNDELOR STAȚIONARE

Conf. Univ. V. PAVLU

Știm că mișcarea vibratorie se propagă în mediile materiale elastice sub formă de deformări periodice, ce înaintează cu viteză constantă, deformări ce se numesc unde progresive.

Când mediul este limitat sau prezintă discontinuități, undele progresive se reflectă, cu sau fără salt de $\frac{\lambda}{2}$ (jumătate de lungime de undă), după cum urmează o creștere sau scădere bruscă a densității mediului material. Undele progresive reflectate vor interfera cu undele directe, producându-se fenomenul caracteristic de interferență numit unde staționare, existent în mediile materiale limitate în stare de vibrație.

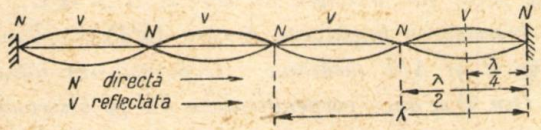


Fig. 1

Acest fenomen de unde staționare se produce și în corzile care vibrează. La capetele corzii se formează minime nule de interferență (noduri, datorită saltului de jumătate de lungime de undă) iar din sfert în sfert de lungime de undă în mod alternativ ventre și noduri echidistante.

Pentru a realiza cu mijloace proprii un aparat practic și portativ pentru demonstrarea acestor unde staționare, folosim următoarele materiale:

1. Un zumer — sonerie fără clopot — (să nu fie din acelea minuscule),
2. O baterie de buzunar,
3. 3 m sârmă de sonerie,
4. O șipcă de brad (cca 2 cm × 5 cm × 120 cm),
5. Un buton de sonerie,
6. O sfoară albă (cca 1,50 m),
7. Un șurup de lemn cu ochiu,
8. 4 șurupuri de lemn (de cca 2 cm)

Se netezește șipca cu o rindea, văpsindu-se pe față cu negru mat (sau lipind o hârtie neagră) pentru o mai bună vizibilitate, și apoi se fixează la un capăt, conform desenului alăturat, zumerul cu ajutorul șurupurilor de lemn. De placa vibrantă a zumerului se leagă un capăt al sfoarei albe, celălalt capăt fixându-se prin înfășurare pe șurupul cu

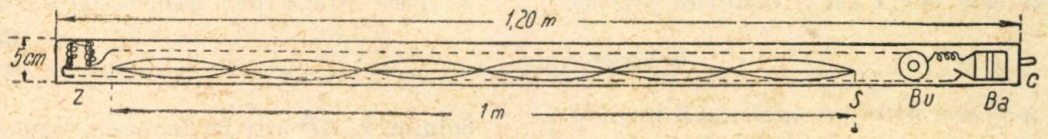


Fig. 2

ochiu *S*, înșurubat la rândul lui pe șipcă la distanță de cca 1 m în apropiere de butonul de sonerie.

Cu ajutorul șurupului S se poate potrivi tensiunea firului. Se face apoi legătura în serie cu ajutorul sârmelor de sonerie între zumer, butonul de sonerie și bateria de buzunar. Legăturile se fac pe partea opusă, trecându-se sârmele prin câte două găuri mici făcute în șipcă în dreptul zumerului și în dreptul butonului de sonerie. Pentru protejarea sârmelor este bine ca sârmele să fie vârîte în niște șănțulețe săpate pe partea opusă (pe figură aceste legături fiind figurate punctat). Butonul se fixează cu ajutorul șurupurilor de lemn, iar bateria cu ajutorul unei brățări de cauciuc. Pentru estetică este bine ca zumerul și butonul de sonerie să fie de culoare închisă, bateria fiind și ea acoperită cu o hârtie neagră.

Aparatul poate fi folosit în orice poziție, putând fi păstrat agățat în poziție verticală de cârligul C.

Pentru a-l pune în funcție, în timp ce se apasă cu o mână pe buton, se reglează cu cealaltă tensiunea firului, apărând imediat regimul de unde staționare cu noduri și ventre alternative și echidistante.

Butonul de sonerie ne asigură întreruperea automată a circuitului și deci utilizarea îndelungată a bateriei.

Aparatul este în special recomandabil pentru colecțiile de fizică în școli, caracterul lui portativ permițând transportarea comodă în clase.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 284

Un râu din emisfera nordică, curge dela Nord la Sud, cu o astfel de pantă încât pe măsură ce curge, se apropie de axa polilor. Mai este valabilă legea: « Toate râurile din emisfera nordică bat în malul drept? ».

Explicație.

Soluție. Legea lui Beer — mai sus enunțată — este explicată prin existența forțelor Coriolis (Cursul de Fizică Generală de Friș și Timoreva, vol. I, pag. 84).

Fie A un punct al unui râu oarecare. Direcția forțelor Coriolis în acest punct este f_k. Când râul curge dela Sud la Nord legea lui Beer își menține valabilitatea. Când râul curge dela Nord la Sud direcția forțelor Coriolis este aceeași ca și în primul caz. Deci legea nu mai este valabilă, râul erodând malul stâng.

Problema 285

Printr'o latură a bazei unei prisme exagonale regulate se duc două plane care determină două secțiuni. Cum trebue duse planele pentru ca aria unei secțiuni să fie dublul ariei celeilalte secțiuni, iar distanța între cele două laturi ale secțiunilor care sunt opuse laturii comune să fie 5 cm? Apotema exagonului de bază este 1 cm și înălțimea prismei de 10 cm.

O. Sacter

Soluție. Fie S aria bazei prismei, α și β unghiurile pe care cele două secțiuni le fac cu baza. Avem

$$S_1 = S : \cos \alpha$$

$$S_2 = S : \cos \beta,$$

unde S_1, S_2 sunt ariile celor două secțiuni.

Notând cu x distanța dintre latura exagonului de bază și latura primei secțiuni, laturi opuse laturii comune și ținând seamă de enunț, avem:

$$2 \cdot \frac{\frac{S}{2}}{\sqrt{4 + x^2}} = \frac{\frac{S}{2}}{\sqrt{4 + (x+5)^2}},$$

de unde $2\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4 + (x+5)^2}$.

Ridicând la patrat obținem ecuația

$$3x^2 - 10x - 13 = 0$$

$x_1 = \frac{13}{3} = 4{,}33$ cm, este soluția care convine problemei căci $x_1 + 5 = 9{,}33$ cm.

Problema 315

Fie ABC un triunghi în care $\sphericalangle B > \sphericalangle C$. Se duce bisectoarea unghiului A care întâlnește latura BC în E și AM mediana corespunzătoare laturii BC. Din B se duce perpendiculara BD pe bisectoare, a cărei prelungire intersectează latura AC în F. Să se arate că:

1. *Bisectoarea unghiului A este și bisectoarea unghiului BEF.*
2. *Avem relația $\overline{BC} \cdot \overline{ED} = 2\,\overline{ME} \cdot \overline{DA}$.*

Mihai Roșu,
elev Slatina

Soluție. 1. AD este mediatoarea segmentului BF fiind perpendiculară pe acesta, iar $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAF$. Rezultă că $EF = EB$ și deci $\Delta FED = \Delta DEB$.

De aci $\sphericalangle FED = \sphericalangle DEB$.

2. Aplicăm triunghiului AEC tăiat de transversala BDF, teorema lui Menelaus.

$$\overline{BE} \cdot \overline{CF} \cdot \overline{AD} = \overline{BC} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{DE}.$$

Insă

$$\overline{BC} \cdot \overline{DE} = 2 \cdot \overline{ME} \cdot \overline{AD}$$

deci

$$\overline{CF} \cdot \overline{BE} = 2 \cdot \overline{ME} \cdot \overline{AB}.$$

Ultima egalitate este o identitate deoarece

$$\overline{CF} = \overline{AC} - \overline{AF} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

$$\overline{ME} = \overline{BM} - \overline{BE} =$$

$$= \frac{BC}{2} - \frac{BC \cdot AB}{AB + AC} = \frac{BC\,(AC - AB)}{2\,(AB + AC)}.$$

Problema 394

In laborator, avem un galvanometru cu rezistența interioară de 50 ohmi și care arată 2 miliamperi pentru toate cele 10 diviziuni ale scalei. Cum am putea folosi o rezistență suplimentară r_1, *și ce valoare să aibă, pentru ca acest galvanometru să devină un ampermetru, care să ne permită măsurarea unui curent de 10 amperi pentru toate cele 10 diviziuni ale scalei?*

Nicolae Stănescu

Soluție. Rezistența r_1 o vom lega în derivație pe aparat, adică vom face un shunt. Din relația:

$$I = i_1 \frac{r_1 + R}{r_1} \text{Amperi}$$

($I = 10\ A$; $i_1 = 0{,}002\ A$; $R = 50$ ohmi) găsim

$$r_1 = \frac{50}{4999} = 0{,}010002 \text{ ohmi}.$$

Problema 418

Să se determine n *astfel ca expresia*

$$E = (2^n + 1)(a^n + b^n) + (a + b)^n (1 - 2^{2n})$$

să fie divizibilă prin $2(a^2 + b^2) + 5\,ab$.

Ciontu Andrei,
elev, Buc.

Soluție. Notând $b = ax$, cele două expresii devin

$$E = a^n [(2^n + 1)(x^n + 1) + (x + 1)^n (1 - 2^{2n})]$$

și

$$a^2 [2(1 + x^2) + 5x].$$

Deci va trebui să determinăm n în așa fel încât polinomul

$$P(x) \equiv (2^n + 1)(x^n + 1) + (1 - 2^{2n})(x + 1)^n$$

să se dividă prin

$$P_1(x) \equiv 2(1 + x^2) + 5x \equiv 2(x + 2)(x + \tfrac{1}{2}).$$

Cele spuse mai sus se realizează când avem în același timp

$$P(-2) = 0 \text{ și } P(-\tfrac{1}{2}) = 0,$$

sau $$(-2)^n + (2)^n + 1 + (-1)^n = 0$$

și $$(-1)^n + 1 + (-\tfrac{1}{2})^n + (\tfrac{1}{2})^n = 0.$$

Aceste egalități au loc atunci și numai atunci când n este impar. Deci pentru orice n impar și mai mare decât 1, E se divide prin $2(a^2 + b^2) + 5\,ab$.

Problema 451

Notăm

$$2^n = N \text{ și } N \frac{a^N - 1}{a^N + 1} = U_n.$$

Să se arate că:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} = \frac{N^2}{U_n} - \frac{1}{U_0}.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Ținând seama că $N = 2^n$ mai putem scrie

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} = \frac{(2^n)^2}{U_n} - \frac{1}{U_0}.$$

Dacă relația este adevărată trebue să avem și:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \frac{(2^{n+1})^2}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_0}$$

cum însă $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2N$, vom avea

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \frac{4N^2}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_0}.$$

Mai putem scrie și:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} + U_n = \frac{N^2}{U_n} - \frac{1}{U_0} + U_n.$$

Trebue să demonstrăm deci că avem:

$$\frac{4N^2}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_0} = \frac{N^2}{U_n} - \frac{1}{U_0} + U_n$$

sau mai putem scrie:

$$\frac{4N^2}{U_{n+1}} - \frac{N^2}{U_n} = U_n$$

cum însă $U_n = N \frac{a^N - 1}{a^N + 1}$ și ținând seama că $N = 2^n$ vom avea și $U_{n+1} = 2N \frac{a^{2N} - 1}{a^{2N} + 1}$.

Inlocuind avem:

$$N^2 \left(\frac{4}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \right) = N^2 \frac{2(a^{2N} + 1) - (a^N + 1)^2}{N(a^N + 1)(a^N - 1)} =$$

$$= N \frac{2a^{2N} + 2 - a^{2N} - 1 - 2a^N}{a^{2N} - 1} = N \frac{a^{2N} - 2a^N + 1}{(a^N + 1)(a^N - 1)} =$$

$$= N \frac{(a^N - 1)^2}{(a^N + 1)(a^N - 1)} = N \frac{a^N - 1}{a^N + 1} = U_n.$$

Problema 509

Echipa unui miner a îndeplinit planul pe anul 1951 în 6 $\frac{1}{4}$ luni, lucrând apoi în contul anului 1952.

a) *Cu cât la sută a depăşit planul pe 1951?*

b) *Dacă la începutul anului 1952 norma va fi mărită cu 25%, în cât timp se va realiza planul pe anul respectiv, echipa mărindu-şi randamentul cu 10%?*

c) *Cât la sută prezintă depăşirea normei pe 1952?*

N. Mihăilă

Soluţie.

a) $$x = \frac{100\left(12 - 6\frac{1}{4}\right)}{6\frac{1}{4}} = 92\%$$

b)

Normă	Randament	Timp
1	1	$6\frac{1}{4}$
1,25	1,1	x

Timpul fiind direct proporţional cu norma şi invers proporţional cu randamentul, avem:

$$x = 6\frac{1}{4} \cdot \frac{1,25}{1} \cdot \frac{1}{1,1} \cong 7\frac{1}{10} \text{ luni.}$$

Echipa a lucrat încă din 1951 în contul lui 1952; $5\frac{3}{4}$ luni, în contul lui 1952, reprezintă:

$$5\frac{3}{4} \cdot \frac{1,1}{1,25} \cong 5\frac{3}{50} \text{ luni.}$$

Deci planul pe 1952 va fi realizat după

$$7\frac{1}{10} - 5\frac{3}{50} = 2\frac{2}{50} \text{ luni}$$

dela începutul lui 1952.

c)

$$x = \frac{100\left(12 - 2\frac{2}{50}\right)}{7\frac{1}{10}} = 140,2\%.$$

Problema 557

Energia electrică înmagazinată de un acumulator format din două celule prin încărcarea lui timp de 12 ore cu un curent de 5 A, este folosită la nichelarea unui obiect cu aria de 5 dm². Ştiind că se lucrează cu un curent de 0,5 A pentru fiecare dm² din suprafaţa obiectului şi că acumulatorul are un randament de 0,8, să se afle grosimea stratului de nichel depus şi timpul necesar nichelării.

Mihai Stănescu
elev, Bucureşti

Soluţie. Energia pe care o poate furniza acumulatorul este

$$Q = 0,8 \cdot 12 \cdot 3600 \cdot 5 \text{ culombi.}$$

Valenţa nichelului fiind 2, cantitatea de nichel depus este

$$P = \frac{Q}{2 \times 96540}$$

atomi gram, iar în grame (greutatea atomică a Nichelului = 58,69),

$$P = \frac{58,69\ Q}{2 \cdot 96540} \text{ gr.}$$

Volumul nichelului depus este ($d_{Ni} = 8,8$ gr/cm³), $P/8,8$ cm³. Grosimea stratului de nichel depus este deci $P/8,8S$ cm (S este suprafaţa obiectului egală cu 500 cm²).

Făcând calculele găsim pentru grosimea stratului de nichel 0,1136 mm.

Timpul necesar nichelării este:

$t = 19,2$ ore $= 19$ ore şi 12 minute.

Problema 558

O pendulă este aşezată la nivelul mării unde $g = 981$ *cm/s² şi raza pământului* $R = 6360$ *Km. Să se determine sensul şi variaţia zilnică, dacă este mutată la o altitudine* $z = 2120$ *m.*

I. Munteanu
elev, Lupeni

Soluţie. Lungimea pendulului care bate secunda la nivelul mării, o obţinem făcând în relaţia

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},\quad T = 1.$$

Găsim

$$l = \frac{g}{\pi^2} = 99,396 \text{ cm.}$$

Timpul, în care pendulul de lungime l face o oscilaţie simplă, este dat de relaţia

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g_z}} \text{ secunde,}$$

unde g_z este acceleraţia gravităţii la altitudinea z

$$g_z = \frac{g\,R^2}{(R+z)^2}.$$

Calculând g_z, găsim $\log g_z = 0,99139$. Apoi $\log T_1 = 0,00014$.

Deoarece $g_z < g$, pendula va înainta.

Variaţia zilnică este:

86400 $(T_1 - 1)$ secunde, adică 28 secunde.

Problema 575

Firul unei linii telegrafice are 80 ohmi, bateria are 50 volți și rezistența interioară 5 ohmi, iar receptorul are tot 5 ohmi. Închiderea circuitului se face prin pământ (rezistență neglijabilă).

In urma unui scurt circuit între fir și pământ intensitatea curentului la transmițător este de 0,758 amperi, iar la receptor de 0,028 amperi. Să se afle locul unde s'a produs scurtcircuitatea și valoarea rezistenței de scurtcircuitare, firul fiind de cupru cu secțiunea de 0,1 mm².

Mihai Stănescu
elev, București

Soluție. Fie x distanța dela receptor la locul scurtcircuitării, fie r valoarea rezistenței de scurtcircuitare.

Lungimea întregului fir o calculăm prin formula $R = \frac{\rho l}{s}$, de unde $l = \frac{Rs}{\rho}$. Găsim $l = 8/0{,}0178 = 449{,}4$ m.

Rezistența firului care unește transmițătorul cu locul scurtcircuitării este

$$80 \times \frac{449{,}4 - x}{449{,}4} \text{ ohmi.}$$

Rezistența celeilalte porțiuni de fir este

$$80 \times \frac{x}{449{,}4} \text{ ohmi.}$$

Rezistența r fiind în paralel cu rezistența celei de a doua porțiuni a firului, tensiunea la capetele ei este egală cu tensiunea dela receptor.

Deci

$$50 - 0{,}758\left(5 + 80\,\frac{449{,}4 - x}{449{,}4}\right) = 5 \times 0{,}028$$

de unde scoatem

$$x = 108 \text{ m.}$$

Rezistența r dă împreună cu rezistența firului care unește locul scurtcircuitării cu receptorul o rezistență echivalentă

$$R = \frac{80 \cdot \frac{108}{449{,}4} \cdot r}{80 \cdot \frac{108}{449{,}4} + r} \text{ ohmi,}$$

deci

$$50 = 0{,}758\left(5 + 80 \cdot \frac{341{,}4}{449{,}4} + R + 5\right),$$

de unde

$$r = 9{,}3 \text{ ohmi.}$$

Problema 576

Fie polinomul $P(x) = x^{n+1} - (p+1)\,x^n + p$. *Să se arate că acest polinom este divizibil prin* $x - 1$, *și să se afle câtul* $f(x)$. *Dacă* $p > 0$, *ecuația* $f(x) = 0$ *are cel puțin o rădăcină reală.*

N. Gaiu

Soluție. Avem $P(1) = 0$, deci $P(x)$ se divide cu $x - 1$. Putem scrie

$$P(x) = x^n(x-1) - p(x^n - 1).$$

Câtul este deci

$$f(x) = x^n - p(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1).$$

Când n este impar ecuația $f(x) = 0$ are în mod sigur o rădăcină reală, oricare ar fi p, de semn contrar ultimului termen, conform unei teoreme a lui D'Alembert.

Când n este par avem $f(0) = -p < 0$ și $f(-1) = 1 + p > 0$. Deci în acest caz ecuația $f(x) = 0$, are cel puțin o rădăcină reală cuprinsă între 0 și -1.

n fiind par, în acest de al doilea caz, și ecuația admițând o rădăcină reală, ea admite, conform teoremei lui D'Alembert amintită mai sus, încă o rădăcină reală.

Problema 589

Ridicând succesiv pe 11 *la puterea a doua, a treia, a patra, etc., observăm că de fiecare dată căpătăm un număr de cifre care depășește cu o unitate exponentul lui* 11. *Care este prima putere pentru care această regulă nu mai este valabilă?*

Gh. D. Simionescu

Soluție. 11^n având $n+1$ cifre, vom avea

$$\log 11^n < n + 1$$

$$n \log 11 < n + 1, \text{ de unde}$$

$$n < \frac{1}{\log 11 - 1} = 24{,}1\ldots$$

n fiind întreg, 11^n are $n+1$ cifre când $n \leqslant 24$. Deci prima putere, pentru care regula nu mai e valabilă, este $n = 25$.

Problema 590

Stațiunea hidroelectrică dela Cuibâșev va fi înzestrată cu turbinele cele mai puternice din lume. In fiecare secundă vor trece prin roata turbinei 700 m^3 *de apă la presiunea coloanei de apă de* 25 *m înălțime. Randamentul fiind* 0,9 *să se calculeze puterea utilă a turbinei.*

* * *

Soluție. Puterea utilă cerută este

$$0{,}9 \times 700000 \times 25 \text{ kgm/s} =$$
$$= 154410{,}7 \text{ kW} = 210000 \text{ C.P.}$$

(1 kW = 102 kgm/s, 1 C.P. = 75 kgm/s).

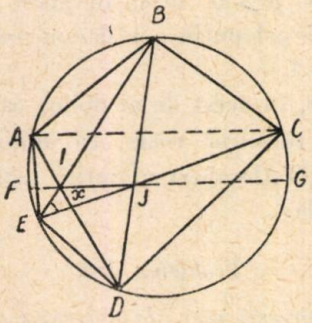
Problema 591

Fie ABCDE un pentagon înscris într'un cerc, astfel că AB = BC. Notăm cu I intersecția diagonalelor AD, BE și cu J intersecția diagonalelor BD, EC. Să se arate că IJ este paralelă cu AC.

N. N. Mihăileanu

Soluție. Patrulaterul $IJDE$ este inscriptibil deoarece $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BEC = \frac{1}{2}$ măs. arc AB. Deci

$$\sphericalangle IJB = \sphericalangle IED = \frac{1}{2} \text{ măs (arc } BC + \text{arc } CD).$$



Insă

$$\sphericalangle (BD, AC) = \frac{1}{2} \text{ măs (arc } AB + \text{ arc } CD),$$

și cum arc AB = arc BC, rezultă

$$\sphericalangle IJB = \sphericalangle (BD, AC) \text{ sau } AC \parallel IJ.$$

Se mai poate arăta prelungind, IJ până taie cercul în F și G; $\sphericalangle JID = \sphericalangle JED$, sau

$$\frac{1}{2} \text{ măs (arc } AF + \text{arc } GD) =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ măs (arc } CG + \text{arc } GD), \text{ de unde}$$

$$\text{arc } AF = \text{arc } CG, \text{ sau } AC \parallel FG.$$

Problema 592

Ce fel de ochelari sunt necesari pentru un miop pentru care distanța vederii distincte este b′ = 10 *cm, știind că distanța vederii distincte normale este* b = 25 *cm.*

C. d. P.

Soluție. Miopii folosesc lentile convergente, căci acestea apropie de ochi imaginea obiectului, formând-o la distanța vederii distincte a miopului. Inlocuind în formula lentilelor convergente $d' = b' = 0{,}1$ m, pentru $d = b = 0{,}25$ m, vom avea

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}25}; \quad \frac{1}{f} = 6$$

Deci convergența lentilelor cerute este 6 dioptrii.

Problema 594.

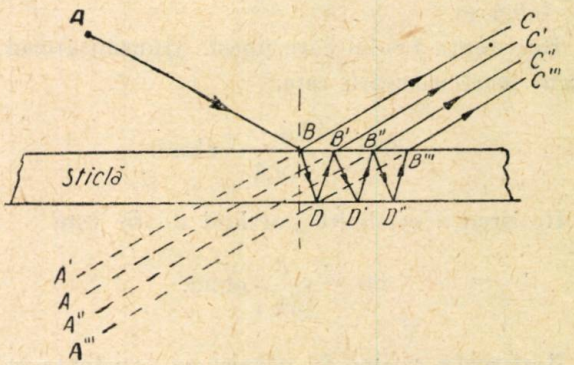
De ce se observă într'o oglindă obișnuită în afară de imaginea principală încă câteva imagini mai slabe?

Fenomenul se poate observa foarte ușor privind imaginea unei lumânări sub un unghi mic față de suprafața oglinzii.

C. d. P.

Soluție.

Fie A un punct luminos așezat în fața oglinzii, fie AB o rază luminoasă care pleacă din A și întâlnește suprafața sticlei oglinzii în B.



Raza AB se reflectă și se refractă parțial (vezi figura). Raza refractată BD, se va reflecta în interiorul sticlei, iar la reieșirea din sticlă se va reflecta și refracta din nou, ș.a.m.d.

Ochiul va vedea imaginea lui A în prelungirea razelor CB, $C'B'$, $C''B''$, $C'''B'''$, etc.

Imaginea principală este aceea văzută în prelungirea lui $C'B'$, iar toate celelalte sunt imagini secundare. Ele sunt din ce în ce mai slabe întrucât intensitățile razelor BC, $B''C''$, $B'''C'''$ slăbesc progresiv.

Astfel se explică formarea imaginilor secundare într'o oglindă obișnuită. Cauza fenomenului este, după cum am văzut, sticla oglinzii.

Intr'o oglindă metalică, fenomenul nu se observă.

Problema 595

O eprubetă se umple cu apă și se introduce cu capătul deschis într'un pahar plin deasemenea cu apă. Apa din pahar și din eprubetă se încălzește treptat până la 100°C. *Ce fenomene se vor petrece în eprubetă?.*

C. d. P.

Soluţie. Incălzind treptat, aerul din apa din eprubetă se adună în fundul eprubetei. Odată cu creşterea temperaturii se observă o uşoară scădere a nivelului apei din eprubetă.

La 100° presiunea vaporilor apei devenind egală cu cea atmosferică, apa din eprubetă este evacuată rapid, eprubeta rămânând goală.

Problema 596

Să se construiască geometric rădăcinile sistemului

$$x^2 + y^2 = k^2$$

$$\frac{x-a}{y-b} = \frac{m}{n}$$

unde a, b, m, n, k sunt segmente date.

* * *

Soluţie. Este evident că x şi y sunt catetele AB, AC, iar k ipotenuza BC, ale unui triunghi

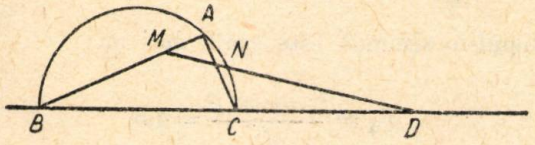


Fig. 1

dreptunghic ABC. Dacă luăm respectiv pe AB, AC; $BM = a$, $CN = b$, atunci $\overline{AM} : \overline{AN} = m : n$

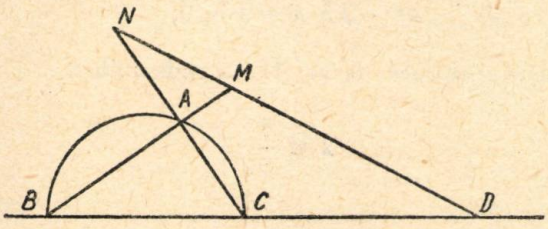


Fig. 2

şi forma triunghiului AMN este cunoscută. Notând cu D intersecţia $(MN; BC)$ dacă D nu se află între B şi C şi cu D_1 aceeaşi intersecţie dacă D_1

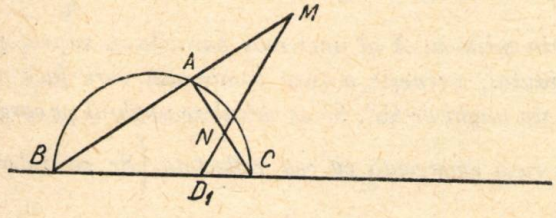


Fig. 3

se află între B şi C şi aplicând teorema lui Menelaus triunghiului ABC tăiat de una din transversalele DNM (fig. 1 şi 2) sau D_1NM (fig. 3 şi 4) vom avea

$$\frac{DC}{DB} = \frac{b(x-a)}{a(y-b)} = \frac{bm}{an} \text{ (fig. 1 şi 2) sau} \qquad (1)$$

$$\frac{D_1C}{D_1B} = -\frac{b(x-a)}{a(y-b)} = -\frac{bm}{an} \text{ (fig. 3 şi 4)}$$

Prin urmare punctele D şi D_1 sunt fixe şi împart armonic segmentul BC.

Deducem următoarea construcţie: construim punctele D şi D_1 care împart BC conform cu egalităţile (1). Forma triunghiului AMN fiind cunoscută

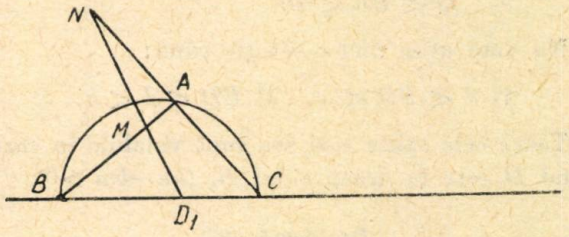


Fig. 4

BMD şi BMD_1 sunt cunoscute. Prin urmare M se află în intersecţia cercului $B(a)$ cu arcele de cerc capabile de unghiurile BMD şi BMD_1 descrise respectiv pe BD şi BD_1.

Discuţie. Cele 3 arce de cerc au un punct comun F (demonstraţia acestei chestiuni o voi da mai jos)[1]. Fie E intersecţia perpendicularei ridicate în B pe BC cu cercul ce trece prin B şi D_1.

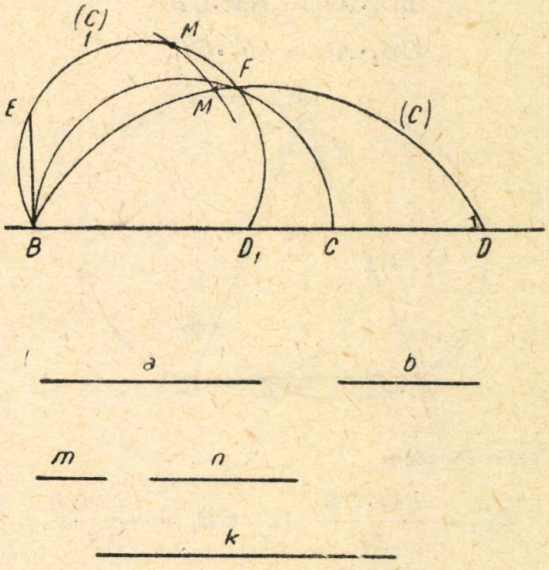


Fig. 5

Vom avea două soluţii când:

1) $BD < BE < a < d$
2) $BE < a < BF$
3) $BE < BF < a < d < BD$

---

[1]) Fie F, F' punctele în care cercurile (C) şi (C_1) taie semicercul de diametru BC. Avem

$\sphericalangle D_1F'C = 90° - \sphericalangle BF'D_1 = 90° - M$; $\sphericalangle CFD = \sphericalangle BFD - 90° = 180° - M - 90° = 90° - M$,

deci $\sphericalangle D_1F'C = \sphericalangle DFC$.

Această egalitate nu poate avea loc decât dacă F' se confundă cu F căci şi $\sphericalangle DF'C = \sphericalangle D_1F'C = 90° - M$.

unde d este diametrul cercului BED_1. Vom avea o singură soluţie când:

1) $d < a < BD$

2) $BF < BD < a < BE$

3) $a < BE < BF$.

Nu vom avea nici o soluţie când:

1) $d < BD < a$; 2) $BD < d < a$

Toate cele spuse mai sus sunt valabile în cazul când D este la dreapta lui B, $(an - bm > 0)$.

Problema 597

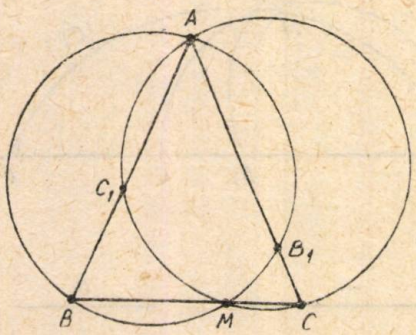
Se dă triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ şi fie M un punct mobil pe BC. Cercurile AMB, AMC intersectează laturile AC, AB, a doua oară în punctele B_1, C_1. Să se arate că suma segmentelor BC_1 şi B_1C este constantă.

Cezar Coşniţă

Soluţie. Scriind în două feluri puterile lui B şi C faţă de cercurile AMC şi AMB obţinem relaţiile

$$BC_1 \cdot AB = BM \cdot CB$$

$$CB_1 \cdot AC = MC \cdot CB$$



din care scoatem

$$BC_1 = \frac{BM \cdot CB}{AB} \quad \text{şi} \quad CB_1 = \frac{MC \cdot CB}{AB}$$

Prin adunare obţinem

$$BC_1 + CB_1 = \frac{BC^2}{AB} = \text{constant}.$$

Când M se află pe prelungirea lui BC diferenţa segmentelor BC_1 şi CB_1 deci suma lor algebrică este constantă.

Problema se poate generaliza pentru un triunghi oarecare. In acest caz este constantă suma segmentelor $\overline{BC_1}$ şi $k\overline{B_1C}$ unde $k = \overline{AB} : \overline{AC}$.

Problema 598

Două pendule electrice electrizate pozitiv sunt aşezate la oarecare distanţă între ele şi dau o repulsie egală cu unitatea.

Apropiem pendulele până se ating şi apoi le depărtăm la o distanţă egală cu jumătatea distanţei iniţiale şi obţinem o repulsie egală cu 4,5 unităţi. Se cere raportul sarcinilor pozitive, m şi m' ale celor două pendule.

I. Munteanu
elev, Cluj

Soluţie. Fie d distanţa iniţială între cele două pendule. Repulsia iniţială este

$$F_1 = \frac{mm'}{d^2} = 1 \qquad (1)$$

Prin atingere pendulele îşi echilibrează potenţialele. Presupunându-le identice, cantităţile de electricitate pe care le posedă devin amândouă egale cu $\frac{1}{2}(m + m')$.

Repulsia secundă este egală deci cu

$$F_2 = \frac{(m + m')^2}{d^2} = 4{,}5 \qquad (2)$$

Impărţind (2) la (1) şi notând $\frac{m}{m'} = k$, obţinem:

$$k^2 - 2{,}5\ k + 1 = 0,$$

ecuaţie reciprocă de gr. II cu rădăcinile

$$2 \text{ şi } \frac{1}{2}.$$

Problema 599

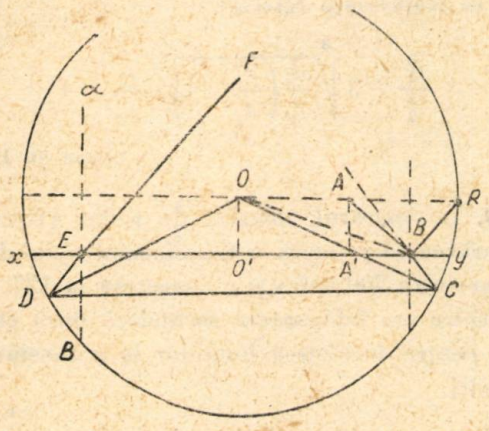
Se consideră o oglindă concavă sferică de rază r, *plină cu un lichid astfel ca distanţa dela suprafaţa lichidului la centrul sferei să fie egală cu* $\frac{1}{4}$ r.

Din mijlocul A al unei raze paralele cu suprafaţa lichidului, porneşte o rază luminoasă care face cu apa un unghi de 45°. Să se calculeze unghiul pe care-l face raza emergentă cu cea reflectată. $\left(\text{Se consideră indicele de refracţie } k = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Anastasiu Dinu
elev, Bucureşti

Soluţie. Raza luminoasă intrând în lichid se refractă, apoi întâlnind oglinda în C, se reflectă în interiorul lichidului, întâlneşte din nou oglinda în D, se reflectă şi iese din lichid prin E, refractându-se.

O' și A' fiind proecțiile centrului sferei O și punctului A pe suprafața xy a lichidului iar B



punctul în care raza luminoasă întâlnește xy, vom avea

$$\overline{O'B} = \overline{O'A'} + \overline{A'B} = \overline{OA} + \overline{AA'} = \frac{r}{2} + \frac{r}{4}$$

$$\overline{OB^2} = \overline{OO'^2} + \overline{O'B^2} = \frac{10}{16} r^2; \quad \overline{OB} = \frac{\sqrt{10}}{4} r$$

$$\sin (OBO') = \frac{\overline{OO'}}{O'B} = \frac{1}{3}.$$

In triunghiul OBC cunoaștem deci $\overline{OC} = r$, $\overline{OB}$ și $\sphericalangle OBC = \text{arc sin} \frac{1}{3} + \text{arc sin } (K \sin i) + 90°$, unde $i = 45°$.

Putem deci calcula $\sphericalangle OCB$. Cu ajutorul tabelelor logaritmice găsim $\sphericalangle OCB = 30°54'45''$ conform legilor reflexiei avem

$$\sphericalangle OCB = \sphericalangle OCD = \sphericalangle ODC = \sphericalangle ODE,$$

deci în patrulaterul $DEBC$

$$\sphericalangle DEB = 360° - (90° + \text{arc} (\sin K \sin i) + 4 \sphericalangle OCB); \quad \sphericalangle DEB = 116°21'.$$

Prin urmare unghiul de incidență al razei DE este

$$\sphericalangle DEB = 116°21' - 90° = 26°21'.$$

Mai avem

$$\sin (FE\,\alpha) = \frac{1}{K} \sin (DE\,\beta)$$

de unde

$$\sphericalangle FE\,\alpha = 38°52'50''.$$

Deoarece

$$\sphericalangle FEO' + \sphericalangle A'BR = 51°7'10'' + 135° > 180°,$$

raza emergentă EF întâlnește raza reflectată BR sub linia xy. Avem

$$\sphericalangle (EF;\ BR) = 180° - \sphericalangle A'BR - \sphericalangle FEO'$$

$$\sphericalangle (EF;\ BR) = 6°7'10''.$$

PROBLEME PROPUSE

807. Roata unui strung este luminată intermitent printr'un disc prevăzut cu 5 deschideri echidistanțate și pare că ea se mișcă în sens opus celui real făcând 5 rotații pe secundă. Care este rotația reală a roții strungului și câte rotații face discul, știind că la 8 rotații pe secundă ale discului, roata strungului este în repaus stroboscopic?

N. Stănescu

808. Se dă un cerc și două puncte. Prin aceste puncte să se ducă un alt cerc astfel încât să intersecteze primul cerc în două puncte situate la extremitățile unui diametru.

S. Pevzner

809. Un preparat dintr'o substanță radioactivă este pus într'un calorimetru de capacitate calorifică 4 cal/gr. Cu cât crește temperatura în 10 ore, dacă preparatul are o intensitate de 0,2 Curie și emite particole α având o energie de 5 *MeV*.

I. Licea,
elev, Galați

810. Un trapez $ABCD$ (AB fiind baza mică) variază rămânând înscris într'un cerc și având AD fixă.

— Să se arate că paralela dusă la baze prin punctul de intersecție al diagonalelor, trece printr'un punct fix.

— Să se găsească locul geometric al intersecției dreptei DC cu paralela dusă prin B la AD.

Emil Morțun

811. Se dă o roată brută cu diametrul exterior $D_e = 446$ mm pentru a i se tăia dinți cu un modul $m = 2$, la o freză cu roată elicoidală cu $z_e = 60$ dinți angrenată la șurubul fără sfârșit cu un singur început $i = 1$.

Să se arate metoda de împărțire cu două discuri, calculul numărului de dinți și fracțiunea de rotire.

Nicolae Sălan
student, Iași

812. Să se aprecieze eroarea care se face atunci când se înlocuește expresia $\sqrt{1+2x}$ cu expresia $1+\frac{x(2+x)}{2+2x}$ în cazul când $|x|$ este foarte mic.

M. Filonenco-Borodici
(Moscova)

813. O baterie electrică cu rezistența interioară de 10 ohmi este pusă în circuitul unei sonerii cu o rezistență de 20 ohmi dând o intensitate de 3 amperi. Se cere: forța electromotrice, tensiunea la bornele bateriei, puterea cu care merge soneria și randamentul circuitului.

Ilie Davidescu
elev, Piatra Neamț

814. Intr'un cerc se înscrie un triunghiu oarecare ABC. Diametrele AA_1, BB_1, CC_1 întâlnesc laturile BC, CA, AB respectiv în A_2, B_2, C_2. Să se arate că:

$$\frac{A_2A_1}{AA_2}+\frac{B_2B_1}{BB_2}+\frac{C_2C_1}{CC_2}=1.$$

* * *

815. Să se arate că punctul de întâlnire a diagonalelor unui patrulater înscris într'un cerc și circumscris altui cerc, este situat pe linia centrelor celor două cercuri.

* * *

816. Se dă un trapez $ABCD$ circumscris unui cerc. Să se arate că cercurile care au ca diametre laturile neparalele AD și BC sunt tangente într'un punct T situat pe bisectoarea unghiului I format de prelungirea laturilor neparalele ale trapezului

C. Ionescu-Țiu

817. Avem 200 cm³ dintr'o soluție de 3,65 gr. HCl într'un litru de apă distilată și o soluție bazică de concentrație necunoscută. Cu un indicator constatăm că soluția acidă e neutralizată de 50 cm³ din soluția bazică. Să se afle concentrația acestei soluții bazice față de soluția normală.

Gh. Niculescu
elev, Ploești

818. Intr'un lichid de densitate d_1 plutește cu baza orizontală un con făcut dintr'o materie neporoasă de densitate d_2. Când plutește cu vârful în sus, el se scufundă cu baza la distanța i_1 de nivelul lichidului; iar când plutește cu vârful în jos se scufundă cu i_2 sub nivelul lichidului.

Să se stabilească relația:

$$\frac{\sqrt[3]{i_1}}{\sqrt[3]{i_2}}+3\sqrt[3]{\frac{d_1}{d_2}\left(\frac{d_1}{d_2}-1\right)}\cdot\frac{i_1}{i_2}=1.$$

Simon Șt. Petre

819. In aparatul sovietic de radio «Record», înfășurătoarea primară a transformatorului de alimentare este 700 spire și e conectată la 127 volți. Câte spire are înfășurarea secundară dacă ea servește pentru încălzirea lămpilor la o tensiune de 6,3 volți.

* * *

820. Două cercuri O_1 și O_2 de raze constante R_1 și R_2 se intersectează în A și B. Fie CD tangenta lor comună. Se cere locul geometric descris de centrul cercului circumscris triunghiului BCD când A variază iar B rămâne fix.

Stanciu N. Toma
elev, Ploești

821. Secțiunile brațelor unui tub de sticlă în formă de U sunt egale respectiv cu 1 mm² și 3 mm². Se întreabă care este diferența de nivel a glicerinei din cele două brațe, dacă se socotește unghiul limită $\varphi=0$.

Se ia $g=980$ cm/s², iar tensiunea superficială a glicerinei $\alpha=65$ dyne/cm.

C. Dragomir
elev, Pitești

822. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[3]{4x^2+10x+4}+\sqrt[3]{2x^2-5x-3}=\sqrt[3]{2x+1}$$

A. Tralmac
(Leningrad)

823. Fiecare agregat al centralelor de pompare al canalului Volga-Don pompează 15 m³ de apă la înălțimea de 15 metri timp de o secundă. Cât de mare trebue să fie puterea motorului dacă randamentul instalației este 90%?

* * *

824. Intr'un trunchiu de con circular drept este înscrisă o sferă. Volumul acestei sfere este egal cu jumătate din volumul trunchiului de con. Să se găsească unghiul format de generatoare și baza conului.

S. Petrov

825. Intr'un vas se găsește un gaz la presiunea de 0,01 mm mercur la temperatura de 7° Celsius. Câte molecule se află într'un cm³ de gaz?

* * *

826. Bisectoarele interioare ale unui triunghi oarecare ABC întâlnesc cercul circumscris respectiv în punctele A_1, B_1, C_1. Să se stabilească relația:

$$\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} \cdot \overline{CC_1} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)R}{a+b+c}.$$

Mihai Roșu
student, București

827. Trei muncitori duc o placă metalică având forma unui triunghi ținând-o de vârfuri. Să se demonstreze că fiecare dintre ei duce aceiaș greutate.

* * *

828. Se poate construi un triunghiu ABC, cunoscând picioarele a trei ceviene, precum și raporturile în care acestea împart laturile corespondente?

M. Ghermănescu

829. Două cercuri cu centrele O și O' se intersectează în punctele A și B. Dreapta OO' taie cercurile O și O' în M și N astfel că centrele O și O' sunt între M și N. Se duce tangenta comună ST și fie P și Q intersecțiile dreptei MS cu dreptele MT și $O'T$. Centrul cercului O se mișcă pe dreapta MN; punctele M și N rămânând fixe. Se cere: 1°. Să se arate că punctele P, A și B sunt coliniare. 2°. $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{MN} = \overline{PM} \cdot \overline{PN} \cdot \overline{ST}$, și $\frac{\overline{TQ}^2}{\overline{MQ} \cdot \overline{SQ}}$ = constant. 3°. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului PQ și locul centrului de greutate al triunghiului MNQ.

Tiberiu Weszely
elev, Tg.-Mureș

830. Să se afle valorile întregi ale lui x pentru care polinomul $x^3 - x^2 - x - 1$ să fie divizibil cu 49.

Const. Berdan

831. Să se rezolve sistemul

$$\log_2 x + \log_4 y = 2{,}5$$
$$\log_x 4 + \log_y 16 = 5.$$

Dudiță Florea
student, Orașul Stalin

832. Să se arate că dacă

$$\frac{\sin x}{a} + \frac{b}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{c} + \frac{d}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\sec x}{e} + \frac{f}{\operatorname{cosec} x}$$

avem relația:

$$c^2(1-abef)^2 = e^2(1-af)^2(1+cd)^2 + m^2(1-be)^2(1+cd)^2.$$

Gh. I. Bercea
student, Timișoara

833. Notând $|x|$ valoarea absolută a lui x să se arate că oricare ar fi numerele a și b, avem:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

* * *

834. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Paralela dusă prin B la diagonala AC taie latura AD în E, iar paralela dusă prin C la diagonala BD taie aceiaș latură în F. Să se arate că BC este medie geometrică între AE și DF.

C. Scutelnicu
elev, Dorohoi

835. Trei elemente galvanice cu *f. e. m.* de 1,3 V, 1,4 V și 1,5 V și rezistență interioară câte 0,3 ohmi fiecare, sunt legate în paralel cu circuitul unei rezistențe exterioare de 0,6 ohmi. Să se determine intensitățile curenților în fiecare dintre elemente.

* * *

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E. 276. « *Vom construi și extinde centralele termoelectrice cu o putere de 1.196.000 kw* », spune tovarășul Gheorghiu-Dej în « Raport asupra planului de electrificare a țării ».

Să se afle ce cantitate de cărbuni se vor arde în 24 ore în cuptoarele acestor termocentrale știind că randamentul turbinelor este 30% și că un kg cărbune desvoltă prin ardere 7000 kcal.

Gh. Dănilă
elev, Giurgiu

E. 277. Hidrocentralele dela Kuibâșev, Stalingrad și Kahovca vor avea o putere de 4 milioane kW. Câte becuri de câte 100 watti s'ar putea alimenta dela aceste hidrocentrale. Să se exprime puterea în cai putere și kilogrametri pe secundă.

* * *

E. 278. Folosind descompunerea în factori să se arate că numărul:

$$N = 10 \times 13 \times 62 \times 65 \times 128 \times 217$$

este un patrat perfect. Să se găsească apoi rădăcina patrată fără întrebuinţarea regulei practice de extragerea rădăcinii.

* * *

E. 279. Să se verifice identităţile:

$$\frac{a}{1-\frac{1}{a}}+\frac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{1-a}}+\frac{\frac{1}{1-a}}{a}=3$$

$$\frac{\frac{1}{a}}{1-a}+\frac{1-a}{\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}+\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}{\frac{1}{a}}=3$$

unde a diferă de zero şi unitate.

C. I. Ţ.

E. 280. Să se verifice identităţile:

$$\frac{1-a}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1+\frac{1}{a}}{1-a}+\frac{1+a}{1-\frac{1}{a}}+\frac{1-\frac{1}{a}}{1+a}=4$$

$$\frac{a}{1-\frac{1}{a-1}}+\frac{1-\frac{1}{a-1}}{a}+\frac{2-a}{1+\frac{1}{a-1}}+\frac{1+\frac{1}{a-1}}{2-a}=4.$$

C. I. Ţ.

E. 281. Să se arate că perpendicularele duse din vârful unghiului drept A al unui triunghi dreptunghic ABC pe bisectoarele unghiurilor din vârfurile B şi C, sunt bisectoarele unghiurilor formate de înălţimea din A şi cele două catete.

C. I. Ţ.

E. 282. Să se construiască un cerc tangent la două drepte paralele şi la un alt cerc dat. Problema admite mai multe soluţii. Se va studia şi desena fiecare caz.

* * *

E. 283. Se dă un cerc cu raza de 2 cm. Să se înscrie în cerc un triunghi în care unghiurile să fie proporţionale cu numerele 3, 4, 8 şi să se circumscrie un alt triunghiu având unghiurile proporţionale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Să se calculeze unghiurile celor două triunghiuri în grade, minute şi secunde.

* * *

E. 284. Fie triunghiul dreptunghic ABC. Pe catetele AB şi AC se construiesc respectiv patratele $ABDE$ şi $ACFG$. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului DF, atunci când punctul C se mişcă pe direcţia AC în următoarele cazuri:

a) patratele sunt construite spre exteriorul triunghiului dat;

b) patratele sunt construite spre interiorul triunghiului.

Istinie C. Crăciunel
elev, Craiova

E. 285. Dinamul unei biciclete funcţionează pentru iluminare dând un curent de 0,28 amperi pentru două becuri, fiecare la o tensiune de 6 volţi. Să se determine puterea dinamului şi lucrul executat de curent timp de două ore.

* * *

E. 286. Să se arate că într'un dreptunghi oarecare $ABCD$ distanţa dela vârful A la diagonala BD este egală cu distanţa dela vârful C la dreapta dusă prin B şi paralelă cu diagonala AC.

* * *

E. 287. Să se construiască un patrulater $ABCD$ cunoscând cele patru laturi şi ştiind că diagonala AC împarte unghiul A în două părţi egale.

* * *

E. 288. Fie un triunghi ABC în care medianele AA' şi BB' sunt perpendiculare între ele. Notăm cu G intersecţia medianelor. Să se arate că $AB=CG$ şi că suprafaţa S a triunghiului ABC este dată şi de relaţia $S=\frac{2\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}}{3}$.

Florea C. Constantin
student Bucureşti

E. 289. Electromotorul pentru rotirea plăcilor de gramofon necesită 0,2 amperi la o tensiune de 110 volţi. Să se determine puterea lui şi consumul de energie pentru intervalul de timp cât se cântă o placă, adică pentru 4 minute.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare din Nr. 3, An. IV, R.M.F.)

SOLUȚII DE PROBLEME PRIMITE ÎN LUNA IANUARIE 1953

GIURGIU. Liceul de băeți Clasa VIII-a. Cheorpeacă V. Aurel (E: 165, 171, 181, 205, 206, 223, 234, 235, 237, 238), Mihai M. Vasile (615, E: 203, 206, 209, 214, 218, 223, 227, Mișcol Mircea (568, 574, 593, 615, 643, 662, 666, 685), Clasa IX-a. Biță Pompiliu (593, 595, 609, 615, 644, E: 182, 205, 225, 230, 239), Baciu V. Petre (627, E: 172, 175, 178, 179, 203, 204, 210, 217, 218, 223, 230), Drăgan St. N. Marin (E: 171, 172, 192, 206, 213, 215, 216), Gogoneață P. Paul (E: 202, 203, 209, 210, 211, 217, 218, P), Stanciu I. Mirel (627, E: 157, 172, 179, 203, 210, 217, 218, 223, 224, 225, 227, 230, 231), Vasile T. Alexandru (E: 156, 157, 160, 174, 176, 178, 179, 209, 213, 218, 223, 225, 230), Vidan Marius (643, 718, 721, E: 208, 218, 221, 236, 240), Virginescu Mișu (E: 203, 213, 216, 217, 218, 220, P). Clasa X-a. Petcu I Dumitru (553, 539, 541, 569, 595, 600, 602, 630, 633, 664, 671, 691, E: 155, 168, 172, 179 184, 187, 193, 196, 197, 206, 207, 210), Velicu Mitu (504, 534, 569, 578, 600, 608, 610, 627, 629, 630, 633, 643, 658, 664, 666, 670, 685, 686, 691, 694, 698, E: 158 163, 180, 187, 203, 204, 206, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 220, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 230, P), Clasa XI-a .Fotă M. Stan (528, 607, 648, 676, 680, 681, 685, 691, 692, 693, 694, 698, 701, 703*, 705*, 707*, P).

GALAȚI. Clasa X-a. Iacob Ovidiu (663, 664, 666, 670, 673), Licea Ioan (565, 596, 601, 605, 606, 607, 608, 609 610, 611, 612, 613, 614, 615, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 24, 625, 627, 629, 630, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638 640, 641, 642, P).

IAȘI. Clasa VI-a. Afloarei C. Constantin (E: 203, 204, 205, 207, 209, 211), Clasa VII-a. Cucuteanu Elena (E: 147, 156, 165, 175, 171, 202, 207, 204, 213, 216, 219, 228, 232), Cristian Cristina (E: 155, 156, 160, 167, 192, 213, 216, 228, 230), Ciobanu Elena (E: 160, 175, 203, 204, 209, 216, 223, 225, 227), Copel Iosif (E: 160, 165, 213, 216, 218), Iancu Herman (E: 156, 157, 159, 160, 175), Părpăuță Ana (E: 223, 224, 226, 228, 229, 230, 232, 234), Clasa VIII-a. Dascălu D. Petre (203, 204, 207, 209, 211, 213, 216, 218), Sârbu Teofil (E: 203, 209, 213, 218, 219), Ioan Leonte (E: 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 213, 216, 218, 222). Clasa IX-a. Perhunter Milu (536, 537, 561, 581, 583, 593, 597, 613, 634, 655, E: 163, 179), Weissman Izu (533, 537, 552, 561, 591, 593, 601, 604, 611, 613, 655, 657, 658), Clasa X-a. Babad Osias (581, 603, 651, 664, 670, E: 208, 217, 218). Clasa XI-a. Oarză Petru (652, 655, 664, 670, 685, E: 207, 208, 213, 217, 223, 225, 228). Școala Pedagogică. Anul II. Lipșa Constantin (E: 174, 175, 178, 202, 215, 218), Onișoru C. Dumitru (E: 175, 213, 223, 225, 227, 230, 232), Radu Constantin (E: 202, 223, 225, 227, 230, 232).

LUGOJ. Clasa XI-a. Bidermann Pavel (591, 636, 663, 664, 669, 670, 677, 678, 679, 691, E: 190, 192, 193, 197, 207, 208, 213, 216, 217, 218, 222, 223, 230), Drobuy Ioan (527, 608, 611, 615, 632, 633, 636, 655, 658, 671, 694, 701).

OCNA MUREȘULUI. Liceul mixt. Clasa VII-a. Duca Vasile (E: 213, 216, 217, 218, 228).

ORADEA MARE. Clasa X-a. Covaci Fl. Andrei (504, 505, 506, 508, 513, 515, 520, 536, 537, 550, 588, 593, 597, 598, 600, 602, 604, 621, 624, 629, 633, 640, 648, 651, 655, E: 208, P).

ORAȘUL STALIN. Faroga Gruia (E: 213, 215, 216, 218, 220, 222, 223, 224, 225, 227, 228, 230, 231, 232). Clasa X-a. Nan Stelian (574, 587, 591, 600, 602, 611, 629, 630, 638, 643, 651, 655, 666, 670, 685, 688, E: 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 182, 184, 185, 188, 189, 191, 192, 193, 199, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 218, 220, 223, 225, 228, 230).

PETROȘANI. Clasa VII-a. Fildan Mircea (E: 213, 215, 217, 218, 220).

PERIȘ (Reg. București). Școala tehnică silvică. Ionașcu Gheorghe (730, E: 213, 218, 220, 236).

PIATRA NEAMȚ. Liceul mixt. Clasa VIII-a C. Țifui Zenobia (655, 658, E: 157, 160, 208, 213, 225, 230, P). Clasa X-a B. Pristavu V. Ioan (651, 658 670, E: 225, 228, 230). Clasa XI-a. Aizicovici Mișu (613, 633, 641, 670, 682, E: 213, 216, 217, 218, 221, P), Berea D. (550, 554, 694, 701, 703, E: 223, 230), Davidescu Ilie (536, 550, 554, 611, 613, 652, 655, 660, 670, 675, 682, 693, 699, 698, 703*, 704*, 705*, 706, 707*, E: 203, 206, 208, 228, 230, P), Faibiș Iancu (550, 554, 611, 613, 652, 660, 675, 682, 693, 694, 703*, 704*, 705*, 707*, E: 228, 230, P), Sălăgeanu C. Horațiu (703, 716, E: 230, 236, 239), Țifui Vasile (550, 554, 611, 618, 625, 629, 632, 639, 652, 655, 658, 664, 665, 666, 670, 673 685, 687, 693, 694, 701, 702, 703*, 716, 717, E:157, 190, 192, 197, 200, 203, 204, 208, 209, 212, 213, 216, 217, 221, 222, 230, 233, 255, P).

PITEȘTI. Școala medie tehnică mecanică. Anul I. Badea Nicolae (E: 220, 225, 227, 232, 239), Crețu C. Victor (E: 216, 218, 221, 222, 223, 228), Gheorghe I. Constantin (621, E: 216, 218, 220, 221), Ioniță C. Gheorghe (621, 633, E: 193, 212, 213, 215, 218, 221, 222, 223, 225, 227, 231, 235, 239, 240), Marin Dumitru (E: 193, 198, 203, 223, 231, 239, 240), Marin C. Marin (E: 222, 223, 225, 228, 231), Marin S. Nicolae (E: 193, 212, 222, 223, 225, 227, 232, 239) Moga N. Gheorghe (E: 198, 202, 205, 206, 218, 229, 235, 240), Păun Șt. Ilie (621, E: 198, 202, 204, 216, 221, 223, 240), Popescu N. Ion (633, E: 193, 213, 218, 221, 223, 225, 232 239), Stanciu I. Alexandru (E: 202, 204, 209, 218, 240), Stancu I. Gheorghe (E: 218, 223, 225, 230, 231, 232), Anul II. Bădoi M. Paulian (514, E: 194, 213, 216, 222, 225) Nicolescu M. Andrei (514, 670, 685, 692, 698, 222, 223, 225, 227, 232), Mihai St. Constantin (E: 218, 225, 227, 237, 239), Popescu M. Virgil (670, 685, 692, E: 216, 222, 223, 225), Sandu I. Radu (514, 578, 651, 664, 670, 692, E: 223, 225, 228, 230), Stănescu Z. Gheorghne (618, 670, 685, 692, E: 216, 217, 219, 223, 226), Udeanu Gheorghe (630, 670, 692, E: 222, 223). Liceul de băeți. Clasa IX-a. Mihalache Cornel (611, 682, E: 223, 224, 225, 226, 227, 230, 232), Sandu Iulian (581, 724, E: 165, 178, 183, 207, 218, 223), Saraci Dumitru (E: 150, 151, 152, 153, 165), Clasa X-a. Curcuzeanu P. Ion (518, 525, 536, 537, 541, 550, 554, 583, 591, 604, 607, 611, 612, 621, 633, 641, 655, 658, 664, 666, 670, 691), Dragomir Constantin (E: 556, 561, 568, 561, 574, 577, 578, 583, E: 151, 152, 153, 155, 156, 157, 159, 160, 161, 163), Ionescu V. Savin (534, 549, 550, 554, 556, 558, 578, 607, 611, 629, 635, 643, 655, 658, 663, 664, 666, 670, E: 157, 158, 159, 160, 161, 162

163, P), Ghica Grigore (550, 611, 621, 658, 670), Nania I. Ion (517, 518, 525, 621, 691, E: 156, 223, 230, P), Petrișor Gr. Marin (508, 611, 621, 651, 658, 664, 666, 670, 682, E: 218, P), Radu A. Corneliu (503, 514, 517, 525, 534, 542, 543, 550, 568, 569, 578, 590, 597, 604, 627, 629, 643, 648, 664, 685), Ungureanu Liviu (574, 578, 587, 643, 655, 658, 666, 670, E: 172, 173, 187, 203, 207, 211, 218), Clasa XI. Cavaleru Alexandru (548, 567, 568, 569, 576, 577, 582, 588, 591, 593, 608, 609, 614, 630, 643, 647, 648, 658, 659, 600, 614, 630, 664, 665, 666, 670, 685, 686, 687, 691, 718, 721, 724, 731, P), Enescu Dumitru (514, 532, 536, 543, 548, 552, 554, 560, 571, 582, 583, 584, 588, 593, 618, 621, 630, 648, 655, 658, 666, 670, 682, 703*, 704*, 705*), Șerban Ion (508, 514, 517, 518, 525, 536, 540, 541, 550, 554, 568, 574, 578, 591, 604, 608, 621, 623, 628, 629, 630, 633, 648, 651, 655, 658, 660), Udrescu St. Valeriu (527, 606, 615, 618, 660, 663÷707, P) (50 probleme) Zenovie Grigore (514, 532, 533, 536, 541, 567, 572, 578, 581, 587, 588, 591, 593, 611, 615, 618, 621, 643, 648, 651, 655, 658, 664, 670, 682, 724, E: 217, 218).

PLOEȘTI. Clasa VII-a. Popescu I. Gheorghe (E: 206, 207, 209, 225, 227, 232) Clasa VIII-a. Stroe Radu (E: 214, 223, 225, 229, 230), Clasa IX-a. Dogaru Iulian (503, 514, 517, 533, 550, 588, 591, 600, 601, 603, 604, 611, 621, 655), Panaitescu Alexandru (503, 513, 514, 517, 518, 523, 533, 536, 537, 550, 560, 578, 588, 590, 593, 600, 601, 603, 604, 608, 611, 615, 618, 621, 655, 664, 670, P), Stanciu N. Toma (517, 560, 601, 613, 620, 633, 643, 655, 681, 724, E: 163, 206, 207, 208, 209, 216, 222, 223, 224, 227, 231, P), Clasa X-a. Ciauș Valentin (588, 589, 591, 597, 611, 613, 618, 621, 632, 633, 640, 655, 658, 662, 664, 658, 679, 684, 690, 691), Cristian Ion (501, 503, 505, 507, 512, 513, 514, 515, 517, 518, 525, 606, 611, 615, 621, 658, P), Dogaru T. Mihai (533, 534, 567, 570, 577, 579, 585, 627), Dumitrescu Stelian (517, 525, 528, 536, 541, 578, 591, 604, 621, 633, 635, 651, 654, 685), Făgăraș Constantin (504, 550, 567, 583, 591, 603, 604, 629, 630, 632, 633, 635, 651, 659, 566, 670, 682, 685, 695, 705, E: 193, 197, 200, 212, 216, 217, 218, 221, 225, 226, 228, 230, P), Ghinea N. Benone (588, 589, 621, 640, 655, 658, 684, 690, 691), Ghiga Dan 514, 550, 591, 597, 604, 615, 627, 651, 655, 666, 670, 675), Ionescu Eugen (517, 536, 550, 591, 597, 603, 604, 608), Ivan S. Alexandru (550, 604, 608, 615, 621, 630, 632, 633, 651, 666, 664, 670, 675), Lucinescu L. Ioan (591, 597, 615, 621, 651, 655, 658, 670), Gădău Gr. Iancu (550, 608, 651, 666, 670, 675), Mangu Ștefan (504, 514, 520, 533, 536, 541, 578, 597, 604, 625, 627, 630, 633, P), Mihai T. Iulian (559, 573, 577, 623, 637, 645, 648, 659, 660, 661, 669, 673, 677, 690, 695, 696, 701, 702, 703*, 705*, 706*, 709*, 716, 717, 718, 721, 722, 723, 724, 727, 728, P), Niculescu Gheorghe (504, 536, 537, 540, 541, 591, 597, 600, 658, 670, 685, P), Onea I. Marin (591, 597, 604, 655, 658), Panaitatu Gh. Alexandru, (514, 550, 568, 569, 592, 608, 615, 651, 687, 728), Popescu I. Dumitru (533, 559, 561, 611, 613, 652, 655, 658, 679, 685), Piță I. Constantin (502, 503, 509, 514, 524, 525, 528, 540, 567, P), Popescu Doru (501, 509, 514, 517, 525, 536, 539, 540, 542, 543, 597, 604, 625, 627, 633, 664, 666, 669, 670, 673, 674, 675, 679, 681), Pop V. Victor (514, 550, 608, 615, 729), Pușcașu A. Alexandru (607, 608, 609, 611, 613, 614, 615, 617, 618, 621, P), Torjescu I. Florin (536, 537, 539, 540, 541, 542, 543, 548, 556, 563, 569, 572, 577, 585, 602, 630, 637, 640, 643, 648, 650, 651, 655, 658, 659, 660, 661, 664, 666, 670, 673, 677, 683, 685, 687, 688, 690, 691, 694, 698, 701, P), Tudor Ioan (514, 533, 548, 588, 651, 670, E: 216, 220), Vulpescu D. Dumitru (503, 550, 598, 601, 608, 611, 613, 615, 645, 647, 648, 651, 683, 685, 703*, 718, 722, 723, 724, E: 192, 208, 228, 236, 239).

RĂDĂUȚI. Clasa X-a. Botezat Radu (504, 509, 548, 552, 559, 574, 608, 609, 611, 615, 617, 618, 621, 630, 633, 643, 644, 647, 654, 658, 682, 685, 709*, 711*, 718, 721, 734, E: 165, 168, 171, 178, P).

RÂMNICUL-SĂRAT. Liceul mixt. Clasa XI-a. Radu Petruș (630, 655, 658, 663, 666, 670, 682, 685, 687, 718, 721, 724, E: 193, 197, 208, 216, 217, 218, 222, 228, 239).

ROMAN. Clasa XI-a. Vulpe Ion (503, 506, 520, 536, 618).

ROȘIORII DE VEDE. Miclăuș Vasile (502, 504, 507, 513, 521, 523, 526, 534, 543, 546, 553, 560, 568, 570, 590, 620, 625, 629, 630, 632, 633, 641).

SIBIU. Clasa X-a. Ganciu Maria (593, 618, 621, E: 207, 208).

SFT. GHEORGHE. Clasa VI-a. Receanu Victoria (E: 188, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 231).

SIGHET. Școala medie tehnică. Anul III. Timiș Dumitru (691, E: 218, 219, 220, 223, 224, 226).

SIGHIȘOARA. (Ormeniș). Haleksy Rolf (E: 202, 206, 211, 212, 218).

SINTEȘTI-VIDRA (București). Oprea Constantin (603, 604, 655, 658, 664, 670).

SLATINA. Clasa IX-a. Badea D. Constantin (517, 518, 553, 591, 615, 618, 655, 658, E: 157, 158, 161, 192, 222, 227), Petrulian I. Ștefan (536, 633, E: 157, 216, 218, 226, 228), Popescu Gh. Sergiu (537, 587, 590, 593, 597, 602, 615, 621, 632, 642, 685, E: 165, 171, 176, 182, 193, 197, P), Zamfir C. Vasile (655, 658, 724, E: 207, 208, 209, 213, 223, 225, 230, 235, 236, 237, 239, 240, P). Clasa X-a. Grigore I. Dumitru (591, 604, 621, 655, 685, 687, E: 160, 161, 208), Ivuță P. Petre (651 658, 659, E: 206, 208, 209, 240), Mirea Constantin (536, 591, 611, 655, 658, 685, 687), Zigulescu D. Marin (503, 517, 525, 604, 664, 666, 670, E: 175, 176, 213, 214, 216, 218), Clasa XI-a. Badea Tudor (536, 537, 591, 615, 651, 658, E: 160, 161, 176, 182, 193, 213, 225, 230), Dudu Miscă P. (535, 536, 550, 578, 583, 603, 604, 608, 621, 633, 641, 655, 658, 659, 664, 670, 673, 690, 698), Andreiță P. Constantin (503, 518, 521, 525, 530, 536, 550, 578, 598, 604, E: 159, 161, 163, 171, 172, P), Marinescu Ilie (518, 574, 591, 596, 630, 655, 658, 685, 687), Mateiaș Ioan (536, 540, 603, 604, 687, 703*, E: 213, 217), Mihai I. Nicolae (536, 591, 603, 604, 630, 655, 658, 685, 703*, E: 157, 161, 216, 223, 226, 227), Țeculescu George (561, 581, 583, 604, 615, 641, 643, 658, 666, 670, 673, 685, 687), E: 180, 193, 203, 216, 217, 218, 223, 232).

SUCEAVA. Clasa XI-a. Tiperciuc Eugen (608, 670, 705*, 707*, 724).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VIII-a. Brebu I. Gheorghe (655, 685, E: 206, 207, 208, 223, 226, 227), Oprea N. Aurelian (518, 540, 561, 574, 587, 590, 591, 597, E: 200, 208), Clasa IX-a, Șipoteanu Ar. Ioan (E: 197, 207, 213, 215, 216, 217, 218, 222, 226), Clasa X-a. Brezeanu (501, 505, 520, 522, 535, 536, 540, 578, 604*, 608*, E: 155, 200, 207, 208, 213, 216, 221, 222, 225, 228), Ionescu I. Ion (541, 578, 582, 651, E: 200, 201, 209, 213, 217, 218, 219, 220), Clasa XI-a. Brezeanu I Ioanin (512, 516, 571, 582, 583, 584, 597, 598, 603, 604, 606, 608, 611, 612, 615, P), Dâmbu Eugenia (501, 505, 514, 516, 522, 540, 554, 578, 630, 633, 666, 685, E: 156, 160, 161, 173, 198, 216, 217, 218, 220, 223). Oprea A. Constantin (528, 537, 541, 563, 605, 608, 613), Școala medie tehnică de petrol. Anul III. Drăgan T. Gheorghe (509, 562, 598, 589, 607, 622, 664, 666, 669, P),

TÂRGU-JIU. Şcoala pedagogică. Anul II. Dascălu Gheorghe (669, 675, 731, E: 218, 223). Liceu. Clasa IX-a. Caţighera Virgil (550, 569, 611, 615, 621, 633, 636, 640, 655, 658, 662, 664, E: 197, 199, 200, 203, 205, 204, 206, 207, 208, 209, 210, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 224), Cosinschi Dragoş (574, 618, 627, E: 223, 236, 240), Râcă Gheorghe (502, 528, 543, 559, 563, 565, 573, 608, 651), Clasa X-a Crăciun V. Constantin (518, 658, E: 207, 208, 203, 218), Olaru I. Grigore (536, 537, 550, 554, 569, 571, 574, 578, 655, 658, E: 155, 156, 157, 222), Neamţu Ion (518, 525, 561, 554, 591, 651, 652, 655, 658, 679, 697, 695, 701), Stamatoiu V. Vasile (518, 536, 578, 585, 608, 611, 621, 633, 651, 670, 679, E: 156, 157, 160, 163, 164, 175, 178, 180, 190, 192, 197, 199, 200, 203, 204, 207, 208, 209, 213, 216, 217, 218, 220, 221, 223, 225, 226, 228, 229, 230), Tomescu Petre (525, 640, 669, E: 195, 200, 217, 218, 222, P), Clasa XI-a, Semenescu I. Ion (518, 511, 525, 554, 578, 591, 597, 632, 633, 655, 658, 679, 703).

TÂRGU-MUREŞ. Şcoala tehnică de comerţ. Anul I. Moldovan Olivia (E: 153, 168, 171, 178, 223, 227, 232), Moldovan Suzana (669, E: 170, 176, 186, 198, 199, 216), Nistor Eugenia (E: 181, 184, 224, 231, 232), Pop Ana (E: 150, 156, 159, 175, 202, 204, 218), Roiban Iov (E: 156, 160, 174, 213, 218, 220, 225, 228), Seridon Oniţa (E: 185, 186, 187, 195, 206, 219, 517). Liceul 1 băeţi Clasa IX-a. Antonescu Victor (621, 675, 677, 690, 691, 692).

TOPOLOVENI. (Piteşti). Şcoala elementară din Teiu. Clasa VII-a. Sandu I. Gheorghe (E: 157, 204, 207, 216, 218, 223).

TÂRGU-OCNA (Bacău). Clasa XI-a. Ruscinchi Alexe (608, 618, 633, 670, 685).

TIMIŞOARA. Liceul de fete. Stanciu Florica (685, E: 217, 218, 221, 230, Liceul 2 băeţi. Clasa IX-a. Braşovan Ioan (665, 667, 685, 686, 689, 704*, 705*), Clasa XI-a Popa Gheorghe (664, 667, 670, 682, 683, 685, 687), Mancaş Octavian (Despre triunghiul lui Pascal).

TULCEA. Liceul mixt. Clasa XI-a. Rubatos Bruno (514, 517, 525, 535, 537, 541, 542, 548, 550, 604, 618, 627, 635, 640, 641, 691).

TURNU MĂGURELE. Clasa X-a. Dragu I. Marcel (E: 157, 165, 208, 218, 223), Ţugui Emil (630, 644, 670, E: 209, 218, 223, 226), Clasa XI-a Baban M. Ştefan (655, 658, 670, E: 206, 207, 208, 209, 213, 215, 216, 217, 218, 230, 236). Absolvent. Mihăescu I. Alexandru (509, 510, 514, 527, 540, 543, 550, 556, 557, 561, 563, 567, 569, 573, 583, 584, 591, 593, 597, 601, 629, 632, 633, 635, 641, 642, 647, 648, 654, 668, 679).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Doran Mircea (550 608, 630, 640, 643, 648, 651, 670, 685, P), Dumitru C. Awat (704,* 705*, 706*, 707*, P), Filimon Ştefan (643, 665, 666, 685, 717*, 718, 721, 724, E: 235, 240), Păunescu Ion (514, 567, 600, 603, 643, 651, 665, 666, 685, 687, E: 215, 223), Pârvulescu Emil (603, 608, 640, 664, 670, 690, 716*, 717*, 721, 724, 728, E: 220, 228, 236), Pârvuleţu A. Constantin (517, 578, 606, 640, 651, 661, 670, 690), Răutu Luminiţa (517, 536, 615, 621, 632, 633, 664), Sahagiu V. Viorel (536, 591, 597, 603, 608, 611, 615, 621, 633, 658, 685, P), Zorilescu M. Dan (591, 611, 652, 663, 690, 691, E: 185, 195, 197, 199, 200, 208, 209, 216, 217, 218, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 231, 232, P), Clasa XI-a. Geană Mihai (535, 536, 598, 663, 664, 670, 685, 687), Ionescu Carmen (617, 621, 630, 633, 641, 664), Racoveanu Em. Constantin (587, 594, 595, 598, 600, 607, 608, 611, 615, 620, 621, 624, 627, 628, 629, 630, 632, 633, 640, 641, 651, 655, 659, 660, 666, 670, 678, 679, 685, 703*, P).

VASLUI. Clasa X-a. Bostan G. V. Emil (633, 651 658, E: 197, 200, 202, 208, 213, 216, 217, 218, 220, 225, 227, 230). Clasa XI-a. Jaichis B. (604, 618, 630, 651, 666, 670, 685, 716*, 718, 724, 734).

★

In cursul lunii Februarie 1953 s'au evidenţiat următorii rezolvitori:

Iosifescu Marius (clasa X-a, Piteşti), Tătaru D. Emil (clasa IX-a, Aiud), Miclăuş Vasile (clasa XI-a, Roşiorii de Vede), Weszely Tiberiu (clasa X-a Tg.Mureş), Drăghici Aurel (clasa XI-a, Aiud), Namolovan Virgil (clasa XI-a, Piteşti), Bocu Mircea (clasa IX-a Oradea), Codreanu Irinel (clasa XI-a, Buzău) Torjescu S.Florin (clasa X-a, Ploeşti), Cristian Ionel (clasa X-a, Ploeşti), Petrică Zamfira (clasa IX-a D.Lic.2,10,13, fete, Bucureşti), Nicolae Alexandru (clasa IX-a Lic. 1 băieţi, Bucureşti), Buzuloiu Vasile (clasa IX-a, Oradea), Negulescu A. Paul (clasa X-a, Buzău), Zaharescu Marius (clasa XI-a Tr.Severin), Popescu I. Mihail (clasa XI-a, Craiova), Nichifor Gheorghe (clasa XI-a, C. Lung Moldovenesc), Cividjian Grigore (clasa XI-a, Craiova), Vasilescu Vasile (clasa XI-a Piteşti), Tofan V. Ioan (clasa X-a Bacău), Abdulamit Mutlu (Anul IV Sc. hidro-tehnică Constanţa), Dăscălescu Gheorghe (clasa X-a, Ploeşti), Zorilescu M. Dan (clasa X-a, Tr. Severin), Saraci M. Dumitru (clasa IX-a, Piteşti), Olteanu Victor (clasa XI-a, Aiud), Lazăr C. Dimitrie (clasa X-a, Rădăuţi), Petrovici Liviu (clasa XI-a, Oradea), Tiţa D. Constantin (clasa XI-a, Tg.Jiu), Badea N. Alexandru (clasa XI-a, Buzău), Şincan Corneliu (clasa XI-a Lic. 10 b. Bucureşti) Ion D. Ioan (clasa X-a, Focşani), Şerban Ion (clasa XI-a, Piteşti), Dragomir Constantin (clasa X-a, Piteşti), Zenovie Grigore (clasa IX-a, Piteşti), Moreanu N. Rudy (clasa X-a, Ploeşti), Mihai Iulian (clasa X-a, Ploeşti), Dihoru Valentin (clasa XI-a, Buzău), Pupăză Nicolae (clasa XI-a Tg. Mureş), Filimon Stefan (clasa X-a, Tr. Severin), Păun Gh. Gheorghe (clasa XI-a, Piteşti), Banghea Oprea (Sc. Utilaj petrolifer Câmpina), Brezeanu Ioanim (clasa XI-a Târgovişte) Costache Titus Romanus (clasa XI-a, Piteşti), Tiţa I. Nicolae (clasa XI-a Craiova), Marinescu C. Gheorghe (clasa XI-a, Piteşti), Păunescu D. Ion (clasa X-a, Tr. Severin), Popescu Şt. Doru (clasa X-a, Ploeşti), Ciucă Alexandru (clasa XI-a Tecuci), Stoicescu Teodor (clasa XI-a L.b.10, Bucureşti), Scutelnicu Constantin (clasa XI-a, Dorohoi), Andreiţă P. Constantin clasa XI-a, Slatina), Dobrescu A. Marcel (clasa XI-a, Târgovişte), Drăgan T.Gheorge (Anul II Şcoala medie de Petrol, Târgovişte), Vrejoiu Constantin (clasa XI-a, Craiova), Savin Dan (Anul II S.M.T.Cărbuni, Câmpulung Muscel), Bichir Ilie (clasa VIII-a, Bârlad), Oprea A. Aurel (clasa VIII-a, Târgovişte), Davidescu S. Ilie (clasa XI-a, Piatra Neamţ), Găină Stelian (clasa XI-a Tr. Măgurele), Chifan Aurel (clasa X-a, Rădăuţi), Ionescu V. Savin (clasa X-a, Piteşti), Schileru I. Dinu (clasa VII-a Şcoala elementară 4 băieţi, Bucureşti).

★

In cursul lunii Februarie s'au mai primit soluţii bune la cel puţin cinci probleme dela următorii rezolvitori :

AIUD (Cluj). Clasa VII-a. Ocna Mureş. Solomon Ioan (E: 230, 233, 239, 240, 281). Clasa IX-a. Albu Dorin (520, 540, 555, 562, 582, 591, 593, 603, 606, 608, 611, 615, 618, 620, 621, 652, 657, 658, 662, 677, 683, E: 157, 189, 192, 197, 207, P), Horvat Ioan (597, 600, 624, 625, 726), Peteanu Vasile (600, 601, 603, 605, 606, 607, 608, 609,

610, 611, 612, 613, 614, 615, 617, 618, 620, 621, 622, 624, 625, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633), Tătaru D. Emil (502, 521, 554, 563, 585, 593, 594, 595, 600, 609, 617, 624, 625, 627—644, 647, 648—655, 657, 659—666, 669, 671—675, 677—682, P) (61 probleme). Clasa X-a Crăciun D. Valeriu (516, 588, 589, 591, 597, 603, 604, 651, 658, 715, 721, 728, 744, 745, 748), Cristea V. Horia (504, 522, 591, 647, 658. 685, 715, 716, 717, 724, 728, E: 206, 207, 236), Clasa XI-a, Buzdugan Ion (647, 648, 651, 658, 659, 660, 662, 683, 687, 690, 691, 691), Dărămuș N. Teodor (598, 600, 607, 647, 647, 659, 666, 682, 685, 687, 690, 691), Drăghici Aurel (546, 550, 553, 554, 555, 560, 561, 562, 563, 578, 581, 582, 583, 588, 591, 593, 597, 603, 604, 606, 608, 611, 613, 617, 618, 620, 621, 624, 625, 632, 633, 635, 640, 643, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 669, 670, 671, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682), Olteanu Victor (550, 553, 554, 555, 560, 562, 563, 576, 578, 583, 597, 603, 604, 606, 608, 611, 613, 615, d22, 624, 632, 633, 638, 650, 651, 655, 658, 659, 666, 669, 670, 673, 675, 678, 683, 685, 690, 691, 693, 695), Popa Emil (550, 554, 571, 578, 591, 593, 597, 604, 607, 608, 611, 621, 633, 651, 655, 658, 670, 684), Săbăduș Alex. (724, E: 207, 210, 217, 218, 219).

ALEXANDRIA. Clasa IX-a. Georgescu I. Emil (615, 643, 644, 658, 671, 739, E: 178, 182, 193, 206, 207, 220, 221, 223, 225, 236, 237, 239, 242, 243, P), Teodorescu Marian (611, 615, 658, E: 190, 194, 203, 204, 209, 217, 218), Clasa XI. Macovei Valeriu (666, 669, 674, 685, 691, 671, 742, 745, 748).

ALBA IULIA. Clasa VII-a. Mandel Robert (704×, 706×, E: 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241), Clasa IX-a. Mateica Aug. (709×, 725, E: 231, 233, 236) Clasa X-a. Clonța Ovidiu (590, 627, 630, 666, 685, 718, 721).

ARAD. Clasa X-a B. Capră Gheorghe (514, 543, 618, 664, 666, 670, 685, 691, 721, 746).

BACĂU. Școala Pedagogică. Pavel Margareta (E: 223, 227, 231, 232, 240), Școala medie tehnică de Construcții. Anul II. Stanciu V. Pavel (670, 716, 721, E: 225, 228, 230), Anul III. Haimovici Ella (716, 718, 724, 725, E: 226, 239, 276), Kalman Leon (625, 633, 670, 691, 716, 724, E: 208, 216, 217, 225, 226, 228, 239). Clasa VIII-a. Palaghiță I. Ștefan (705×, 713×, 758, E: 208, 215, 236, 239, 248, 251), Vasilache Mihail (E: 213, 216, 218, 223, 236), Clasa IX-a. Marcu Gh. Gheorghe (567, 578, 581, 591, 597, 601, 611, 621, 633, 655, 658, 682, 723, 725, 743, 744, 748, E: 213, 216, 218), Clasa X-a. Cașcaval Gheorghe (574, 578, 587, 591, 598, 608, 611, 615, 621, 625, 630, 633, 635, 638, 640, 643, 655, 658, 664, 666, 685, 691, 718, 721, 723, 724), Găbudici Vasile (608, 611, 612, 621, 625, 643, 665, 666, 670, 716, 721, 724), Golianu Petre ((583, 736, 744, 746, 748), Neacșu Constantin (591, 685, 718, 723, 743, 744), Radu Vasile (670, 685, 690, 718, 721, 743, 748, 758), Savin I. Ioan (608, 611, 625, 651, 655, 658, 670, 685, 718, 724), Vaisbuch Leon (608, 611, 621, 625, 630, 633, 635, 670, 718, E: 175, 176, 190, 192, 217, 218, 223, 225, 230), Tofan V. Ioan (503, 504, 543, 554, 562, 567, 571, 574, 578, 583, 585, 587, 598, 601, 607, 617, 635, 673, 690, 691, 693, 695, 696, 699, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, 708×, 709×, 710×, 711×, 712×, 714×, 718, 723, 725, 733, P), Săndulache Constantin (514, 570, 578, 591, 604, 611), Zisman Iosif (598, 607, 614, 647, 666, 683, 685, 705×, 716, 717, 718, 720, 721, 723, 724, 726, 728, 744, 745), Clasa XI-a Bărbieru Constantin (651, 655, 658, 666, 670, 685, 686, 716, 718, 721, 743, 745, 748, 757), Solomon Zigu (666, 669, 670, 691, 693, 705×, 716, 718, 722), Weininger Igo (716, 718, 720, 721, 722).

BAIA MARE. Clasa IX-a. Mureșan Traian (548, 632, 655, 658, 670, E: 195, 197, 199, 200, 202, 206, 207, 208, 209, 213, 216, 221, 223), Pop Gheorghe (632, 655, 658, 670, E: 200, 216, 217, 218, 219, 220, 221), Clasa XI-a Mureșan Mihai (504, 517, 543, 548, 574, 598, 600, 641, 643, 645, 647, 648, 663, 664, 666, 670, 685, 686, 688, 691, 716, 718, 721, 740, E: 166, 206, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 227, 231, 242, 243).

BÂRLAD. Școala tehnică financiară. Anul II. Condrea I. Petru (E: 155, 157, 159, 160, 161, 165, 168, P), Școala metalurgică. Anul II. Frunză Georgeta (E: 203, 206, 207, 208, 209), Onofrei Ecaterina (E: 185, 186, 188, 190, 192, 206), Tomoș Iosif (E: 214, 218, 220, 236, 239, 240, 241). Clasa VIII-a liceu. Bichir Ilie (569, 588, 601, 602, 614, 617, 621, 643, 663, 666, 670, 672, 682, 718, 721, 724, E: 197, 199, 203, 204, 205, 209, 213, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 224, 225, 227, 229, 231, 232, 233, 234, 237, 240, 242), Clasa IX-a. Bichir Constantin (708×, 709×, 711×, 714×, 716, 726, 743, 745, 748, 759, 761, 758, E: 223, 224, 225, 226, 228, 230, 231, 235, 239, 240, 241, 245, 246, 247, 248, 250, 251).

BEIUȘ. Clasa VII-a. Pavel Vasile (E: 172, 179, 186, 188, 202, 234, 235, 236, 239, 240, 241), Clasa XI-a. Lezeu F. Aurel (740, 745, 748, 758, E: 245, 248).

BOTOȘANI. Clasa X-a. Coter Lică (533, 554, 607, 611, 618, 655, 658, 664, 685).

BUCUREȘTI. Liceul 1 fete. Clasa IX-a. A. Filimon Rodica (578, 597, 601, 621, 670, 676, 691, 721, 723, 745, 748, E: 199, 207, 208, 213, 216, 217, 220, 225, 226, 228, 230, 236, 239, 240, 243, 244, 245, 246, 251, P), Centrul școlar 2,10, 13 fete. Clasa VIII D. Vasi Dumitra (E: 230, 231, 232, 239, 240), Clasa IX D. Gongea Valentina (E: 213, 216, 217, 218, 220, 223, 245), Petrică Zamfira (511, 571, 572, 579, 581, 582, 587, 591, 600, 607, 608, 613, 617, 618, 619, 625, 635, 640, 650, 654, 657, 659, 660, 661, 663, 664, 665, 670, 671, 689, 688, 690, 691, 693, 696, 657, 698, 700, 701, 723, 735), Timofciuc Natașa (679, 682, E: 220, 223, 225, 226, 230), Voicu Valentina (E: 213, 217, 218, 221, 222), Clasa X-a B. Nistor Maria Elena (508, 606, 608, 611, 618, 621, 632, 633, 651, 655, 658, 670, 726, 744, 745, 748, 762, E: 206, 208, 222). Liceul 1 băieți, clasa VIII-a: Constantin Ion (E: 233, 236, 237, 239, 240, 241), Clasa IX-a: Georgescu Dorin (611, 615, 618, 621, 658, 691, 727), Feinștein Ilie (606, 638, 658, 664, 670, 671, 675), Nicolae Alexandru (508, 514, 527, 540, 543, 550, 574, 576, 587, 588, 591, 594, 597, 604, 608, 618, 632, 634, 651, 655, 666, 681, 682, 691, 703×, 705×, 716, 721, 722, 724, 733, 743, 744, 745, 748 756, 761×, 762×). Școala tehnică mecanică Nr. 1. Anul IV. Padar Petre (666, 685, 686, 689, 724, 730, E: 203, 209), Școala tehnică medie de instalație. Anul I. Radu Sebastian (627, 632, 635, 666, 669, 675, 682, 684, 690, P), Școala de măsurători terestre. Anul II C. Tănase Dumitru (607, 638, 691, 692, 701, 703×, 704×, 705×, 706×, 709×, 722, 727, 728, 733, 744, 745, 748, E: 206, 215, 223, 224, 225, 226, 228, 230, 231 232, 239, 243, 245, 248), Școala elementară 4 băieți. Clasa VII-a. Schileru I. Dinu (723, 744, E: 234, 235, 236, 239, 240, 242, 243, 244, 245, 248 P.). Liceul 4 fete. Clasa VII. Iosif Smaranda (E: 213, 217, 218, 220, 222, 223, 224, 230), Clasa IX-a. Chiriac Nora (578, 579, 683, E: 169, 213). Liceul 6 băieți. Clasa 9 B. Kestenband Barbu (543, 584, 596, 631, 676, 681, 709, 716, 717, 721,

722, 724, 726, 728, E: 161, 173, 193, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 241, P) Vasile Ion (592, 630, 655, 685, 736, 739, (745, 748, E: 161, 193, 208, 213, 248), Popescu E. Gheorghe 655, 736, 739, 745, 748, E: 248), Clasa XI-a. Vâ·golici Virgil (724, 727, 728, 733, 736, 739, 744, 745, 758, E: 248). Liceul 7 băieți. Clasa VII. Maxim Dan (E: 215, 225, 230, 243, 245). Liceul 8 băieți. Clasa IX-a. Comodzinschi Victor (758, E: 230, 239, 245, 248). Liceul 9 băieți. Clasa X-a. Alexandrescu Florin (601, 603, 618, 654, 659, 673, 709×, 723, 724, 737, 744, 745, 748, 751, 757), Chioveanu Emil (608, 610, 614, 615, 618, 621, 627, 633, 643, 658, 663, 666, 670, 673, 720, 721, 724), Răzuș Alexandru (514, 578, 585, 597, 591, 598, 604, 611, 618, 621, 651, 655, 658, 703×).

Liceul 10 băieți Aurel Vlaicu. Clasa VII-a. Adam Marian (605, E: 197, 202, 204, 209, 227, 230, 235, 237, 240, 242, 245), Cazacu Aculin (E: 218, 227, 231, 232, 235, 236, 240), Nistreanu N. Valeriu (E: 231, 232, 235, 243, 245,), Chiriță A. Constantin (E: 223, 225, 227, 230, 231, 232), Constantinescu Nicolae (E: 203, 204, 209, 225, 231, 239), Staicu S. Vasile (E: 202, 209, 218, 227, 236), Băluță Ion (E: 223, 225, 227, 230, 239, 240), Clasa VIII. Cristea Ionel (194, 200, 213, 216, 218, 220, 223, 224, 225, 227, 230, 231, 236, 240, 245), Dănescu D. Radu (E: 225, 230, 235, 234, 237, 238, 240), Dumitrescu B. Ovidiu (724, E:, 223, 225, 230, 231, 233, 236, 238, 239, 240), Georgian Dan (E: 207,218, 213, 223, 230, 232, 236, 240), Ilie Vicențiu (615, 718, E: 184, 193, 205, 209, 213, 217, 218, 225, 228, 230, 235, 240, 243, 245, 247), Isaia Mircea (E: 213, 218, 236, 239, 240, 243), Lică Romeo (E: 213, 217, 218, 230, 238, 239, 240, 243, 245), Găleată Mircea (615, 725, E: 175, 199, 209, 213, 217, 239, 240, 245), Naghi Mircea (E: 213, 217, 225, 228, 232, 239), Popescu Petre (E: 213, 217, 239, 243, 245), Stănășilă N. Octavian (581, 627, 648, 662, 717, 723, E: 162, 164, 171, 181, 191, 197, 199, 200, 202, 207, 208, 216, 217, 219, 221, 227, 230, 236, 239, 240, 243, 245, 247, 248, 251), Vidlescu C. Vasile (593, 615, 740, E: 239, 243), Zavara Dumitru (E: 225, 231, 236, 239, 240),Clasa IX-a. Bozgă M. Constantin (625, 627, 632, 633, 635, 692, E: 223, 224, 226, 227, 231), Câmpu Eugen (635, 655, 658, 663, 672, 682, 691), Chiriță Adrian (502, 506, 509, 510, 635), Teodorescu Mihai (502, 527, 625, 631, 632), Clasa X-a B. Andreescu Gh. Mircea (613, 615, 618, 620, 632, 665, 691, 707×, 718, 720, 721, 728, 739, 740, 741, 744, 745, 746, 748, 758, 759), Clasa XI-a Mândru Anatolie (655, 659, 664, 666, 670), Dumitrescu Carol (540, 615, 670, 672, 685, 723, E: 193, 197, 199, 202, 213, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 239), Șincan Corneliu (509, 521, 530, 534, 543, 548, 554, 560, 571, 573, 583, 604, 605, 624, 641, 648, 651, 655, 659, 676, 692, 695, 698, 703×, 704×, 705×, 727, 737, 743, 744, 746, 748, 751, 758×, E: 243, 245, 248), Stoicescu Teodor (521, 554, 548, 567, 568, 569, 574, 578, 587, 590, 604, 614, 643, 645, 648, 676, 685, 687, 689, 691, 692, 695, 698, 709×, 716, 718, 720, 721, 723, 724, 727, 728, 741, 743, 744, 745, 746, 748, 751, 756, E: 224, 225, 226, 227, 228, 244, 245, 246, 247, 248). Școala elementară 45 băieți, Clasa VI-a Teodorescu Radu (227, 228, 229, 230, 232, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 240, 242 243, 245, 247), Școala elementară Străulești Clasa VI-a. Kodman Ion (E: 185, 202, 219, 234, 235, 240), Manu D. Valentin (E: 185, 202, 213, 234, 235, 240), Moldoveanu Mihai (E: 185, 202, 204, 234, 240), Vădan Magdalena (E: 171, 185, 202, 204, 209).

BUZĂU. Școala medie metalurgică Anul II. Neguț Gh. Nicolae (713*, 718, 744, E: 217, 236), Tudor Gheorghe (606, 718, 729, E: 217, 236), Clasa VI-a elementară. Suciu A. Tita (E: 201, 202, 209, 213, 239), Clasa X-a liceu. Băcă D. Nicolae (590, 603, 604, 608, 611, 618, 621, 625, 632, 640, 642, 643, 651, 655, 658, 664, 670, 685, 711×, 716, 718, 721, P), Coman M. Nicolae (550, 578, 625, 630, 664, 651, 664, 670, 685, 691, 718, 724, 727, P), Ducarie Gabi (576, 608, 643, 651, 685, 718, 724), Duțu Alexandru (521, 608, 611, 618, 621, 630, 651, 658, 670, 718, 721, 723, 724, 727, 728, 734), Golianu Petre (514, 542, 550, 578, 591, 600, 604, 608, 615, 625, 630, 633, 651, 665, 670, 686, 716, 718, 721, 724, 726, 727, 733, 734, 748), Jarcău I. Aurel (590, 604, 608, 615, 621, 635, 670, 685, 718, 724), Negulescu A. Paul (576, 598, 600, 601, 603, 604, 608, 610, 611, 615, 618, 621, 625, 630, 633, 635, 636, 643, 651, 654, 658, 670, 675, 685, 698, 703×, 704× 705×, 706×, 708×, 709×, 710×, 712×, 713×, 714*, 716, 721, 723, 724, 726, 727, 728, 733, 734), Pavel Gh. Constantin (591, 632, 638, 641, 664, 670, 716, 718, 721, 724, 727, 734, 744, 745, 746, 748, 757), Stoicescu T. Dumitru (561, 534, 543, 597, 601, 635, 641, 682, 683, 688, 690, 691, 693, 701, 718, 721, 723, 724), Vlad D. Ion (590, 608, 615, 621, 643, 651, 653, 664, 666, 670, 678, 685, 716, 718, 721, 723, 724), Clasa XI-a Badea N. Alexandru (521, 527, 531, 565, 574, 581, 587, 589, 590, 593, 598, 600, 602, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 611, 623, 624, 625, 627, 642, 653, 663, 664, 665, 666, 667, 670, 673, 678, 684, 685, 686, 690, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, P), Cucu P. Dan (527, 600, 675, 681, 727, P), Burlacu I. Nicolae (607, 608, 623, 624, 625, 630, 632, 633, 635, 636, 641, 642, 643, 653, 663, 664, 666, 667, 670, 673, 678, 691, 698, 703×, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 728, 743, 744, 745, 748), Codreanu Irinel (534, 538, 540, 543, 548, 569, 581, 587, 593, 606, 609, 614, 623, 625, 627, 629, 632, 633, 635, 636, 637, 640, 641, 642, 643, 650, 651, 652, 655, 658, 663, 665, 664, 666, 669, 671, 675, 673, 674, 676, 677, 678, 679, 681, 683, 685, 691, 693, 695, 696, 697, 699, 701, P), Dihoru Valentin (500, 516, 521, 525, 526, 527, 531, 534, 541, 581, 591, 602, 606, 611, 614, 623, 624, 625, 629, 632, 633, 635, 638, 651, 658, 664, 670, 686, 687, 691, 696, 703×, 704×), Radu M. Gheorghe (618, 621, 685, 686, 687, 718, 724), Scarlat I. Ioan (512, 514, 518, 520, 527, 567, 576, 602, 604, 615, 621, 624, 633),

CĂLĂRAȘI. Clasa VII elementară. Nicolescu C. Dan (723, E: 236, 239, 240, 242), Anul III. Școala pedagogică. Radu Ecaterina (606, 614, 617, 634, 635, 685, 699, P), Clasa X-a liceu Bulearcă Ion (644, 658, 670, 685, 691, 718, 721), Rădulescu Ion (574, 583, 587, 604, 608, 611, 612, 615, 621, 627, 633, 637, 644, 658, 666, 670, 704×, 709×, 710×, 718, E: 165, 170, 190, 213, 214, 223, 224, 225, 230, 239), Clasa XI-a. Crețu I. Radu (685, 691, 716, 718, 721 724, 745, 748).

CÂMPINA. Școala tehnică de Utilaj petrolifer. Oprea Banghea (540, 548, 554, 583, 584, 587, 590, 604, 630, 633, 669, 704×, 712×, 723×, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 726, 728, 730, 744, 745, 748, 758×, 759×, 761×), Școala medie tehnică Nr. 2. Pârciu Mircea (567, 604, 607, 618, 676, 704, 705, 716, 713, 717, 723, 724, 726, 744, 745, 746, 748, 756, 758×, 759×, P). Clasa VII elementară. Liess O. Gerard (233, 234, 235, 236, 239, 242, 248), Școala elementară Băicoi. Clasa VII-a. Jilăveanu S. Pavel (643, E: 203, 204, 205, 206), Clasa XI-a liceu Neaga Vasile (630, 633, 745, 748, 749, 757, P), Rotaru Gh. Alexandru (615, 721, 724, E: 234, 235).

CARACAL. Clasa X-a. Cristuinea Constantin (610, 685, 720, 721, E: 193, 217, 218, 220, 223, 230, 240), Ciucă Gh. Ion (540, 615. 618, 632, 691, 724, 727, E: 156, 160, 239, 240), Clasa XI-a, Băică M. Paul (532, 534, 540, 548, 550, 556, 562, 585, 591, 595, 597, 603, 604, 605, 610, 612, 635, 664, 682, 685, 691, 707×), Economu C. Apostol (581, 718, 721, E: 166, 172, 185, 234, 237), Predeţeanu Nicolae (585, 595, 630, 685, E: 150, 153, 155, 157, 159, 160, 164, 165, 172, 173, 175, 176, 182, 185, 188, 194, 196, 198, 201, 203. 204, 205, 206, 207, 208, 209, 221, 224, 225, 227, 228, 230, 232, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 243, 245, 247, 248).

CARANSEBEŞ. Clasa IX-a. Ciric Ioan (574, 587, 627, 630, 633, 636, 655, E: 178, 197, 199, 200, 202), Mihuţ Elena (666, E: 213, 215, 217, 218), Clasa X-a. Bălteanu Eugen (627, 655, 658, 691, E: 200, 206, 208, 213, 218, 221, 223, 224, 225, 228, 230, 232, 235, 239), Vela Mihai (514, 552, 568, 569, 574, 578, 587, 604, 608, 613, E: 190, 223, 227, 239, 248).

CÂMPULUNG-MOLDOVENESC. Şcoala medie de exploatarea lemnului. Anul I. Rebenciuc Teodor (E: 138, 206, 209, 212, 215, 217, 218, 225), Clasa XI liceu. Chirea Cornel (578, 604, 633, 651, 658, 664, 670), Nichifor Gheorghe (533, 543, 548, 554, 560, 562, 568, 569, 574, 587, 590, 591, 597, 598, 600, 601, 603, 604, 605, 607, 608, 609, 610, 611, 613, 614, 615, 618, 621, 622, 625, 627, 630, 632, 633, 634, 643, 648, 651, 654, 655, 658, 659, 661, 663, 664, 666, 670), Popescu Sanda (590, 655, 681, 685, 718).

CÂMPULUNG-MUSCEL. Şcoala medie tehnică de Cărbuni. Anul II. Savin Dan (503, 509, 643, 647, 648, 651, 655, 656, 658, 659, 661, 664, 665, 670, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, E: 218, 223). Clasa VIII-a liceu. Vrânceanu Petru (E: 215, 218, 223, 235, 240), Clasa IX-a. Mănescu C. Mircea (514, 540, 548, 576, 578, 593, 600, 602, 604, 607, 608, 611, 615, 627, 632, 633, 651, 658, 670, 691, 703×, 704×, 707×, 721), Clasa X-a. Diaconu Sarmiza (611, 655, 658, 685, 748, 751, E: 192, 197, 216, 236), Lazăr I. Romel (585, 590, 621, 685, 718, 740, E: 223, 225, 228, 232, 236, 240, 243), Stoica Nicolae (618, 621, 670, 685, 718, E: 218, 236).

CAREI. Clasa IX-a. Marinescu Octavian (724, E: 160, 192, 230, 239), Clasa XI-a. Bulaucă Eusebiu (503, 514, 567, 578, 608, 615, 618, 629, 630, 671, 685, 687, 689), Vaida Gheoghe (568, 574, 587, 590, 611), Văleanu Gh. (514. 578, 618, 630, 671, 685, 687, 689, E: 269).

CONSTANŢA. Şcoala hidrotehnică. Anul II. Comşa Vasile (663, 685, 703×, E: 216, 217, 222, 225, 233, 236), Diaconu Emil (631, 633, 638, 664, E: 193, 198, 202, 203, 204, 206, 209, 213, 215, 217, 218, 255), Lambă Stelian (533, 561, 588, 597, 625, 632, 726, E: 156, 158, 161, 164, 165, 166, 170, 193, 211, 218, 223, P), Mihai Dulică (615, 665, 670, 685, 718, 757, E: 203, 204, 209, 217, 218, 242, 243, 245, 247, 248), Anul IV. Abdulamit Mutlu (562, 577, 581, 600, 603, 625, 627, 628, 629, 630, 245, 647, 648, 659, 663, 666, 667, 669, 670, 765, 685, 686, 688, 691, 692, 703×, 704×, 705×, 706×, 716, 717, 718, 721, 724, 727, 730, 731, 734 P), Clasa X-a liceu. Ceacâru Valentin (658, 670, 685, 721, E: 217, 218,), Mitescu Constantin (685, 691, 718, 721, 724, E: 223, 224, 226, 227, 231), Clasa XI-a. Gospodin I. Jenica (536, 537, 543, 574, 587, 591, 592, 597, 600, 633, 641, 655, 658, 666, 670, 685, 703×, 716, 718, 720, 721, 727, E: 206, 207, 208, 215, 223, 228), Petrescu C. Pavel (587, 591, 594, 611, 633, 655, 658, 685, 687, 718, 721, E: 157, 158, 193, 216, 218, 223, 227, 232), Rizea Alecu (663, 655, 658, 663, 703×, 718, E: 200, 217, 233, 234).

CORABIA. Stavre Petre (716, 724, 743, 745, 748, E: 236, 239, P) Clasa 8 A. Boroghină C. Gabriel (E: 231, 232, 234, 235, 239).

CLUJ. Clasa VII-a. Georgescu Anton (E: 236, 243, 245, 247, 249), Clasa IX-a. Constantinescu Florin (538, 540, 581, 606, 613, 744, 745, 746, 748, E: 180), Mocanu Emil (740, E: 243, 245, 247, 249), Clasa XI-a. Grecu Dan (521, 543, 554, 568, 570, 576, 597, 620, 629, 632, 641, 664, 670, 682, 694, 709×, 714, 715, 716, 718, 724), Grecu Voicu (504, 514, 540, 570, 578, 598, 600, 601, 603, 604, 607, 608, 611, 615, 618, 621). Şcoala Specială de doi ani. Muscalu C. Ştefan (512, 610, 629, 630, 634, 643, 703×, 704×, 705×, 707×, 718, 720, 721, 724).

CRAIOVA. Clasa VIII-a. Belega I. Mircea (591, 615, 729, 748, E: 240, 245), Şerban I. Radu (E: 236, 239, 243, 245, 248), Trifan Vasile (591, 611, 748, 750, E: 245) Clasa IX-a. Dumitrescu I. Mircea (E: 213, 217, 218, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 230, 231, 232, 235, 236, 239, 240), Mitran Paraschiva (655, 748, E: 175, 213, 217, 218, 236, 239, 245), Păun Elena (621, 655, E: 213, 225, 228), Popescu Cireşica (591, 618, 632, 655, E: 192, 197, 207, 208, 216, 218), Niţescu Dorina (743, 745, E: 225, 245, 251). Popescu I. Daniel (578, 591, 611, 621, 632, 744, E: 206, 209, 212, 214, 224, 231, 232, 243, 245, 246, 248, 251), Mircea I. Bârzu (592, 604, 606, 608, 624, 632, 640, 655, 658, 670, 728, E: 192, 198, 207, 208, 213, 222, 228), Clasa X-a: Istinie C. Crăciunel (578, 594, 677, 724, E: 217, 235, 239, P), Ene Apostol (645, 658, 670, 691, 724, 728, 745, 748, E: 208, 212, 216, 223, 226, 227, 231, 232), Marciu Marius (625, 632, 633 651, 638, 691, 707×, 716, E: 218, 223, 224, 225, 226), Iliescu M. Mihai (E: 213, 214, 217, 222, 235, 239, 240), Clasa XI-a. Câmpeanu I. Aurel (578, 583, 675, 682, 693, 698, 699, 701, 703×, 705×, 716, 718, 723, 724, 726, 728, 733, P), Cividjian Grigore (608, 624, 625, 629, 635, 636, 638, 664, 670, 671, 673, 676, 677, 679, 680, 681, 682, 691, 693, 694, 698, 699, 701, 715, 716, 717, 718, 723, 724, 725, 726, 728, 729, 735, 736, 741, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 757, 758×, 759×, P), Dinu Constantin (512, 516, 554, 591, 615, 658, 691, 724, 726, 728, E: 190, 209, 217, 218, 223, 230, 231, 236), Florea Paula 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, 716, 717, 718, 721, 724, 728, E: 158, 161, 236, 239, 245, 248, 251), Galbenu Gheorghe (554, 613, 615, 629, 6734, 664, 670, 676, 685, 687, 691, 693, 701, 703×, 707×), Popescu Silvia (504, 514, 521, 533, 543, 578, 588, 610, 613, 630, 651, 666, 685, 691, 699, 703×, 704× Popescu I. Mihail (521, 531, 532, 534, 543, 567, 571, 584, 589, 593, 614, 635, 659, 660, 666, 675, 676, 678, 679, 683, 685, 690, 691, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 701, 703×, 704×, 705×, 710, 714, 715, 716, 720, 721, 723, 724, 726, 727, 729, 733, P). Şerban Elena (679, 684, 707×, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 728, 733, E: 236, 239, 245), Tiţa I. Nicolae (544, 587, 588, 591, 596, 597, 601, 604, 607, 608, 610, 615, 618, 621, 632, 633, 641, 643, 645, 693 703×, 710×, 715, 716, 717, 718, 720, 721, 723, 724, 728, P), Vrejoiu Constantin (601, 618, 636, 648, 647, 654, 665, 666, 681, 682, 694, 699, 702, 716, 718, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 736, 742, 744, 748, 752, 752, 753, 759), Ţiclea C. (716, 718, 723, 746, 748, 756, 757), Absolvent. Sârbu I. Ovidiu (644, 666, 682, 685, 690, 691, P), Şcoala elementară Salcia (Filiaş) Clasa VII-a. Beznă N. Constantin (E: 132, 237, 259, 275, 218), Vulpescu Barbu

(137, 159, 175, 200, 213, 218), Şcoala medie de construcţii C.F.R. Vasile D. Alexandru (509, 716, 721, 724, 728, 744, 745, E: 239). Şcoala medie electrotehnică. Anul I. Dinu Gheorghe (537, 621, E: 157, 160, 192, 199, 202, 213, 216, 217, 222). Anul III. Constantin P. Marin (737, 740, 748, E: 239, 245).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa IX-a. Boncea Vasile (666, 685, 686, 691, 701, 703×, 714, 716, 717, 718, 721, 724, 728, 737, 740, 744, 745, 748, 754), Kramer Virgil (743, 748, E: 207, 208, 251), Urluescu Gh. Ion (658, 745, 748, E: 197, 202, 208, 225, 236, 248), Voicilă Ilie (632, 645, 652, 655, 658, 745). Clasa XI-a. Matei T. Gheorghe (548, 605, 608, 615, 618, 634, 643, 666, 687).

DOROHOI. Clasa X-a: Cojocaru V. Mihai (548, 615, 618, 633, 641, E: 155, 157, 158, 160, 161, 162, 263), Stoleru Marcel (550, 595, 604, 615, 631, 651, 664, 685, E: 165, 170 171, 172, 175, 178, 181, 194, 202, 204, 205, 207, 208, 209, 210, 213, 214, 216, 217, 218, 219, 223, 228,), Clasa XI-a: Pomârleanu Herold (608, 611, 613, 620, 621, 623, 624, 625, 632, 633, 640, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 658, 659, 664, 670, 673, 675, 679, 693, 694, 695, 699, 701, 782), Scutelnicu Constantin (605, 610, 681, 696, 720, 733, E: 213, 225, 228, 239, 244, 246, P).

FĂGĂRAŞ. Clasa XI-a Stelea Nicolae (564, 569, 574, 585, 590, 609, 615, 618, 630, 633, 643). Şcoala medie tehnică de chimie. Anul III. Panait Mihai (685, 686, 718, 721, 730, E: 165, 170, 171, 175, 182, 183, 184, 185, 186, 233, 235, 240).

FOCŞANI. Şcoala profesională de industria lemnului Gugeşti. Anul II. Ciocan Viorica (E: 213, 214, 215, 218, 220, 222), Clasa IX-a liceu. Pandrea Nicolae (570, 581, 582, 591, 601, 603, 611, 613, 615, 620, 621, 627, 632, 655, 658, 659, 676, 679), Clasa X-a: Ioan D. Ioan (565, 582, 634, 641, 649, 650, 659, 673, 678, 681, 694, 695, 701, 705, 711, 714, 715, 716, 718, 720 721, 724, 726, 728, 733, 734, 736, 743, 744, 748, 749, 752, 753, 755, 761, 762, P). Clasa XI-a. Ţâţu Marius (594, 598, 630, 633, 647, 666, 685, 703) 718, 721).

GALAŢI. Clasa IX-a. Voju Dionisie (658, 748, E: 208, 213, 216, 236), Clasa XI-a. Licea Ioan (A. Aplicaţii ale trigonometriei).

GIURGIU. Clasa VII-a. Bigan V. Petre (721, E: 152, 165, 175, 187, 193, 203, 206, 223, 239, 240, P), Clasa VIII-a: Cazacu A. Dumitru (615, E: 185, 202, 207, 208, 214, 224), Mihai M. Vasile (721, 724, 731, 740, E: 158, 161, 184, 185, 193, 194, 202, 211, 220, 242, 243, 244, 245), Mişcol Mircea (514, 658, 740, E: 154, 164, 168, 170, 171, 172, 176, 178, 187, 189, 194, 199, 206, 208, 208, 229, 234, 236, 237, 239, 242, 243), Clasa IX-a. Aldea V. (613, 617, E: 186, 192, 221, 222, 223, 230), Baciu V. Petre (574, 587, 615, E: 156, 160, 165, 176, 202, 225), Biţică Pompiliu (E: 185, 187, 188, 196, 209, 214, 215), Culcea Marian (611, 658, E: 157, 172, 178, 197, 204, 027, 208, 209, 217, 218, 223) Drăgan, Şt. Marin (548, 600, 615, 630, 685, 744, 745, E: 157, 179, 202, 208, 230, 239, 240, 242, 243, 245), Gogoneaţă Paul (615, 731, 740, E: 156, 172, 178, 179, 184, 185, 217, 223, 231, 240, 242, 247), Ştefănescu Sorin (574, E: 156, 157, 165, 218, 223), Răiceanu Ionel (615, E: 184, 185, 189, 215, 217, 218, 223, 242, 243), Vasile T. Alexandru (611, 615, 621, 658, E: 184, 185, 192, 202, 208, 214, 216, 217, 229, 231, 232, 236, 239, 240, 242, 243, 245, 248, 251), Vişan Marius (527, 615, E: 156, 157, 160, 161, 163, 166, 172, 173, 178, 185, 192, 193, 202, 204, 207, 216, 218), Clasa X-a. Băţineţu M. Dumitru (534, 600, 627, 629, 630, 633, 643, 648, 652, 658, 666, 677, 697, 721, 723, E: 168, 173, 175, 178, 183, 185, 194, 197, 206, 215, 220, 227, 233, 235, 237, 239. P), Bigan Gh. (504, 588, 615, 630, 643, 647, 685, E: 173, 182, 207, 208, 225), Calotă Şt. Ghorghe (630, 648, 740, E: 242, 243, 245, 247), Constanda Mihai (540, 542, 666, 670, 685, 686, 718, 721, E: 202, 223, 224), Petcu I. Dumitru (514, 647, 663, 704×, 718, 721, E: 235 236), Pârcălăbescu I. Marin (568, 630, 643, 648, 666, 685, 686, E: 258, 160, 161, 173, 176, 193, 203, 209, 218, 223, 225, 230, 247), Pieleanu D. Radu (568, 643, 666, 685, E: 158 161, 165, 193, 204, 209, 211, 223, 225), Vişan V. Marin (534, 578, 600, 627, 633, E: 175, 178, 182, 193, 202, 207, 208, 209, 211, 213, 217, 218, 220, 223, 227), Clasa XI-a: Bigan S. (504, 529, 532, 533, 534, 543, 558, 568, 574, 587, 590, 609, 618, 629, 643, 647, 648, 558, 663, 666, 670, 685, 686, 688, 719, 721, 749), Buduru St. Vasilica (685, 687, 699, 740, 742, 743, 746, E: 223, 226, 229, 242, 243), Marin M. Ştefan (621, 633, 664, 666, 685, 691, E: 213, 216, 217, 218, 222), Stan M. Fotă (504, 588, 641, 645, 652, 653, 654, 686, 695, 708×, 709×, 716, 721, 722, 723, 724, 726, 733), Tănăsescu Petrică (526, 548, 591, 593, 617, E: 161, 233, 235, 237, 239, P).

GURA HUMORULUI (Suceava). Tăbăcaru Mircea 743, 744, 745, 746, 748, 758×, 759×, 760×, 761×, 762×).

HUŞI. Clasa XI-a. Avram Iosefina (687, 707, 708, 711, E: 223).

HUNEDOARA. Şcoala medie tehnică siderurgică. Anul IV. Cîmporescu Doinel (708, 709, 714, 758, 759).

IAŞI. Clasa IX-a Radu Rodica (658, 676, 208, 213, 216, 223, 225, 230), Weisman Elias (560, 608, 618, 613, 611, 632, 743, 744, 745, 748).

ORADEA. Clasa VIII-a. Bocu Monica (666, E: 193, 200, 202, 203, 204, 205, 207, 209, 211, 212, 213, 216, 217, 218, 219, 220), Clasa IX-a. Bocu Mircea 503, 514, 521, 540, 544, 548, 557, 566, 569, 574, 587, 591, 594, 598, 603, 624, 625, 627,629, 630, 633, 635, 636, 637, 643, 648, 651, 654, 658, 659, 660, 663, 664 665, 666, 670, 672, 675, 678, 679, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 690, 691, 694, 694 698, 699, 701, 702, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, P), Buzuloiu Vasile (503 533, 534, 540, 543, 574, 581, 587, 589, 590, 591, 594, 597, 598, 601, 604, 606, 609, 610, 611, 613, 633, 615, 620, 621, 624, 627, 628, 629, 630, 632, 655, 658, 662, 663, 664, 670, 671, 679, 681, 682, 683, 696), Junger Robert (527, 583, 587, 621, 651, 666, 689, 691, 729, E: 161, 165, 179, 182, 187, 191, 193, 199, 204, 207, 208, 213, 217, 220, 223, 225, 230). Clasa XI-a. Petrovici Liviu (516, 556, 566, 568, 572, 573, 574, 576, 578, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 586. 587, 588, 589, 591, 593, 598, 599, 600, 701, 603, 605, 606, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 615, 617, 618, 620, 621, 622, P), Poenaru Dorin (568, 569, 600, 612, 635, 651, 685, 687, 692, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, 716, 717, 718, 720, 721, 723), Şcoala elementară Pietroasa. Clasa VII-a. Orz Aurica (E: 175, 205, 213, 217, 218, 221, 235, 239, 240).

ORAŞUL STALIN. Clasa X-a: Ionescu Virgil, (523, 651, 655, E: 208, 218), Iordache Nicoleae (658, 666, 685, 718, 721, E: 193, 203, 223, 236), Nan Stelian (503, 504, 521, 527, 568, 585, 590, 597, 609, 612, 614, 615, 633, 658, 685, 716, 718, 721, 723 724, 728, E: 150, 153, 160, 161, 165, 170, 200, 209, 213, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 241, 242, 243, 251, P), Taffet Gheorghe (523, 608, 621, 655, E: 186, 191, 192, 207, 209, 212), Schian Nicolae (604, 608, 635, 664, 670, E: 160, 175, 217, 218, 220, 223, 225, 230), Clasa XI-a. Constantinescu Teodor (500, 578, 581, 589, 607, 634, 641, 655, 670).

PIATRA NEAMȚ. Școala elementară Roznov. Clasa VII-a. Drăgușanu V. (E: 233, 235, 236, 239, 240), Macovei Ilie (E: 233, 235, 236, 239, 240), Clasa IX-a. Sandu Iulian (E: 157, 214, 216, 235, 236, P), Vasilescu Florica (591, 611, 748, E: 216, 236, 245), Clasa XI-a. Aizicovici Mișu (527, 615, 625, 648, 665, 695, 698, 704×, 723, 724, 728, E: 193, 223, 226, 239, P), Berea Vasile 529, 643, 655, 665, 670, 728, E: 213, 236), Agapi Constantin (615, 618, 625, 630, 633, 635, 665, 670), Berea Dumitru (611, 615, 630, 652, 685, 695, 698, 704×, 707×, 709×, 713, 714, 716, 717, 721, 724, 726, 728, 744, 748, E: 207, 209, 221, 23 , 239 243, 248), Botezatu Ionel (665, 701, 716, 726, 728, E: 223, 228, 230), Coroamă Dumitru (665, 670, 694, 704×, 70 ×, 709× 716, 726, 728, E: 213, 218, 221, 223, 225, 243, P), Davidescu S. Ilie (527, 615, 625, 640, 648, 665, 695, 698, 701, 709×, 710×, 712, 723, 724, 726, 727, 728, 733, 734, 744, 748, 751, E: 175, 179, 193, 200, 213, 221, 223, 226, 234, 235, 240, 243, 245, 248, 249), Enache Constantin (527, 613, 615, 621, 633, 716, 724, 728), Faibiș Iancu (717, 724, 726, 727, 728, 733), Haimovici Fulga (554, 625, 670, 703×, 721, 728), Popa Gh. Ioan (643, 655, 658, E: 193, 200, 209, 213, 217), Escu Gheorghe (703×, 706×, 724, 726, 728, E: 225, 239), Miron I. Marcel (724, 726, 728, E: 223, 236), Sala Corneliu (704, 717, 726, 727, 728), Sălăgeanu C. Horațiu (703×, 704×, 706×, 716, 717, 724, 726, 728, 734, E: 153, 228, 236, 239, 248, 251), Șum Constantin (658, 665, 698, 701, 704×, 709×, 716, 717, 718, 724, 726, 728), Teleagă, Vasile (698, 704×, 714×, 716, 724, 726, 728), Țifui Vasile (581, 613, 615, 617, 622, 643, 648, 695, 724, 726, 728, 744 E: 193).

PITEȘTI. Școala elementară Tatulești. Clasa VI-a. Diaconescu I. Gheorghe (E: 159, 160, 164, 186, 190, 207), Clasa VII Popescu I. Radu E: 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251), Sandu I. Georgică (554, 644, 658, 718, E: 192, 197, 200, 202, 207), Școala medie tehnică de mecanică. Anul I. Baicu N. Gheorghe (615, 658, E: 203, 208, 237, 240, 242, 245), Burcea H. Florin (721, E: 204, 205, 216, 223, 225, 230, 231), Ciobanu C. Ștefan (E: 198, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 240, 243, 245, 247), Ceaușu Radu (E: 216, 224, 225, 230, 231), Dudău Gh. Gheorghe (615, 698, E: 215, 216, 235, 237, 240), Dulgheru I. Gheorghe (615, E: 187, 203, 205, 206, 208, 218, 240, 242, 247), Gheorghe I. Constantin (698, E: 209, 212, 214, 218, 220, 223, 227, 232, 235, 239), Luca Gh. Nicolae (633, E: 211, 212, 216, 218, 223, 227, 239), Miu I. Constantin (615, 721, E: 202, 205, 206, 209, 243, 245, 721), Moț Van, (E: 198, 202, 203, 204, 218), Pașă Gh. Ion (E: 208, 233, 240, 242, 243, 245, 247), Sandu T. Mihail (615, E: 202, 203, 204, 206, 207, 218, 240, 243), Sârbu. I. Dumitru (685, 615, E: 187, 205, 206, 239, 243), Stancu Gheorghe (E: 193, 211, 221, 222, 227, 231, 235), Stănescu Gh. Ion (615, 627, 721, E: 185, 205, 212, 222, 225, 227), Stan Gh. Ion (615, E: 198, 207, 223, 225, 230, 231, 240), Vlădescu Traian (615, E: 203, 206, 208, 209, 240, 245, 247), Anul II. Bădescu St. Gheorghe (608, 615, 618, 621, 625, 635, 643, 685, E: 190, 198, 201, 202, 207, 208, 209, 247), Anghel Andrei (E: 203, 205, 208, 209, 237, 239, 240, 242, 243, 245), Buhoci M. Ilie (E: 203, 223, 237, 239, 240, 242, 245, 247), Dobrew I. Cristache (615, 685, 718, E: 205, 206, 226, 235, 240, 243, 242, 247), Dulgheru Tănase (685, 718, E: 203, 206, 225, 226, 227, 240, 243), Mihai Șt. M. C-tin (E: 203, 205, 206, 208, 209, 242, 243, 245), Minea D. Octavian (535, 721, 725, 740, E: 158, 161, 173, 193, 203, 204, 205, 207, 209, 234, 237, 238, 239), Popescu I. Constantin (E: 203, 204 209, 223, 227, 2237, 242, 243, 245).

★

REDACTAREA SOLUȚIILOR

Pe aceiaș foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul complect al problemei. Se poate scrie în continuare și pe contrapagină ; iar dacă soluția necesită figură, se va desena cu îngrijire. Folosiți soluțiile problemelor din revistă ca model de redactare a soluțiilor și justificați calculele făcute.

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluție, numele, școala, clasa și localitatea. Soluțiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

— La orice problemă propusă se primesc soluții cel puțin timp de 6 luni dela publicarea enunțului.

— Se mai primesc soluții la problemele cu numărul de ordine: 543, 544, 546, 548, 549, 551, 581, 585, 593, 600 și următoarele; iar pentru elementar, la exercițiile E: 200 și următoarele.

— Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți ca să înceapă a propune probleme, după ce au soluționat un număr mare de exerciții și probleme.

— Intrucât sosesc la redacție cereri de numere vechi ale revistei, sau reclamații ale abonaților de neprimirea revistelor, vă informăm că pentru abonamente și procurări de reviste să țineți seama de cele arătate pe coperta revistei, redacția neocupându-se de expedierea și difuzarea revistei.

In plicul cu probleme rezolvate pe o foaie separată, corespondenții sunt rugați să ne comunice data când au primit acest număr al revistei, sugestii în legătură cu articolele, problemele propuse, numărul problemelor propuse și rezolvate, observări asupra revistelor apărute, precum și propuneri pentru viitoarele numere ale R.M.F.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice și fizice, articole, dări de seamă asupra activităților cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, sugestii și propuneri, etc. se trimit pe adresa: Revista Matematică și Fizică, Strada Dionisie Lupu 40, parter, Raionul Stalin, București.

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poștale dela orașe și sate, prin factorii poștali, prin propagandiști precum și la secțiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru întreprinderi . . . . . Lei 60 anual

Tarif pentru muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 541 — ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREȘTI

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E 1426/01

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEH - OBMEHA
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA
KAT

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

Országos Műszaki Könyvtár

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

Tinerii din școli și facultăți sunt chemați ca în cinstea Congresului și Festivalului să-și sporească eforturile pentru însușirea științei și culturii înaintate.

(Din Apelul C.C. al U.T.M. către tinerii din R.P.R. în legătură cu convocarea la București al celui de al treilea Congres Mondial al Tineretului și al celui de al patrulea Festival Mondial al Tineretului și Studenților pentru Pace și Prietenie).

★ ★ ★

ANUL IV

MAI 1953

5

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Despre profesia de matematician după un articol al Academicianului Sovietic A. N. Kolmogorov*	109
2.	*Metoda polarografică de V. Pavlu*	116
3.	*Să construim cu mijloace proprii modele şi aparate de fizică (Construcţia roţii Barlow) de N. Rădulescu*	120
4.	*Chestiuni de concurs*	121
5.	*Probleme rezolvate (606, 622, 624, 625, 629, 632, 633, 634, 635, 639, 643, 644, 646, 647, 648, 649)* ...	126
6.	*Probleme propuse (836—862)*	127
7.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E. 290—E. 300)*	129
8.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*..	130

5

ANUL IV MAI 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 5 **Mai 1953**

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

ÎN AJUTORUL TINERILOR CARE SE PREGĂTESC SĂ INTRE ÎN INSTITUTELE DE ÎNVĂŢĂMÂNT SUPERIOR

DESPRE PROFESIA DE MATEMATICIAN

după un articol al Academicianului sovietic ***A. N. Colmogorov***

Importanţa metodelor matematice în ştiinţe, ca mecanica, fizica sau astronomia, este bine cunoscută. Deasemeni tuturor le este cunoscut că matematica este necesară în munca practică a inginerilor şi tehnicienilor. Cunoştinţe elementare de geometrie sau priceperea de a se folosi de formule sunt necesare aproape fiecărui meşter sau muncitor calificat. Mai puţin clară pentru mulţi este problema ce înseamnă specialitatea de matematician şi ce înseamnă să te ocupi chiar de matematică.

Foarte mulţi îşi închipuie că în manuale şi în formularele matematice s'au strâns un număr cu totul îndestulător de formule şi reguli pentru rezolvarea tuturor problemelor matematice posibile, care se întâlnesc în practică. Chiar oameni foarte culţi se întreabă adesea cu nelămurire: se poate oare face ceva nou în matematică?

De aceea oamenii îşi imaginează uneori că matematicianul este un individ plicticos, care a învăţat un număr mare de formule şi teoreme şi că sarcina lui constă numai în a transmite altora aceste cunoştinţe gata învăţate de dânsul.

In toate acestea este adevărat numai că noţiunile matematice ce se predau în şcoala medie şi la primele grade de studiu al matematicii în şcoala superioară, sunt câştigate de omenire destul de demult. Insă chiar aceste noţiuni matematice pot fi aplicate cu pricepere şi folos numai în cazul când ele sunt însuşite în mod creator, aşa fel încât cel ce învaţă vede singur cum am putea ajunge la ele prin propriile noastre forţe. De aceea şi dela cel ce predă matematica nu numai în şcoala superioară, dar chiar şi în cea medie nu se cere numai cunoaşterea temeinică a ştiinţei pe care o predă. Intr'adevăr numai un om, care este captivat de matematică şi o concepe ca pe o ştiinţă vie şi în plină desvoltare, o poate preda bine. Probabil, mulţi şcolari din şcoala medie ştiu cât de atrăgătoare, şi de aceea şi accesibilă, devine matematica la astfel de profesori.

Independenţa şi capacitatea de a ataca pe o cale nouă formularea matematică a unei probleme sunt necesare într'o măsură şi mai mare celui ce se apucă să aplice matematica la rezolvarea problemelor tehnice. Aceasta se referă în fond la munca fiecărui inginer, ce se foloseşte de matematică. Insă întrucât cunoştinţele matematice necesare pentru aceasta, precum şi aptitudinea respectivă nu se găsesc la toată lumea, majoritatea institutelor noastre de cercetări ştiinţifice în domeniul ştiinţelor tehnice, ba chiar unele fabrici mari au intrat larg pe calea atragerii în muncă a specialiştilor matematicieni, împreună cu inginerii, pentru rezolvarea problemelor tehnice.

Una din categoriile de matematicieni deosebit de deficitare este a matematicienilor, capabili să *conducă* mari lucrări de calcule. In timpul de faţă există multe probleme în cari pentru obţinerea unui rezultat numeric sunt necesare calcule ce întrec capacitatea umană şi aceasta cu toate că posibilităţile birourilor de calcul contemporane cu multe zeci de calculatori sunt foarte mari. Calculul tensiunilor elastice în baraje, a filtrării apelor sub baraje, a rezistenţelor la care este supus un avion în sbor, sau a traiectoriilor proiectilelor — iată exemple tipice de probleme la care birouri de calcul lucrează luni întregi, iar uneori şi ani dearândul. Această muncă, adesea foarte migăloasă, cere dela calculatori o bună îndemânare şi o pregătire matematică indispensabilă. E nevoie de un mare număr de matematicieni cu iniţiativă creatoare şi cu cunoştinţe solide, obţinute în universităţi, pentru a reduce problemele matematice la o formă sub care ele admit o rezolvare numerică necesitând mai puţină

muncă. Teoria «metodelor calculatorii» ale matematicii s'a desvoltat acum într'o mare știință și nevoia de specialiști ce posedă aceste metode nu face decât să crească cu desvoltarea «matematicii mecanizate». In fața lor se pune problema foarte originală de «programare» adică de reducere a procesului de calcul la o formă care admite o automatizare complectă la mașinile de un tip anumit.

Complect greșită este concepția despre matematică ca despre o știință terminată, construită odată pentru totdeauna în ceeace privește problemele teoretice de bază. In realitate, matematica se îmbogățește în permanență cu teorii absolut noi și se restructurează în mod hotărîtor ca răspuns la noile cerințe ale mecanicii (oscilații nelineare, mecanica vitezelor supersonice), fizicii (metodele matematice ale fizicii cuantice) și a altor științe înrudite. Pe de altă parte, în adâncurile matematicii însăși, după acumularea unui mare număr de probleme speciale foarte variate, rezolvate prin procedee particulare, se formează noui teorii generale, ce luminează aceste probleme din puncte de vedere cu totul noi și permit să le rezolvăm prin metode uniforme. Astfel, de exemplu, metodele «analizei funcționale» ce apar sub ochii noștri stau față cu analiza matematică care a fost creiată încă în secolele 17—18 și se predă în toate institutele de învățământ tehnic superior, în acelaș raport, în care se află algebra în raport cu aritmetica. Așa numitele «metode operaționale» ale analizei funcționale și-au găsit o largă aplicație în fizica contemporană și în tehnică.

Dacă se compară dările de seamă publicate asupra progreselor matematicii sovietice în 15 și 30 ani, se constată că în prima perioadă de 15 ani numărul matematicienilor, cari au introdus câte ceva nou în știința matematică, a fost de ordinul 200, iar în a doua perioadă de 15 ani de ordinul 600—800.

Este nevoie de mulți matematicieni cu calificarea cea mai înaltă, pregătiți la facultățile mecano-matematice și fizico-matematice ale *universităților*.

Ministerul Invățământului Superior al U.R.S.S. a luat măsuri importante, care au de scop ridicarea calificării personalului didactic dela catedrele de matematică ale institutelor de învățământ superior și atragerea în universități a unui mare număr de tineri, care au înclinare spre matematică.

Este interesant să ne amintim în legătură cu aceasta că în primii ani după Marea Revoluție Socialistă din Octombrie tineretul se îndrepta aproape exclusiv spre institutele *tehnice* de învățământ superior. Mulți își închipuiau că numai pe această cale ei vor participa destul de direct la construirea socialismului. In anii ce au urmat imediat după revoluție, astfel de idei aveau o oarecare bază, însă ulterior când desvoltarea *științei* a devenit o necesitate urgentă, chiar din punct de vedere direct economic a țării noastre, au devenit necesare anumite eforturi pentru a combate neîncrederea unei părți a tineretului față de perspectivele, care îl așteaptă la intrarea în *universități*.

La admiterea în anul 1952, la specialitățile matematice ale universităților din U.R.S.S. s'a prevăzut o mare extindere în comparație cu anii trecuți. Este foarte important ca prin această primire lărgită la specialitățile matematice să nimerească nu numai un tineret bine pregătit, dar și care să iubească matematica. Pentru aceasta este necesar, ca în toate locurile, în fiecare școală, să fie creată posibilitatea pentru acești amatori de matematică să-și determine în mod conștient înclinările lor și să-și poată evalua forțele și posibilitățile.

Pentru ca alegerea să fie mai conștientă, este folositoare participarea la munca cercului matematic și în olimpiada matematică locală. Poate că și mai folositoare este citirea literaturii corespunzătoare și încercarea forțelor în rezolvarea problemelor mai grele.

Câteva observații asupra caracterului muncii matematicianului cercetător

Ca și orice altă știință, matematica cere în primul rând cunoașterea solidă a ceeace s'a făcut deja în problemele cercetate. Dar nu trebue să credem că în matematică este mai greu decât în alte științe să ajungem la posibilitatea de a face ceva *nou*. Experiența pledează mai degrabă contrariul: matematicienii capabili, ca regulă, încep cercetările științifice independente foarte devreme. Dacă descoperirile matematice făcute la vârsta de 16 sau 17 ani sunt totuși excepții, care sunt culese cu deosebită grijă în cărțile de istoria matematicii, totuși începutul unei munci științifice serioase la 19—20 ani, în anii medii ai universităților, este destul de tipic pentru biografia multora din savanți.

Desigur, amploarea *punerii* problemelor vine deobicei ceva mai târziu, dar la rezolvarea unor probleme concrete dificile, formulate clar în fața lor, oameni tineri, de tot, concurează adesea cu succes cu savanți cunoscuți și formați. In fiecare an se publică în Dările de Seamă ale Academiei de Științe a U.R.S.S. vreo 10 lucrări științifice, efectuate de studenți cu specialitatea matematică ai Universității din Moscova.

La baza majorității descoperirilor matematice stă o ideie simplă: o construcție geometrică cu totul evidentă, o nouă inegalitate elementară, etc. Trebue numai să aplicăm în mod corespunzător această idee simplă la rezolvarea problemei, care la prima vedere pare inaccesibilă. Multe exemple în această privință se pot găsi și în literatura elementară. Deaceea, nici nu există un zid de netrecut între cele mai noi și dificile cercetări matematice originale și rezolvarea problemelor, accesibile unui matematician începător capabil și destul de perseverent. Este interesant din aceast punct de vedere să se citească câteva capitole din « Autobiografia matematică » a vestitului algebrist sovietic *N. G. Cebotarev*[1]), unde autorul expune istoria cercetărilor sale științifice, începând cu primele experiențe de licean și mergând până la foarte mari descoperiri în algebră.

O altă observație se referă la munca matematicienilor în direcția rezolvării problemelor care se pun în științele naturii (mecanică, fizică și tehnică). Acum, când colaborarea între matematicieni și reprezentanții specialităților înrudite se desvoltă pe scară deosebit de largă, se poate spune în mod categoric, că această colaborare este mai fructuoasă atunci când matematicianul nu se mărginește la rolul de a efectua « comanda » făcută lui, ci se forțează să pătrundă în fondul problemelor științelor naturii și ale tehnicii. In fond este vorba de faptul că specialiștii în fizica matematică și teoretică, în mecanica teoretică sau în geofizica teoretică, pot fi pregătiți pe două căi: începând învățătura cu studiul fizicii, mecanicii sau geofizicii, sau studiind mai întâi matematica la secțiile matematice ale universităților și intrând apoi temeinic într'un domeniu sau altul de aplicație a matematicii.

Există chiar un punct de vedere, că a doua cale dă rezultate mai bune, adică că a studia pe o bază matematică solidă aerodinamica, dinamica gazelor. seismologia sau meteorologia dinamică, este mai ușor decât ca un specialist în vreunul din aceste domenii să-și lichideze lipsurile pregătirii matematice. Această părere poate fi considerată ca prea extremă și se poate observa de exemplu că posedarea bună a tehnicii experimentale se întâlnește la matematicienii care au trecut să lucreze în vreun domeniu înrudit, doar ca o rară excepție. Insă nu se poate să nu recunoaștem că din cei ce au avut o educație de matematicieni a apărut un șir de mari specialiști în științele înrudite.

[1]) Publicată în « Uspehi Matematiceschih Nauk » Vol. III, No. 3 (1948).

Este greu să separăm matematica de mecanică și seismologie în lucrările academicienilor *M. A. Lavrentiev* și *S. L. Sobolev*. In primul rând sunt cunoscuți ca mecanicieni: acad. *M. V. Cheldâș*, membrii corespondenți ai Academiei de Științe a U.R.S.S., *L. N. Sretenschi* și *L. I. Sedov*; ca geofizician, membrul corespondent al Academiei de Științe a U.R.S.S. *A. N. Tihonov*; ca specialist în fizica teoretică, membrul corespondent al Academiei de Științe a U.R.S.S. *N. N. Bogoliubov*. Cu toate acestea toți au terminat universitatea ca matematicieni.

S'ar putea indica multe realizări concrete în științele naturii și în tehnică, legate de numele unor matematicieni și cari s'au arătat a fi foarte importante din punct de vedere practic.

Despre aptitudinile matematice

Se exagerează adesea necesitatea aptitudinilor speciale pentru studiul și înțelegerea matematicii. Impresia că matematica ar fi excepțional de grea se creiază uneori datorită unei expuneri rele, peste măsură de formale, la lecție. Aptitudinile umane obișnuite, mijlocii, sunt cu totul suficiente pentru ca cineva sub o conducere bună sau după cărți bune, nu numai să-și însușească în mod conștient matematica ce se predă în școala medie, dar și pentru ca să se descurce, de exemplu, în elementele de calcul diferențial și integral.

Nu este însă mai puțin adevărat, că atunci când este vorba de alegerea matematicii ca specialitate de bază, este cu totul naturală dorința de a-și verifica aptitudinile matematice sau, cum se spune uneori « darul » matematic. Căci în afară de orice îndoială, că oameni diferiți își însușesc raționamentele matematice. rezolvă problemele matematice, sau, la o treaptă mai înaltă, ajung la noi descoperiri matematice, cu o viteză, ușurință și succes diferit. Și desigur trebue să tindem ca, din milioanele de tineri ai noștri, să devină matematicieni specialiști tocmai acei cari vor lucra cu mai mult succes în acest domeniu.

Deaceea acțiunea de a promova tineretul dotat pentru matematică este una din problemele importante ale cercurilor de matematică din școli, ale concursurilor de matematică și ale altor măsuri de propagandă ale cunoștințelor matematice și de răspândire a interesului pentru activitatea matematică independentă. Nu trebue să ne grăbim cu creiarea prea timpurie pentru anumiți tineri, a reputației de « talente » matematice. Dar îndrumarea la timp cu sfatul sau prin premierea la concurs a matematicienilor talentați în direcția

alegerii matematicii ca domeniu al activității ulterioare este indispensabilă.

In ce constă aceste aptitudini? Trebue în primul rând să subliniem că succesul în matematică este cel mai puțin legat de memorarea mecanică a unui mare număr de fapte, a unor formule izolate, etc. O memorie bună este folositoare în matematică ca și în orice altă activitate însă majoritatea marilor savanți matematicieni nu a posedat nici un fel de memorie deosebită, remarcabilă. In particular, scamatorii cari memorează lungi șiruri de numere cu mai multe cifre și cari le adună sau le înmulțesc în minte, nu pot nicidecum servi de exemplu drept bune aptitudini matematice în sensul serios al cuvântului.

Priceperea în calculele algebrice, cunoscute tuturor celor ce studiază algebra, în sensul transformării expresiilor literale complicate, găsirii unor căi reușite pentru rezolvarea ecuațiilor cari nu se încadrează în regulile standardizate, etc., este deja mai aproape de acele aptitudini, cari se cer adesea dela matematician în munca științifică serioasă.

Este chiar răspândită părerea că desvoltarea mare a aptitudinilor calculatorii sau cum se spune uneori « algoritmice » este caracteristică pentru unul din cele câteva tipuri de înzestrare matematică. In algebra ce se face în școală, elevii se întâlnesc prima dată cu dificultățile, cari cer pentru învingerea lor aptitudini de acest fel, la descompunerea expresiilor algebrice în factori. Printre problemele ce se dau în anexă problemele 1 și 2 ne dau o imagine a faptului că uneori descompunerea unor expresii foarte simple în factori necesită o mare ingeniozitate [1]). După aceea domeniul de bază al aplicării aptitudinilor și talentelor de acest fel devine rezolvarea ecuațiilor.

Totuși peste tot unde este posibil, matematicienii tind să facă problemele studiate de ei, *intuitive din punct de vedere geometric*. In școala medie se arată destul de clar cât de folositoare sunt graficele pentru studiul proprietăților funcțiilor. De aceea cititorul nu se va mira de afirmația că imaginația geometrică sau, cum se spune « intuiția geometrică » joacă un mare rol în munca de cercetare aproape în toate domeniile matematicii, chiar și în cele mai abstracte. In școală este deobicei deosebit de dificilă imaginarea figurilor spațiale. Trebue, de exemplu, să fii un matematician foarte bun (în comparație cu nivelul școlar obișnuit) pentru ca închizând ochii să-ți imaginezi clar fără desen ce formă are intersecția suprafeței unui cub cu un plan, ce trece prin centrul cubului și este perpendicular pe una din diagonalele sale. In problema 4 (anexă) toată dificultatea constă în a înțelege limpede ce fel de figură se obține la intersecția tetraedrelor. La rezolvarea problemelor 5—7 este deasemeni foarte importantă intuiția geometrică cu toate că aici va rămâne mai mult și în seama cunoașterii bune a teoremelor, pe care va trebui să le aplicăm în demonstrație, precum și în seama priceperii de a judeca logic.

Arta de a desfășura corect și înlănțuit un raționament logic este a treia latură esențială a aptitudinilor matematice. In școală, pentru desvoltarea acestei arte servește, în special, cursul sistematic de geometrie cu definițiile, teoremele și demonstrațiile sale. Dar, pe cât se pare, cea mai mare dificultate în privința înțelegerii structurii logice a unei afirmații matematice îl prezintă adesea pentru școlari principiul inducției matematice. Aici însăși înțelegerea sensului afirmațiilor se pierde pentru mulți în îngrămădirea de diferiți « dacă » « atunci » etc. Ințelegerea și priceperea de a aplica corect principiul inducției matematice este un bun criteriu de maturitate logică, care este absolut indispensabilă matematicianului.

Priceperea de a raționa logic într'un domeniu necunoscut se capătă cu greutate. La concursurile matematice școlare cele mai neașteptate dificultăți apar tocmai la rezolvarea problemelor în cari nu se presupun nici un fel de cunoștințe matematice prealabile din cursul școlar, însă se cere să se prindă exact sensul problemei și să se raționeze în consecință. Chiar următoarea problemă produce dificultăți multor elevi din clasa X-a: « Intr'o pădure sunt 800.000 de brazi și pe nici unul din ei nu sunt mai mult de 500.000 de ace. Să se demonstreze că cel puțin doi brazi au același număr de ace ». (Să se compare cu problema 8 din anexă; în problemele 10—12 deasemeni dificultatea principală nu stă în complexitate ci în neobișnuința acelor moduri de raționament cari trebuesc aplicate).

Diferitele laturi ale aptitudinilor matematice se întâlnesc în combinații diferite. Este suficientă desvoltarea excepțională a uneia din ele pentru a permite uneori să ajungem la descoperiri neașteptate și remarcabile, cu toate că o unilateralitate exagerată este, bineînțeles, periculoasă. Se înțelege dela sine că nici o aptitudine nu va ajuta fără să fii captivat de munca ta, fără o activitate zilnică sistematică.

[1]) Este vorba aici de descompunerea în polinoame cu coeficienți raționali. Multora li se va părea că o astfel de descompunere nu se poate face în problemele 1 și 2.

Cercurile de matematică din școli studiul individual, pregătirea pentru examenele de admitere în universitate

Predarea în școală, în timpul lecțiilor, are în principiu drept scop, însușirea temeinică a matematicii de către toți școlarii. Incercarea forțelor, la rezolvarea unor probleme mai grele, cunoașterea mai îndeaproape și a modului cum rezolvă știința problemele matematice mai dificile și a modului cum se aplică matematica, poate fi făcută la cercul de matematică. Astfel de cercuri sunt înființate de profesorii de matematică în multe școli. Prin forțele universităților și institutelor pedagogice sunt organizate în multe orașe cercuri matematice interșcolare precum și ținerea sistematică a unor conferințe pentru elevi despre diferite probleme ale matematicii și a istoriei sale.

Concursurile matematice, la cari se propun probleme grele și la cari se acordă « învingătorilor » premii și diplome de onoare, reușesc bine acolo unde este bine organizată munca în cercuri. Insă aceste concursuri trebue să fie o încheiere a muncii făcută în timpul anului și nu o măsură festivă izolată.

Problemele propuse în cercuri și la concursuri, au uneori un caracter artificial și chiar distractiv. In asta nu este nici o pagubă, dacă problemele sunt astfel alese încât pentru rezolvarea lor este necesară o gândire serioasă, asemănătoare cu aceea care se cere dela un matematician adult, care studiază individual.

In referatele cari se fac în cercuri de către participanți și la conferințele cari se țin pentru elevi de către profesorii din învățământul mediu și superior, sunt lămurite pe larg căile fundamentale ale desvoltării științei matematice, importanța matematicii pentru științele naturii și pentru tehnică. Desigur, este foarte bine dacă se reușește ca în problemele ce se propun în cercuri să se dea un material important din punct de vedere principial sau convingător prin utilitatea sa, dar ar fi inutil să se ceară ca acestor condiții să le fie supusă întreaga acea mare muncă « de antrenare » a matematicianului tânăr care se efectuează prin rezolvarea problemelor.

Independent de participarea în cercuri ne putem ocupa și singuri de rezolvarea unor probleme mai grele. Există câteva interesante culegeri de probleme pentru amatorii de matematică. Unele din ele sunt astfel scrise, încât cititorul, rezolvând succesiv problemele legate una de alta, poate să își imagineze viu căile de desvoltarea unor teorii matematice destul de complicate.

Munca în cercuri, audierea conferințelor și citirea literaturii suplimentare, nu trebue, bineînțeles, să sustragă pe școlar de la munca școlară obligatorie mai elementară. Trebue să ținem minte că, pentru a fi admis în universitate, se cere înainte de toate cunoașterea solidă a cursului școlar și priceperea de a rezolva în baza acestor cunoștințe probleme mai obișnuite.

Pentru a rezolva o problemă, trebue să ne amintim câteva formule, reguli sau teoreme, să le aplicăm succesiv și să nu ne încurcăm în calcule sau raționamente lungi. Astfel de probleme se dau pentru ca după mersul rezolvării lor să se poată verifica *cunoștințele* celor examinați și existența la ei a unor *deprinderi* solide a conducerii corecte a transformărilor algebrice, a studiului figurilor geometrice, etc.

Matematica elementară și cea superioară

« Un punct crucial în matematică a fost *mărimea variabilă* carteziană. Datorită ei au intrat în matematică *mișcarea și dialectica* și datorită acestui fapt a devenit *neîntârziat indispensabil calculul diferențial și integral...*

Numai calculul diferențial dă științelor naturii posibilitatea să reprezinte matematic nu numai *stările*, dar și *procesele*: mișcarea ». (*Engels*).

Revoluția la care se referă aceste cuvinte ale lui Engels a avut loc în matematică în secolul al 17-lea, simultan cu crearea bazelor științelor matematice ale naturii. Importanța acestei revoluții a fost atât de mare, încât până în prezent noile capitole ale matematicii, formate ca urmare a acestei revoluții, sunt reunite sub denumirea de « matematică superioară » spre deosebire de « matematica elementară » formată mai înainte.

Câteva noțiuni fundamentale ale matematicii superioare au intrat în prezent în programele școlii medii, unde se studiază temeinic dependența funcțională între mărimi variabile și se dau câteva noțiuni din teoria limitelor. Totuși, calculul diferențial și integral pe care se bazează majoritatea celor mai serioase și importante aplicații ale matematicii la științele naturii și în tehnică rămâne în afara cadrului programei școalei medii.

Rar se aleg elementele de calcul diferențial și integral ca obiect al activității în cercurile matematice școlare, întrucât la cercuri se tinde deobicei să se expună un material care, după explicații introductive relativ scurte, să permită dintr'odată să ne apucăm de o rezolvare independentă a problemelor; studiul însă al elementelor de calcul diferențial și integral necesită o muncă sistematică, destul de lungă. Pe de altă parte, forța și

generalitatea metodelor calculului diferențial și integral sunt atât de mari, încât fără a face cunoștință cu ele nu putem înțelege, cum trebue, toată importanța matematicii pentru științele naturii și pentru tehnică și nici chiar să prețuim' toată frumusețea și puterea de atracție a însăși științei matematice. De exemplu, în cadrul matematicii elementare, găsirea și demonstrarea formulelor volumelor unor figuri ceva mai complicate sau a ariilor suprafețelor este deosebit de grea. Chiar volumul piramidei cauzează după cum se știe destule chinuri școlarilor. Deducerea formulei volumului conului

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

a volumului sferei

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3$$

sau a ariei sferei

$$s = 4\pi R^2$$

nu eate mai puțin complicată. Deosebit de neplăcut este faptul că deducerea fiecăreia din aceste formule necesită procedee particulare și nu dă vreo imagine asupra modului sum să rezolvăm problemele găsirii ariilor sau volumelor, cari nu se studiază în manualul de geometrie. Este însă suficient să facem cunoștință cu elementele de calcul integral, și vom constata că, de exemplu, volumele tuturor corpurilor de rotație se găsesc prin integrare printr'un procedeu uniform, simplu și cu totul natural. Dacă posedăm calculul integral, nu mai prezintă în principiu dificultăți nici un fel de alte probleme de determinare a ariilor sau volumelor; ele toate devin anume probleme, accesibile rezolvării prin metode determinate, în timp ce în limitele matematicii elementare fiecare din formulele date mai sus este o teoremă cu propriul său procedeu de demonstrație.

Procedeele elementare de rezolvare a problemelor de «maximum sau minimum» sunt o întreagă știință complicată și foarte ingenioasă. Toată această îngrămădire de procedee originale și delicate este, totuși, în imensa majoritate a cazurilor complect inutilă, dacă ne folosim de calculul diferențial. In aplicațiile de felul acesta ale matematicii superioare este și mai simplu să ne descurcăm, întrucât aici este necesar numai să cunoaștem noțiunea de *derivată*, expusă chiar la începutul calculului diferențial, să învățăm să calculăm derivatele funcțiilor cele mai simple și să ne însușim regulile de aplicare ale derivatelor la găsirea maximelor și minimelor.

Insăși noțiunea de derivată [1])

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

a funcției

$$y = f(x)$$

este în privința conținutului său intuitiv foarte simplă: dacă considerăm că variabila independentă x este *timpul*, atunci derivata $f'(x)$ este pur și simplu *viteza* de variație a variabilei dependente $y = f(x)$. Prin aceasta se explică rolul fundamental al noțiunii de derivată în studiul *proceselor* de variație a mărimilor în timp.

Dacă ne adresăm mecanicii, atunci o problemă atât de simplă ca deducerea legii găsite de Galilei a căderii corpurilor își găsește o soluție cu totul satisfăcătoare numai prin folosirea mijloacelor matematicii superioare. Deducerea binecunoscutei formule

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

pentru calea străbătută de un corp în timpul t în căderea liberă în vid (g fiind accelerația forței gravității), care se dă în manualele elementare de fizică, suferă de o oarecare complicație și artificialitate. Insă este suficient să ne însușim faptul că viteza este derivata spațiului parcurs în raport cu timpul

$$v = \frac{ds}{dt}$$

iar accelerația, este derivata în raport cu timpul a vitezei: $g = \frac{dv}{dt}$ și să facem cunoștință cu cele mai simple reguli de integrare, că totul se va reduce la un calcul foarte simplu:

$$v = \int g\, dt = gt$$

$$s = \int v\, dt = \int gt\, dt = \frac{1}{2} gt^2.$$

Intr'un mare număr de probleme mult mai complicate ale mecanicii și fizicii, legile fundamentale ale modului cum decurg fenomenele studiate pot fi de asemeni foarte simplu exprimate cu ajutorul ecuațiilor, ce leagă mărimile studiate de derivatele lor în raport cu timpul. Ecuațiile ce leagă funcțiile căutate de derivatele lor, se chiamă ecuații *diferențiale*.

---

[1]) Sfârșitul acestui paragraf este destinat cititorilor care au cel puțin primele noțiuni despre derivată.

Cu ajutorul ecuațiilor diferențiale se scriu relativ simplu legile mișcării corpurilor cerești sub acțiunea atracției universale, legile funcționării celor mai felurite scheme radiotehnice, legile de distribuție ale tensiunilor în diferite construcții mecanice, etc. Elaborarea metodelor de *rezolvare* ale acestor ecuații este una din problemele fundamentale, pe care științele naturii le pun matematicii.

A studia temeinic calculul diferențial și integral înainte de școala superioară este destul de greu. Este și mai greu de a intra ceva mai mult în teoria rezolvării ecuațiilor diferențiale. Totuși, acela, pe care matematica îl atrage și îl interesează tocmai prin această parte, poate să încerce să facă cunoștință cu noțiunile mai simple ale calculului diferențial și integral, paralel cu terminarea școlii medii. In orice caz aceasta a fost calea spre matematică a multora din savanții noștri, iar pentru unii din ei tocmai contactul cu matematica superioară a fost argumentul hotărîtor pentru ca să se oprească definitiv la matematică ca specialitate a lor. In acest scop ne putem adresa cărții lui *I. I. Privalov* și *S. A. Galpern*, sau putem citi direct vreunul din manualele relativ accesibile pentru institutele de învățământ superior.

Celor însă, cari nu se vor decide să facă acest efort, observațiile scurte de mai sus le vor ajuta să înțeleagă cu cât sunt mai largi și mai interesante decât ne putem imagina de dinainte, perspectivele cari li se vor deschide prin studierea mai departe a matematicii.

Matematica mecanizată contemporană

La desvoltarea pe care a atins-o în timpul de față *teoria* matematică, ea dă mijloace, suficiente în principiu, pentru rezolvarea celor mai felurite probleme. Incă din primul an al universității studenții fac cunoștință cu metodele de aflare cu orice precizie, dată în prealabil, a rădăcinilor ecuațiilor algebrice de grad oricât de înalt. In studiul teoriei ecuațiilor diferențiale se constată că există metode foarte generale de găsire a soluțiilor lor.

Totuși, la rezolvarea *practică* a acestor probleme cu scopul de a obține un *rezultat numeric* determinat, se constată că este încă cu totul insuficient de a poseda schema principală de rezolvare.

Calculele constructorilor de nave și calculele legate de construirea barajelor marilor stațiuni electrice iau luni și chiar ani de lucru ale birourilor de calcul speciale. Această situație a condus în mod natural la necesitatea de a perfecționa tehnica de calcul cu ajutorul mașinilor. In primul rând împreună cu mașina de calculat obișnuită au căpătat o largă răspândire « micile mașini de calculat » care efectuează cele patru operații aritmetice cu numere cu mai multe cifre, care se introduc prin apăsarea unor butoni, fără alt amestec al omului în afară de apăsarea unui buton cu denumirea operației necesare.

Inmulțirea a două numere de câte opt cifre ia la această mașină 40 de secunde.

Totuși, la folosirea acestor mașini, calculatorul este încă silit să scrie rezultatele fiecărei operații și apoi să le introducă din nou în mașină. In ultimii 15 ani s'a efectuat o mare muncă pentru crearea « mașinilor de calculat mari », cari fără amestecul omului efectuează lungi șiruri de operații aritmetice.

« Programul » de lucru al unei astfel de mașini poate fi dat prin perforarea unor găuri pe o bandă de hârtie. Mașina efectuează singură în ordinea astfel indicată operațiile aritmetice, fixează rezultatele intermediare, le folosește în calculele ulterioare și la sfârșit, dă rezultatul definitiv, perforat pe o bandă sau pe un cartonaș, sau chiar tipărit.

Perspective cu totul noi s'a deschis când s'a constatat că elementele mecanice de tipul rotițelor mașinii de calculat și fixarea rezultatelor intermediare prin perforarea găurilor pe cartonașe și bande pot fi înlocuite prin lucrul unor mașini de calculat mai complicate.

ANEXĂ

DIN PROBLEMELE PROPUSE LA UNELE OLIMPIADE MATEMATICE DIN U.R.S.S.

1. Să se descompună în factori: $x^5 + x + 1$.

Leningrad 1951, pt. cl. 8-a.

2. Să se descompună în factori: $a^{10} + a^5 + 1$.

Lvov, 1946, pentru cl. 9—10.

3. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$xy\,(x + y) = 30$$

$$x^3 + y^3 = 35.$$

Leningrad, 1951, pentru cl. 9-a.

4. Intr'un cub se află două tetraedre regulate astfel încât patru vârfuri ale cubului sunt vârfurile unuia din ele, iar celelalte patru vârfuri ale cubului, vârfurile celuilalt. Ce fracțiune din volumul cubului îl formează partea comună a acestor tetraedre?

Ivanovo 1951, pentru cl. 9—10.

5. Unei sfere îi este circumscris un patrulater strâmb. Să se demonstreze că punctele de tangență se află într'un plan.

Moscova 1950, pentru cl. 9—10-a.

6. Să se demonstreze că suma distanțelor dela un punct interior oarecare al unui tetraedru regulat până la fețele sale este o mărime constantă.

Stalingrad 1950, pentru cl. 10.

7. Să se demonstreze că dreptele care unesc mijlocul înălțimii unui tetraedru regulat cu vârfurile bazei, sunt perpendiculare între ele.

Kazan 1947, pentru cl. 9—10.

8. In 500 de lăzi sunt mere. Se știe că o ladă nu poate cuprinde mai mult de 240 de mere. Să se demonstreze că cel puțin 3 lăzi conțin același număr de mere.

Kiev 1950, pentru cl. 7—8.

9. Câte zeruri are numărul $50!=1.2.3.4...49.50$?

Lvov 1950 pentru cl. 7—8.

10. De câte ori în 24 ore, acele unui ceasornic sunt perpendiculare unul pe altul?

Kiev 1949, pentru cl. 7—8.

11. Care este cel mai mare număr de unghiuri ascuțite pe care îl poate avea un poligon convex, cu n laturi?

Kiev 1949, pentru cl. 9—10.

12. Să se demonstreze că un poligon convex cu 13 laturi nu poate fi tăiat în paralelograme.

Moscova 1947, pentru cl. 7—8.

13. Să se demonstreze că pentru orice a întreg numărul $a^7 - a$ se împarte cu 42.

Stalingrad 1950, pentru cl. 10.

14. Să se arate că numărul complex $a+ib$ ($i=\sqrt{-1}$, a și b reali), al cărui modul este egal cu unitatea, iar $b \neq 0$ poate fi pus sub forma:

$$a + ib = \frac{c+i}{c-i}$$

unde c este un număr real.

METODA POLAROGRAFICĂ, O NOUĂ METODĂ FIZICĂ DE ANALIZĂ A MATERIALELOR

Conf. Univ. *V. Pavlu*

In măsura în care crește producția, cresc și problemele pe care ea le pune. Printre acestea se află și necesitatea de a se analiza compoziția materiilor prime, a materialelor finite, a probelor de control din decursul fabricației și în general efectuarea analizelor legate de studiile ce se fac în scopul găsirii a noi mijloace pentru îmbunătățirea procesului de fabricație. Numărul mare de analize chimice legate de procesul de fabricație, analize ce au loc adeseori în serie, au făcut să se impue din ce în ce mai mult metodele fizice ce s'au dovedit mai expeditive. Dintre toate aceste metode, metoda polarografică le depășește pe toate,. Am putea spune că ea reprezintă în acest domeniu un salt revoluționar.

Metoda polarografică are o seamă de calități: rapiditatea, caracterul automat înlăturând orice subiectivism, înregistrarea rezultatelor sub formă de diagramă și o sensibilitate foarte mare.

In ce constă această metodă?

Principiul ei este foarte simplu: Se aduce corpul de cercetat în stare de soluție — electrolit — și se supune cu ajutorul a doi electrozi de mercur (din care unul picurător, de obiceiu catodul, pentru a

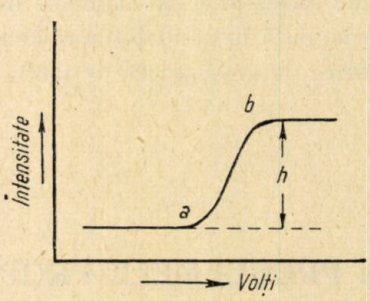


Fig. 1

fi mereu cu suprafața pură) la o diferență de potențial ce crește în mod regulat, până ce forța contra electromotoare de polarizare este depășită (fig. 1), când intensitatea curentului crește dela o valoare minimă a (când începe electroliza), până la o

valoare maximă b, obținându-se ceeace se numește o « treaptă polarografică » a substanței al cărui *ion* se depune. Forța electromotoare corespunzătoare acestei trepte depinde de natura chimică a ionului, în timp ce înălțimea ei, adică distanța măsurată pe verticală între cele două platforme, depinde de concentrația ionului respectiv, adică ne dă indicații cantitative. Se folosește un catod picurător, pentrucă prin electroliză natura chimică a catodului se modifică la suprafață, în consecință se modifică și intensitatea curentului pentru aceiași forță electromotoare. Catodul primenindu-se mereu prin picurare se lucrează mereu în aceleași condițiuni și intensitatea curentului în funcție de forța electromotoare depinde numai de natura chimică a substanței ce se depune și de concentrația ei.

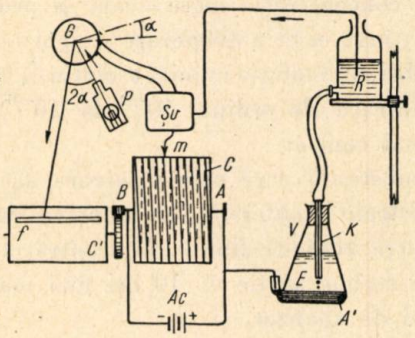


Fig. 2

Aparatura folosită, redusă la cea mai simplă expresie (fig. 2) se compune dintr'un circuit alcătuit din:

a) Un vas de electroliză V, având fundul mai lat, în care se află un strat de mercur A' drept anod, făcând legătura printr'un contact metalic cu polul pozitiv al sursei de curent, apoi electrolitul ce conține substanța de analizat și un catod K alcătuit dintr'un tub capilar scufundat în electrolit prin care vine și picură mercurul pur la circa 3 sec. Mercurul din tubul capilar comunică cu un rezervor R cu mercur, pus în legătură printr'un contact metalic cu restul circuitului. Prin ridicarea sau scoborîrea ușoară a acestui vas se poate face ca viteza de picurare a mercurului prin capilarul K să fie mereu aceiași (3 sec.) în timpul funcționării;

b) Un galvanometru foarte sensibil G cu cadru și oglindă mobilă. Sensibilitatea galvanometrului se poate regla cu ajutorul șuntului *Șu*. Pe oglinda acestui galvanometru se trimite o rază de lumină cu ajutorul unui proiector P, rază ce urmează să înregistreze creșterea de curent pe o hârtie fotografică, așa cum vom vedea mai departe;

c) Un cilindru izolator rotativ C (toba *Kolrausch*) pe care este înfășurată în chip de elice o rezistență supusă la extremitățile ei A și B la o diferență de potențial de 2 V respectiv 4V cu ajutorul acumulatorului Ac. Capătul A al acestei rezistențe este pus în legătură cu electrodul pozitiv al acumulatorului și cu anodul A' al vasului de analiză. Un contact mobil m, pus în legătură cu un pol al galvanometrului, alunecă pe rezistență, în timp ce cilindrul cu rezistența se învârtește cu ajutorul unui motoraș electric. Contactul mobil m transmite prin galvanometru catodului picurător din vasul de analiză un potențial negativ ce variază în timpul rotației cilindrului cu rezistența dela 0 la 2V respectiv 4V în timp ce el alunecă dela capătul A la capătul B al rezistenței;

d) Un cilindru rotativ C' pe care este înfășurată o hârtie grafică, pus în legătură printr'un angrenaj cu toba Kolrausch astfel ca în intervalul de timp în care aceasta din urmă face atâtea ture câte spire sunt pe el și contactul mobil m se deplasează din A și B, cilindrul C' să execute o singură rotație. Cilindrul C' este așezat într'un cilindru casetă, prevăzută cu o fereastră longitudinală f, în dreptul căreia vine raza reflectată de oglinda galvanometrului. In timp ce contactul mobil se deplasează pe rezistență, făcând ca potențialul catodului să scadă cu 2V respectiv 4V, galvanometrul cu oglindă face să se deplaseze raza reflectată dealungul ferestrei f a cilindrului cu hârtie fotografică, așa că pe hârtia fotografică se înregistrează curba reprezentativă a intensității curentului în funcție

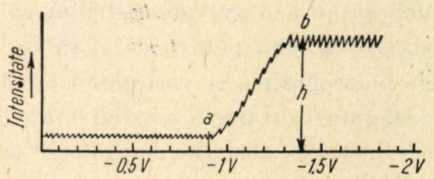


Fig. 3

de potențialul catodului. La intervale regulate de timp, corespunzând la variații de potențial de 0,1 respectiv 0,2 volți, deci de 20 de ori în timpul unei rotații complecte a cilindrului cu hârtia fotografică, se aprinde un bec electric în dreptul ferestruicii longitudinale f și se înregistrează pe hârtia fotografică așa numitele abscise. Cilindrul casetă, conținând hârtia fotografică impresionată se detașează și se developează hârtia fotografică în camera obscură, obținându-se negativul ce se folosește direct numit polarogramă. O treaptă polarografică (fig. 3), adică reprezentarea grafică a creșterii intensității curentului (ordinul de mărime 10^{-9} A) în funcție de diferența de potențial în legătură cu depunerea unui *ion* este alcătuită dintr'o platformă orizontală ce se sfârșește în punctul a,

în cazul din figură la −0,9 V, o porțiune ascendentă din *a* până în *b*, în cazul din figură dela −0,9 V până la −1,4 V și o platformă verticală ce începe în punctul *b*. Distanța măsurată pe verticală (în cazul când platformele sunt orizontale) dintre platforme se numește înălțimea treptei. Potențialul mijlociu al treptei (în cazul nostru −1,15 V) ne dă indicații asupra naturei chimice a cationului depus (analiză calitativă), în timp ce înălțimea treptei ne dă indicații asupra concentrației substanței (analiză calitativă).

Galvanometrul fiind partea cea mai delicată a aparaturei folosite, să ne oprim puțin asupra lui. Galvanometrul folosit este cu cadru mobil și câmp fix, galvanometrele din această categorie putând fi foarte sensibile. Concentrația soluției de analizat fiind de ordinul de mărime 10^{-6} și suprafața picăturei fiind foarte mică, sensibilitatea galvanometrului este necesar să fie de ordinul 10^{-9} A). Intensitatea curentului mai depinde și de suprafața catodului picurător. La început suprafața este cât lumina interioară a tubului capilar (cca 0,25 mm²); pe măsură ce picătura crește, crește mult și această suprafață și în consecință intensitatea curentului. Dacă perioada proprie de oscilație a bobinei galvanometrului ar fi apropiată de intervalul de timp dintre două picături, galvanometrul ar urma aceste oscilațiuni de curent obținându-se o curbă confuză, inexpresivă, căci peste treptele polarografice s'ar adăuga aceste oscilațiuni de mare amplitudine. Pentru aceasta este necesar ca perioada proprie a galvanometrului să fie cât mai mare, cca 10 sec., pentru ca el să fie sensibil la treptele polarografice ce corespund fenomenelor chimice de depunere și puțin sensibil la oscilațiunile de curent datorită variației suprafeței catodului picurător. Un galvanometru perfect pentru polarografie ar mai trebui să fie și aperiodic, așa cum este acul indicator al unui instrument de măsură de calitate, adică bobina și oglinda galvanometrului să nu oscileze când se realizează brusc un anumit curent. Fiecare din aceste trei condițiuni se poate realiza mai ușor în parte. Indeplinirea simultană a acestor trei condițiuni este însă ceva mai grea. Se construesc totuși galvanometre cu sensibilitate de cca 10^{-9} A ce îndeplinesc și celelalte două condițiuni în măsură suficientă pentru a putea fi utilizate în polarografie. Ele reprezintă partea cea mai delicată a unui polarograf.

Nu întotdeauna se lucrează cu concentrații atât de mici (de ordinul de mărime 10^{-6}). Pentru concentrații mai mari rezultă și variații mai mari de intensitate de curent, așa că s'ar obține o curbă ce nu s'ar putea încadra bine în polarogramă. Pentru aceasta, galvanometrul este șuntat printr'o rezistență variabilă, care după cum se știe, dacă are valoarea 1/9,1/99, etc. din rezistența galvanometrului, face ca sensibilitatea galvanometrului să fie 1/10,1/100, etc. din sensibilitatea maximă. De obiceiu acest șunt poate reduce sensibilitatea galvanometrului până în raportul 1/50, adică pentru aceiași variație de intensitate a curentului, spotul luminos să se deplaseze de 50 ori mai puțin.

Pregătirea soluției pentru determinările polarografice se face începând cu cântărirea unei probe cu ajutorul balanței analitice, sau prin măsurarea volumului dacă proba este lichidată. Urmează apoi aducerea în soluție ca la orice analiză gravimetrică începând cu disolvarea în apă și sfârșind cu fuziunea alcalină dacă este necesar. Dacă în urma disolvărei rezultă o concenetrație mare acidă se procedează la îndepărtarea ei prin evaporare și apoi se disolvă din nou, obținând soluția numită «soluția de analizat» (în concentrație de ordinul 10^{-2} la 10^{-6}) ce trebue să mai conție:

a) O substanță care prin disolvare dă naștere la un electrolit indiferent, ce menține rezistența soluției între anumite limite. Concentrația acestei substanțe trebue să fie de 10 ori mai mare ca a substanței de analizat, și

b) O substanță în concentrație foarte mică (spre exemplu gelatină) al cărei efect este de a suprima maximele ce apar pe curba curent-tensiune.

Aceste substanțe nu trebue să intre în reacțiune cu substanța de analizat și să aibă efect suprimat al maximelor în dreptul treptei polarografice ce ne interesează și să nu dea trepte polarografice în domeniul de tensiune ce ne interesează căci ele s'ar suprapune peste treptele urmărite și polarograma ar fi confuză.

Uneori rolul acestor substanțe auxiliare se extinde în sensul că ele contractează cu substanțele de analizat combinații complexe ce se pretează mai bine la determinări polarografice sau, dacă în soluția de analizat există substanțe streine cu proprietăți polarografice, reacționează cu ele dând combinații ce nu au proprietății polarografice, astfel că analiza nu mai este incomodată. Toate aceste substanțe auxiliare în concentrații corespunzătoare alcătuesc o soluție numită « soluție de bază », în care se adaugă la analiză substanța de analizat în concentrație cunoscută.

Rezultatele obținute sub formă de polarogramă pot fi interpretate calitativ și cantitativ în ceeace privește prezența ionilor ce au dat trepte polarografice.

Pentru interpretarea calitativă, care poate fi considerată absolută, sunt necesare, pe lângă polaro-

gramă, tabele ce dau înălțimea treptelor polarografice pentru diferiți ioni.

Interpretarea cantitativă este însă relativă fiind comparabilă cu dozările colorimetrice. Pentru interpretarea cantitativă se polarografiază în aceleași condițiuni o soluție ce conține substanța de analizat în concentrație cunoscută și apropiată și se compară înălțimea treptei polarografice cu aceia a probei de analizat.

Potențialul de depunere al substanței de analizat, necesar interpretării calitative (fig. 4) se determină

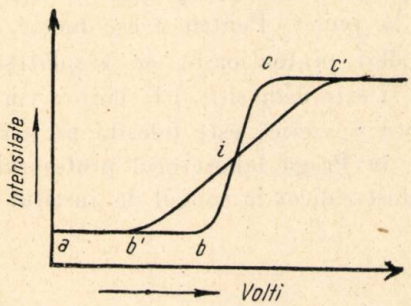


Fig. 4

în funcție de începutul și sfârșitul creșterii curentului. Să presupunem că avem o treaptă polarografică a cărei platformă inferioară se sfârșește în *b* și a cărei platformă superioară începe în *c*. Să presupunem că punctul *a* corespunde potențialului O. Punctul *b* ne va da potențialul la care începe să se depună cationul urmărit, însă potențialul acestui punct variază invers proporțional cu concentrația. Potențialul punctului c crește proporțional cu concentrația. Așa, spre ex., pentru o concentrație mai mare a substanței corespunză-

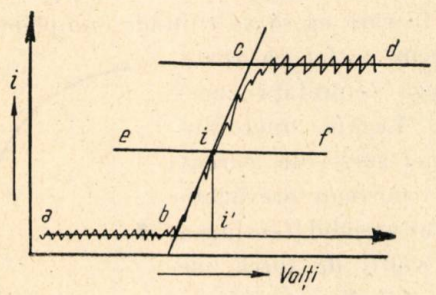


Fig. 5

toare treptei polarografice treapta ia forma *b'ic'*. Singur punctul *i* rămâne invariabil. Acesta este punctul invariabil corespunzător jumătății de treaptă, care este caracteristic corpului ce a produs polarizarea și care se găsește trecut în tabele.

Pentru a se determina potențialul punctului de inflexiune al treptei (potențialul jumătății de treaptă), reprezentăm curba ideală (fig. 5), pe care ar înregistra-o polarimetrul dacă nu s'ar produce oscilațiuni de curent datorită picurării, sau dacă polarimetrul prin perioada sa proprie foarte mare nu ar înregistra aceste oscilațiuni care sunt mai mari în partea superioară a treptei.

Dacă cele două platforme *ob* și *oc* ale treptei sunt paralele, potențialul punctului de inflexiune *i* se determină trasând linia de simetrie ale celor două platforme și a porțiunei ascendente (fig. 5) și paralele cu ele și la mijlocul lor o linie *ef*. Potențialul caracteristic al jumătății de treaptă (πl/2) este potențialul punctului de intersecție *i* cu linia de simetrie descendentă a treptei, adică *ai'*.

Dacă cele două platforme ale treptei nu sunt paralele (fig. 6) se trasează liniile de simetrie *ab*, *bc* și *cd* ale celor trei porțiuni ale treptei, se iau potențialele punctelor de intersecție (*ab'* și *ac'*) și se ia drept potențial al jumătății de treaptă potențialul *ai'* adică semisuma potențialelor de intersecție ale liniilor de simetrie ale treptei.

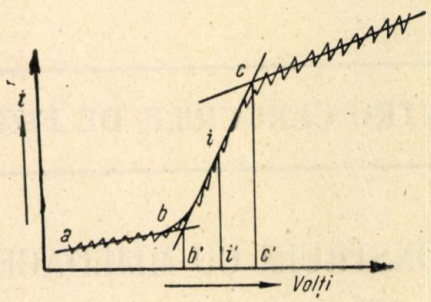


Fig. 6

Erorile ce se fac în determinările acestor potențiale sunt destul de mici în raport cu intervalele dintre potențiale din tabele corespunzătoare depunerii diferitor cationi, așa că nu sunt posibile confuzii.

Interpretarea cantitativă se bazează, așa cum s'a arătat, pe compararea înălțimei treptei polarografice provocată de substanța de analizat cu înălțimea treptei provocate de aceiași substanță în concentrație cunoscută și apropiată, deoarece înălțimea treptei depinde numai de concentrație, dacă temperatura, timpul de picurare, capilarul și compoziția soluției auxiliare sunt aceleași.

Pentru determinarea cantitativă trebue să se măsoare înălțimea treptei, adică distanța verticală între punctele de intersecție ale celor trei linii de simetrie *ob*, *bc*, și *cd*, apoi să se raporteze la înălțimea corespunzătoare aceleiași substanțe din polarograma etalon. Deoarece eroarea relativă făcută la măsurătoarea înălțimei este cu atât mai mică cu cât treapta este mai înaltă, se recomandă să se lucreze cu o sensibilitate mai mare a galvanometrului, treptele mai puțin înalte de 20 mm nefiind admisibile. Avem două metode:

a) Să presupunem că dispunem de o soluţie etalon ce conţine substanţa de analizat în concentraţie cunoscută C. Pentru a obţine polarograma etalon corespunzătoare concentraţiei C, facem un amestec într'o anumită proporţie din soluţia etalon şi soluţia de bază. Se polarografiază şi se găseşte pentru substanţa ce determină treapta înălţimea de treaptă b. Se face apoi un amestec în aceiaşi proporţie între soluţia de analizat şi soluţia de bază şi se găseşte înălţimea de treaptă a. Concentraţia x a soluţiei de analizat va fi:

$$x = \frac{a}{b} C \text{ (metoda comparaţiei);}$$

b) Se înscrie în prealabil cu ajutorul a V cm³ soluţie o polarogramă obţinându-se o treaptă de înălţime h (cca 4—6 cm). Se adaugă A cm³ din soluţia de analizat astfel ca să se obţie o treaptă de înălţime h' cm. Dacă concentraţia soluţiei etalon este c, concentraţia soluţiei de analizat va fi:

$$x = \frac{hc}{h' - (h' - h)} \cdot \frac{V}{A} \text{ (metoda adausului)}$$

Iată, în linii generale, în ce constă această metodă de analiză calitativă şi cantitativă ce înregistrează automat rezultatul analizei sub formă de diagramă uşor de interpretat. Aparatura bine pusă la punct şi manevrată cu pricepere dă rezultate admirabile. Ea necesită însă multă îndemânare, mai ales atunci când se produce un deranjament şi trebue pusă din nou la punct. Pentru acest motiv, această metodă, deşi pretenţioasă, ne răsplăteşte orice osteneală şi este urmărită şi la noi cu viu interes. In Uniunea Sovietică este folosită pe o scară întinsă, iar în Praga laboratorul profesorului *Heirowski* a fost ridicat la rangul de institut polarografic.

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUCŢIA ROŢII BARLOW

Dintr'o placă de aluminiu sau cupru tăiem un disc cu diametrul de 10—15 cm şi grosimea cât mai mică posibilă. Pentru a micşora greutatea lui îl transformăm într'o roată cu câteva spiţe aşa cum se vede în fig. 1.

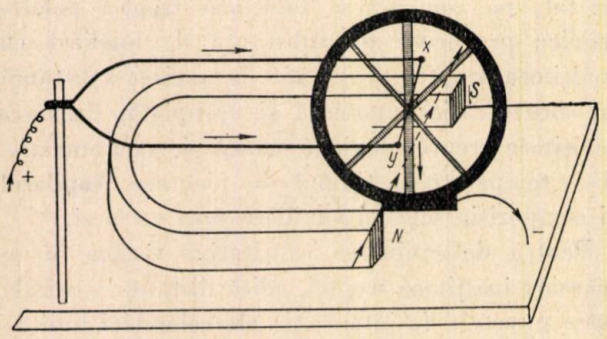


Fig. 1

Dacă nu transformăm discul în roată cu spiţe, i se taie zimţi (fig. 2), pentru a se pune în evidenţă rotaţia.

Sprijinim această roată într'o furcă confecţionată din sârmă de cupru, furcă pe care la rândul ei o fixăm orizontal deasupra unei plăci de lemn prin intermediul unui suport vertical fixat în placa de lemn.

In placa de lemn şi sub roată săpăm o mică cuvetă în care ea să se cufunde; umplem cuveta cu mercur astfel ca roata să atingă suprafaţa mercurului. Legăm unul din polii unei surse de curent electric continuu prevăzută cu reostat variabil (tensiunea 10—12 volţi) de furcă, iar celălalt pol îl introducem în cuveta cu mercur.

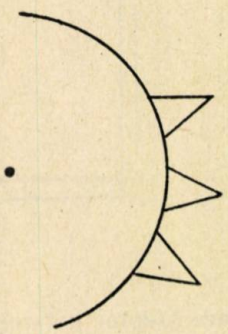


Fig. 2

Punem pe planşeta de lemn un magnet potcoavă astfel ca cuveta cu mercur şi jumătatea inferioară a roţii să se situeze între ramurile N—S ale magnetului şi imediat roata intră în mişcare de rotaţie ca rezultat al acţiunei dintre câmpul magnetic fix şi curentul electric mobil, care scoborând printr'o spiţă este perpendicular pe liniile de forţă magnetică ale magnetului potcoavă. Experienţa reuşeşte neapărat dacă facem

ca roata să fie cât mai ușoară, iar frecarea ei pe axul xy să fie cât mai mică.

Acțiunea reciprocă între curenți electrici paraleli și acelaș sens

Din sârmă de cupru cu diametrul mai mic ca 0,5 mm alcătuim o spirală cu 20—25 spire (înfășurăm sârma pe un baston de lemn sau sticlă cu diametrul de 1—2—3 cm).

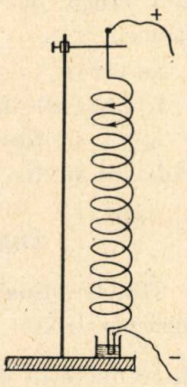


Fig. 3

Suspendăm spirala într'un stativ așa cum se vede în figură, capătul de jos al spiralei să atingă mercurul dintr'o cuvetă. Lansând curentul în spirală, realizăm o serie de curenți circulari paraleli și de acelaș sens. Datorită câmpurile magnetice de sens opus generate între două spire, spirala se scurtează contractându-se; extremitatea liberă de jos scapă din mercur și astfel curentul se întrerupe. Ulterior — datorită greutății ei — spirala se lungește ajungând din nou în contact cu mercurul. Curentul se restabilește, iar rezultatul este că spirala execută alungiri și contractări armonice (oscilează) continui.

Reușita experienței este condiționată de buna elasticitate a spiralei.

In cazul când nu putem realiza condițiile de mai sus, introducem în interiorul spiralei o vergea de fer moale și experiența în acest caz reușește sigur întrucât prin introducerea ferului moale se mărește inducția.

Prof. Nicolae Rădulescu
Liceul «N. Bălcescu» București

CHESTIUNI DE CONCURS*)

PROBLEMELE DE MATEMATICI DATE LA ETAPA I-a LA 26 APRILIE 1953 ÎN REGIUNEA BUCUREȘTI

Clasa VIII-a

863. Se dă un triunghiu ABC și un punct O. Se notează cu D, E, F, mijloacele laturilor BC, CA, AB, apoi cu O_1, O_2, O_3 simetricele punctului O față de punctele D, E, F.

1. Să se demonstreze că triunghiul $O_1O_2O_3$ este egal cu triunghiul ABC.

2. In cazul particular când O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, ce rol joacă el în triunghiul $O_1O_2O_3$.

3. Să se demonstreze că dreptele AO_1, BO_2, CO_3 sunt concurente.

864. Se dă un pătrat $ABCD$ cu latura a. Pe prelungirea bazei AB dincolo de B, se ia un segment BM, iar pe latura BC, între C și B, se ia un punct N, unde $CN = BM$. Prin M și N se duce câte o paralelă la laturile patratului, formându-se un dreptunghi $AMPQ$. Să se determine segmentul $BN = x$ astfel ca raporul dintre aria trapezului $PQCD$ și aria dreptunghiului $ANPQ$ să aibă o valoare dată k.

Ce valori poate lua k pentru ca problema să fie posibilă?

Clasa IX-a

865. O șalupă merge dintr'un punct A situat pe malul unui râu până într'un punct B situat pe malul unui lac în care se varsă râul, făcând a km pe râu și alți a km pe lac. Tot drumul durează t ore, iar viteza cu care curge apa din râu este v km/oră. Se cere viteza proprie a șalupei.

Ecuația problemei are două rădăcini; de ce semn sunt ele? Care din ele este cea acceptabilă, sau sunt amândouă acceptabile? Este problema posibilă oricare ar fi a, v și t?

Aceeaș problemă când șalupa merge invers dela B la A.

Indicație: Cum trebue să fie x în comparație cu v?

866. 1) Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu catetele $AC = b$, $AB = c$ și ipotenuza $BC = a$. Să se determine pe ipotenuză un punct M egal depărtat de vârful B și de cateta AC. Determinarea se va face atât prin calcul cât și geometric.

2. Ce poziție are punctul M față de mijlocul D al ipotenuzei? Poate să coincidă M cu D? Rezultatul se va stabili prin calcul și geometric.

3. Ce relație trebue să existe între a și c pentru ca M să coincidă cu piciorul înălțimii? Să se determine în acest caz cos B.

4. Să se construiască un triunghi care să îndeplinească condiția dela punctul precedent.

Clasa X-a

867. Dacă aria sferei înscrise într'un con circular drept este media aritmetică între aria bazei și aria laterală a conului, să se găsească unghiul format de generatoare cu planul bazei.

*) La chestiunile 863—876 se primesc soluții fiind socotite ca probleme propuse.

868. Se dă un tetraedru regulat $VABC$ (toate feţele lui sunt triunghiuri echilaterale) cu latura a. Planul determinat de munchia AB şi mijlocul M al înălţimii VG taie muchia VC în P. Se cer laturile triunghiului ABP.

Clasa XI-a

869. Intr'un triunghiu oarecare, notăm unghiurile cu A, B, C, laturile cu a, b, c, aria cu S, $a+b+c=2p$, raza cercului înscris cu r, iar raza cercului circumscris cu R.

1. Să se demonstreze relaţiile

$$S = r\,p, \quad r = (p-a)\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

şi că unghiul format de bisectoarele unghiurilor B şi C este $90^\circ + \frac{A}{2}$.

2) Să se construiască un triunghi cunoscând: R, r, a. Discuţie.

3) Să se rezolve triunghiul cunoscând: R, r, $a = R\sqrt{3}$. Să se calculeze laturile b şi c. Intre ce limite poate varia raportul $\frac{r}{R}$ ca triunghiul să existe. Să se compare acest rezultat cu rezultatul discuţiei dela punctul 2.

870. O sferă de centru O este tăiată de două plane paralele P şi Q situate la distanţa d unul faţă de altul. Să se găsească distanţa dela centrul sferei la planul P aşa fel încât aria zonei sferice determinată de cele două plane să fie egală cu suma ariilor secţiunilor plane.

Intre ce limite poate varia distanţa d?

Anul I Şcoli Pedagogice

871. S'a amestecat vin de 3 calităţi. S'au luat şi 13 litri de calitatea I-a, 10 litri de calitatea II-a şi 12 litri de calitatea III-a. Tot amestecul a costat 494 lei. Preţul unui litru de vin de calitatea I-a e mai mare decât al unui litru de calitatea II-a cu 4 lei şi mai mare decât al unui litru de calitatea III-a cu 8 lei.

Cât a costat un litru de vin din fiecare calitate.

872. Se dă un triunghiu dreptunghic ABC (unghiul drept în A). Proiecţia catetei AB pe ipotenuză este de 4 m iar proiecţia catetei AC este cu 3 m mai lungă decât înălţimea corepunzătoare ipotenuzei.

Se cere:

1. Să se afle înălţimea corepunzătoare ipotenuzei.
2. Să se formeze ecuaţia de gr. II ale cărei rădăcini să fie egale cu măsurile celor 2 catete.

Anul II Şcoli Pedagogice

873. Grădina de zarzavat a unei gospodării agricole de stat e împărţită în două loturi a căror diferenţă este de 77 ari. Se ştie că $\frac{5}{7}$ din primul lot sunt egale cu $\frac{8}{9}$ din lotul al doilea. Să se afle ce suprafaţă are fiecare lot.

874. Din grinzi cu secţiunea un dreptunghiu cu dimensiunile de 30 cm şi 20 cm şi lungimea de 3 m, se face o plută pătrată folosind cel mai mic număr de grinzi. Aceată plută transportă lucrători de pe un mal pe altul al unui lac.

Densitatea lemnului este 0,6, iar un lucrător cântăreşte în medie 72 kg. Câţi lucrători poate transporta pluta într'o cursă?

La dus pluta face 6 minute şi la întors 4 minute. Câte curse face pluta pentru a transporta 147 lucrători şi în cât timp îi va transporta? Cu cât se scufundă pluta în apă la ultimul transport?

Anul III Şcoli Pedagogice

875. Unui triunghiu dreptunghic OAB având $\widehat{O} = 30^\circ$ şi ipotenuza $OB = 10$ cm i se prelungeşte ipotenuza cu un segment BB' egal cu AB.

Să se afle aria şi volumul corpului ce se naşte prin rotaţia triunghiului ABB' în jurul axei OA.

876. O sumă de bani este împărţită ca premiu la trei elevi proporţional cu numerele 4; 5 şi 8. Cu suma primită, primul elev s'a dus la o librărie ca să-şi cumpere două cărţi, prima costă 65%; iar cea de-a doua 57,5% din totalul banilor pe care-i are şi de aceea nu-i ajung pentru compărarea cărţilor 4,50 lei. Cât costă admândouă cărţile la un loc? Cât costă fiecare carte? Ce sumă a primit fiecare elev?

PROBLEME REZOLVATE

Problema 606

Să se determine forma generală a unor numere întregi pozitive care verifică ecuația

$$x + y = (x - y)^2$$

Erdniev (Altai)

Soluție. Ecuația se poate scrie

$$\frac{x+y}{x-y} = x - y,$$

sau

$$\frac{2y}{x-y} = x - y - 1$$

x și y fiind întregi va trebui să avem

$$\frac{2y}{x-y} = m \text{ (întreg)},$$

de unde

$$y = \frac{mx}{m+2}.$$

Inlocuind în ecuația din enunț găsim

$$x = \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

apoi

$$y = \frac{m(m+1)}{2}$$

unde m este un număr întreg.

Problema 622

Intr'o sferă de rază R înscriem un cilindru de suprafață laterală maximă, iar într'o altă sferă de rază R_1, înscriem un con de volum maxim. Să se calculeze raportul R/R_1 știind că suprafețele laterale ale celor două corpuri înscrise în sfere sunt egale, deasemenea dacă volumele lor sunt echivalente.

Alex. Tihan

Soluție. Inălțimea cilindrului înscris în prima sferă fiind $2h$, suprafața sa laterală va fi

$$S = 2\pi\sqrt{R^2 - h^2} \cdot 2h = 4\pi\sqrt{h^2(R^2 - h^2)}.$$

Se observă ușor că S este maxim când $h^2 = R^2 - h^2$, de unde $h = \frac{\sqrt{2}}{2}R$; deci

$$S_{\max} = 2\pi R^2$$

iar volumul cilindrului de arie laterală maximă, este

$$V = \frac{\sqrt{2}\pi R^3}{2}.$$

Fie h înălțimea conului înscris în cea de a doua sferă. Raza bazei sale va fi $r = \sqrt{h(2R_1 - h)}$, deci volumul său va fi:

$$V = \frac{\pi h^2 (2R_1 - h)}{3}$$

V va fi maxim când $\frac{h}{2} = 2R_1 - h$, de unde $h = \frac{4}{3}R_1$, deci

$$V_{\max} = \frac{32\pi R_1^3}{81}$$

iar suprafața laterală a conului de volum maxim este

$$S = \frac{8\sqrt{3}\pi}{9}R_1^2$$

Când suprafețele laterale ale celor două corpuri sunt egale, atunci

$$\frac{R}{R_1} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{3} = 0{,}87738.$$

Când volumele lor sunt echivalente

$$\frac{R}{R_1} = \frac{2\sqrt[6]{18^5}}{27} = 0{,}8236.$$

Problema 624

Numerele a, b *și* c *satisfac condițiile*:

$$1 \leqslant a \leqslant b + c < a + 1 \text{ și } b \leqslant c.$$

Să se demonstreze că $a - b > 0$.

N. Cernov

Soluție. Adunând inegalitățile $b + c < a + 1$ și $b \leqslant c$, găsim $2b < a + 1$.

Adunând ultimei inegalități, inegalitatea $1 \leqslant a$, vom obține inegalitatea cerută: $a - b > 0$.

Problema 625

Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{1-x} - \operatorname{arctg}\frac{4}{2+x} = \operatorname{arctg} 3.$$

L. Reizinș

Soluție. Primul membru al ecuației se poate scrie

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{1-x} - \operatorname{arctg}\frac{4}{2+x} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{1-x} - \frac{4}{2+x}}{1 + \frac{8}{(1-x)(2+x)}}.$$

Avem deci de rezolvat ecuația

$$\frac{\frac{2}{1-x}-\frac{4}{2+x}}{1+\frac{8}{(1-x)(2+x)}}=3,$$

sau

$x^2+3x-10=0$, de unde $x_1=2$, $x_2=-5$.

Problema 629

Frecvența oscilațiilor unui camerton este $f=100$ *Hz. Ce frecvență percepe urechea unui observator dacă*:

a) *Camertonul se îndepărtează cu viteza sunetului.* b) *Camertonul se apropie cu viteza sunetului.* c) *Observatorul se apropie cu viteza sunetului de camerton.* d) *Observatorul se depărtează de camerton cu viteza sunetului.*

Soluție. *a)* In acest caz frecvența percepută de observator este $f_1=f\frac{V}{V+u}$ (vezi *R.M.F.*1. III) unde V și u sunt respectiv viteza sunetului și a camertonului. Deci $f_1=\frac{1}{2}f=50$ Hz, adică observatorul percepe octava inferioară a sunetului real.

b) In acest caz frecvența percepută de observator este $f_1=f\frac{V}{V-u}$, adică $f_1=\infty$.

c) In acest caz frecvența percepută de observator este $f_1=f\frac{V+v}{V}$, unde v este viteza observatorului. Prin urmare: $f_1=200$ Hz, adică observatorul percepe octava superioară a sunetului real.

d) In acest caz $f_1=f\frac{V-v}{V}$, deci $f_1=0$, lucru care se explică ușor întrucât observatorul nu aude sunetul camertonului.

Problema 632

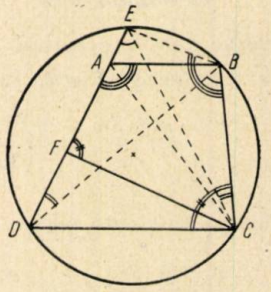
Fie trapezul cu laturile paralele AB *și* CD. *Fie* E *și* F *intersecțiile laturii* AD *cu cercul* BCD *și cu paralela din* C *la* BE. *Să se arate că* BC *este medie geometrică între* AD *și* EF.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Se observă ușor că $\sphericalangle BDE=\sphericalangle ECB$ și $\sphericalangle EBC=\sphericalangle DAB=180^\circ-\widehat{D}$.

Prin urmare triunghiul BAD este asemenea cu triunghiul EBC. Analog se arată că triunghiul BCD este asemenea triunghiului FEC.

Trapezele $ABCD$ și $EBCF$ descompunându-se în triunghiuri asemenea și asemenea așezate, sunt



asemenea. Putem deci scrie

$$\frac{BC}{FE}=\frac{AD}{BC},\quad \text{sau}\quad \overline{BC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{FE}.$$

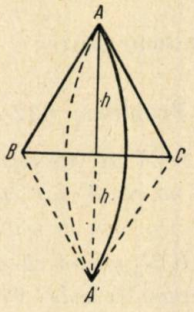
Problema 633

Se rotește triunghiul echilateral ABC *în jurul laturii* BC. *Să se arate că volumul* V *al solidului obținut este a șasea parte din produsul ariei laterale a aceluiași solid prin înălțimea* h *a triunghiului* ABC.

N. N. Mihăileanu

Soluție. Fie $AB=l$. Corpul obținut se compune din două conuri egale cu baza comună, deci

$$V=2\frac{\pi h^2\cdot\frac{1}{2}l}{3}=\frac{\pi h^2 l}{3}.$$



Relația care dă pe V se mai poate scrie

$$V=\frac{2\pi hl\cdot h}{6}$$

lucru care ne arată exactitatea enunțului întrucât $2\pi hl$ este suprafața laterală a solidului.

Problema 634

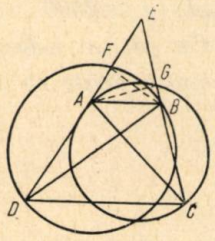
Să se arate că prelungirea coardei comune a cercurilor descrise pe diagonalele unui trapez, ca diametru, trece prin punctul de intersecție al laturilor neparalele.

Petre Stanciu

Soluție. Fie E intersecția laturilor neparalele AD și BC ale trapezului $ABCD$; fie F și G respectiv

punctele în care cercurile descrise pe BD și AC ca diametre retaie AD și BC.

Se observă ușor că BF și AG sunt înălțimi în triunghiul EAB; prin urmare FG este antipara-



lelă față de AB în raport cu unghiul DEC. AB fiind paralel cu CD, FG este antiparalelă și față de CD. Prin urmare:

$$\overline{EF} \cdot \overline{ED} = \overline{EG} \cdot \overline{EC}.$$

Punctul E având puteri egale față de ambele cercuri se află pe axul lor radical, în cazul nostru pe coarda lor comună, cercurile fiind secante.

Problema 635

Să se rezolve ecuația

$$6 \sin^3 x - 5 \sin x + 2 \cos^3 x = 0.$$

Ion Zarda
prof. Câmpina

Soluție. Deoarece $x = 0$ nu este o soluție a ecuației, putem împărți ambii membri cu $\sin^3 x$ și obținem

$$6 - 5 \operatorname{cosec}^2 x + 2 \operatorname{ctg}^3 x = 0.$$

Inlocuind $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, găsim ecuația algebrică în $\operatorname{ctg} x$:

$$2 \operatorname{ctg}^3 x - 5 \operatorname{ctg}^2 x + 1 = 0$$

cu rădăcinile

$$\operatorname{ctg} x_1 = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{ctg} x_2 = 1 + \sqrt{2} \text{ și } \operatorname{ctg} x_3 = 1 - \sqrt{2},$$

de unde:

$$x_1 = K \cdot 180° + 63°26'5'',6$$
$$x_2 = K \cdot 180° + 22°30'6'',6$$
$$x_3 = K \cdot 180° + 112°29'58'',3$$

Problema 639

Dacă

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{e^2 - d^2}, \quad b^2 = \frac{f^2 d^2}{f^2 - d^2}, \quad c^2 = \frac{e^2 f^2}{e^2 - f^2}$$

avem relația

$$a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = b^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) = c^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 1.$$

Sălan Nicolae

Soluție. Eliminând pe f între ultimele două ecuații de condiție, găsim

$$\frac{b^2 d^2}{b^2 - d^2} = \frac{e^2 c^2}{e^2 + c^2},$$

sau

$$b^2 d^2 e^2 + b^2 c^2 d^2 = b^2 c^2 e^2 - c^2 d^2 e^2$$

sau încă,

$$b^2 c^2 (e^2 - d^2) = e^2 d^2 (b^2 + c^2)$$

Ținând seama de prima ecuație de condiție, ultima egalitate se scrie

$$b^2 c^2 = a^2 (b^2 + c^2)$$

sau

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

relație din care se deduc relațiile din enunț.

Problema 643

Un vagon de tramvai având o forță de tracțiune de 350 KG, se mișcă rectiliniu și uniform pe un traseu orizontal cu o viteză de 36 km/oră. Care este intensitatea curentului folosit, dacă tensiunea la borne este 500 volți?

Spiridon Manura

Soluție. Transformăm viteza: 36 km/oră=10 m/s. Prin urmare putința vagonului este

$$P = F \cdot v = 3500 \text{ kgm/s}.$$

Putința electrică a motorului este

$P_1 = UI = 500\, I$ jouli/s. Deoarece $P = P_1$, avem

$$3500 \cdot 9{,}80\, j = 500\, I\, j$$

de unde $I = 68{,}6$ Amperi.

Problema 644

Pe un același plan înclinat, depe aceeași linie orizontală li se dă drumul în același timp la două cutii sferice identice. Una din cutii este plină cu un lichid, cealaltă, cu o pastă solidă de aceeași greutate specifică cu lichidul. Care din aceste cutii ajunge cea dintâi jos la baza planului înclinat? Se va presupune că cutiile se rostogolesc, iar lichidul din prima cutie se poate mișca fără frecare pe pereții acestei cutii.

Alexandru Stoenescu

Soluție. Moleculele lichidului nefiind solidar legate de pereții cutiei, va lua naștere o forță de inerție a moleculelor lichidului care va întârzia scoborîrea cutiei pe planul înclinat. Deci cutia

plină cu pasta solidă va ajunge prima la baza planului.

In cazul când cutiile ar scoborî prin alunecare, ele ar ajunge în acelaș timp la baza planului înclinat.

Problema 646

In ziua de 7 Noembrie 1952, declinația și ecuația medie a Soarelui sunt

$$\delta = -16°20' \quad \text{și} \quad e_m = +16^m17^s$$

Pentru care puncte depe Pământ, Soarele răsare la timpul mediu $t_m = 7^h28^m03^s$?

C. V. Costăchescu

Soluție. Timpul adevărat la care soarele răsare este $H = t_m - e_m$.

In cazul problemei $H = 7^h11^m46^s = 107°56'30''$.

Cunoscând H și δ, vom putea calcula latitudinea φ a locului prin relația

$$\cos H = -\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\delta.$$

Ea se poate scrie

$$\cos(180° - H) = \operatorname{tg}(-\varphi)\cdot\operatorname{tg}(-\delta)$$

și sub această formă i se pot aplica logaritmii. Avem:

$$\log\operatorname{tg}(-\varphi) = \bar{1},48861 + 0,53306 = 0,021675,$$

$$\varphi = -46°25'44'',4$$

Deci punctele cerute (în număr de două) au latitudinea $46°25'44'',4$ *S*.

Problema 647

Doi conductori electrici sunt așezați paralel la o distanță de 0 6 m pe o porțiune de 50 m. Prin conductori trec curenți de același sens și de intensități respectiv 2000 A și 3000 A. Se cere forța ce se desvoltă între conductori.

Gavrilă Burlea
elev, Făgăraș

Soluție. Forța cerută este dată de relația

$$F = 2\,l\,\frac{I_1 I_2}{d}\ \text{dyne}$$

în care l este lungimea conductorilor (cm), d distanța dintre conductori (cm), I_1 și I_2 intensitățile celor doi curenți (u.e.m. *CGS*).

In cazul problemei avem

$$F = 2\cdot 5000\cdot\frac{\frac{2000}{10}\cdot\frac{3000}{10}}{60} = 10\ \text{dyne}$$

$$F = 10,193\ \text{Kgf}.$$

Curenții fiind de același sens, F este o forță de atracție.

Problema 648

Să se calculeze intensitatea curentului ce străbate un solenoid lung de 30 cm și cu un număr de 40 spire, dacă atunci când se introduce în solenoid o bucată de fier moale ($\mu = 2500$), *se obține o inducție de 5000 gauși. Cu cât se mărește inducția dacă intensitatea curentului crește cu 1,8 amperi?*

Oprea Constantin
București

Soluție. Folosim relația $B = \mu\,\frac{0,4\,\pi n I}{l}$ unde B este inducția magnetică măsurată în gauși, n numărul spirelor, l lungimea solenoidului (cm) și I intensitatea măsurată în amperi.

In cazul problemei $B = 5000$ *G.*, $\mu = 2500$, $n = 40$ spire, $l = 30$ cm. Inlocuind găsim $I = 1,19$ amperi.

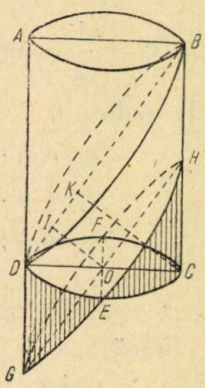
Calculând B pentru $I = 2,99$ amperi, găsim $B = 12560$ gauși. Deci când intensitatea crește cu 1,8 amperi, inducția crește cu 7560 gauși.

Problema 649

Fie ABCD secțiunea axială făcută de un plan într'un cilindru circular drept de rază R și înălțime h. *Prin considerații de volume să se exprime aria secțiunii făcute în cilindru, de un plan care trece prin BD și care este perpendicular pe planul primei secțiuni ABCD.*

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Din motive de simetrie a doua secțiune împarte cilindrul în două părți egale.



Din aceleași motive o secțiune paralelă cu secțiunea ce trece prin *BD*, dusă prin centrul *O* al bazei cilindrului determină două capate cilindrice *GDEOF* și *HCEOF* deasemenea egale (și deci echivalente).

Rezultă că cilindrul oblic *DBHEGF* este echivalent cu corpul *BDECF*. *OI* fiind perpendiculara din *O* pe *BD* dusă în planul *BCD*, putem scrie:

$$\text{vol.}\,DBHEFG = S\cdot\overline{OI} = \text{vol.}\,BDECF =$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{vol.}\,ABCEDF,$$

unde S este aria cerută.

Ducând perpendiculara CK pe BD avem

$$\text{vol. } DBHEGF = S \cdot \frac{CK}{2} = \frac{\pi R^2 h}{2}$$

și cum

$$\overline{CK} = \frac{2R \cdot h}{\sqrt{4R^2 + h^2}},$$

rezultă $$S = \pi R \frac{\sqrt{4R^2 + h^2}}{2}.$$

Verificare. Secțiunea este o elipsă de semiaxe $\frac{2R}{2} = R$ și $\frac{BD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + h^2}$. Deci aria sa este

$$S = \pi R \frac{\sqrt{4R^2 + h^2}}{2}.$$

PROBLEME PROPUSE

836. O lunetă, compusă dintr'un obiectiv cu distanța focală $f' = 50$ cm și un ocular cu distanța focală $f'' = 2$ cm, este ajustată pentru infinit. Să se calculeze unghiul sub care se vede discul lunii prin lunetă, știind că privind cu ochiul liber, acesta ne apare sub un unghi de 30′. Cu ce distanță trebue deplasat ocularul lunetei pentru a vedea clar obiectele la o distanță de 50 metri?

* * *

837. Două discuri de hârtie se găsesc fixate pe același ax de rotație la 3,5 metri unul de altul. Un mobil se deplasează cu viteză constantă paralel cu axul, străbătând cele două discuri de hârtie în două puncte ale căror raze fac între ele unghiul de 30°. Știind că axul face 1200 ture pe minut, să se afle viteza mobilului.

N. Stănescu

838. Intr'o gospodărie colectivă erau la înființarea sa 3000 păsări: găini, rațe și gâște. După un an numărul lor s'a mărit cu 20%, iar după al doilea an numărul lor s'a mărit cu 25% față de primul an. Să se afle câte găini, rațe și gâște au fost fiecare în parte la început, dacă numărul găinilor a crescut în primul an cu 25%, al gâștelor cu 14% și al rațelor cu 20%, iar în al doilea an, numărul găinilor și al rațelor au crescut cu 15% și al gâștelor cu 45%.

* * *

839. Un fierbător electric cu rezistența de 22 ohmi, funcționează cu un curent electric la intensitatea de 5 amperi. Randamentul fierbătorului fiind 0,85, să se calculeze timpul necesar pentru a transforma 200 grame de ghiață cu temperatura de —20°C în stare de vapori, căldura specifică a ghieței fiind 0,5.

Iancu Faibiș
elev, Piatra Neamț

840. Se măsoară viteza luminii cu metoda roții dințate, distanța dintre roată și oglindă fiind 10 km, iar numărul dinților roatei fiind 720. Prima extincție apare la o turație de 624 ture pe minut. Care este viteza luminii? La ce turație are loc extincția de ordinul al doilea?

* * *

841. Să se construiască un cerc tangent la un cerc dat și la o dreaptă dată într'un punct dat depe dreapta dată.

Simon St. Petre

842. Se dă triunghiul ABC și un punct M pe latura BC. Să se arate că:

$$\frac{\sin A}{AM} = \frac{\sin(MAC)}{AB} + \frac{\sin(MAB)}{AC}.$$

* * *

843. Peste 3 roți de același diametru având axele paralele și așezate în vârfurile unui triunghiu ABC este trecută o curea de transmisiune. Cunoscând că tensiunea în curea este T și unghiurile triunghiului ABC, să se afle forțele de forfecare ce iau naștere în cele trei axe, frecarea în lagăre fiind neglijabilă. Aplicație: $T = 80$ kg $A = 45°$, $B = 60°$.

C. Ionescu-Țiu

844. Ce cantitate de căldură se degajă la comprimarea izotermă a 7 g de azot la presiunea normală de 1,033 kgf/cm² până la presiunea de 51,65 kgf/cm², temperatura fiind de 25°C.

* * *

845. Să se determine suprafața rombului $ABCD$ știind că razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD sunt egale respectiv cu R și r.

V. Isacov
(R.S.S. Cazahă)

846. Diferența între perimetrele a două poligoane regulate convexe asemenea, unul înscris altul circumscris aceluiași cerc, este mai mică decât latura poligonului înscris, numărul laturilor fiind cel puțin șase.

* * *

847. Să se arate că într'un triunghi oarecare avem:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{R}.$$

C. Ionescu-Țiu

848. Să se arate că dacă $a > b > 0$ și $m > 1$ avem inegalitățile:

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a-b} > mb^{m-1}.$$

* * *

849. O greutate de 500 kg este susținută suspendată cu o frânghie înfășurată pe un stâlp cilindric de lemn așezat orizontal. Să se determine unghiul de înfășurare, coeficientul de frecare fiind 0,4 iar forța care întinde capătul liber este de un kg.

Banghea Oprea
elev, Câmpina

850. Până la ce temperatură trebue încălzit aerul la 15°C, pentru ca volumul lui să se mărească de două ori, iar presiunea să rămână aceiași?

* * *

851. Fie S_1 și V_1 suprafața laterală și volumul unei piramide patrate regulate de volum maxim, înscrisă într'o sferă de rază R și fie S_2 și V_2 suprafața laterală și volumul piramidei patrate regulate circumscrisă aceleiași sfere și de volum minim. Să se stabilească relația:

$$S_1V_2 = \sqrt{5}\,S_2V_1.$$

Florin S. Torjescu
elev, Ploești

852. Pentru câte curse ale unei pompe de capacitate 40 cm³ se poate goli un balon de 2 litri astfel încât presiunea să scadă dela o atmosferă până la 0,1 milimetri mercur?

* * *

853. Pentru care valori ale lui a sistemul de inegalități

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$$

este satisfăcut pentru orice valoare a lui x.

N. Cernov

854. Să se discute sistemul de ecuații

$$ax + by + z = 1$$
$$x + aby + z = 1$$
$$x + by + az = 1$$

după diferitele valori ale lui a și b.

* * *

855. Să se rezolve ecuațiile:

$$\frac{1+ax}{1-ax}\sqrt{\frac{1-bx}{1+bx}}+1=0$$

$$x+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x+2}$$

apoi să se verifice soluțiile aflate.

* * *

856. Pe un același ax sunt centrate două discuri stroboscopice A și B, având respectiv 30 și 31 deschideri echidistante. Ce viteză de rotație are axul dacă privind prin A o coardă care vibrează, aceasta pare nemișcată, iar dacă este observată prin B pare că face 186 vibrații pe minut? La ce viteză de rotație a discului, aceiaș coardă pare imobilă când este privită prin B și că ar face 180 vibrații pe minut dacă este privită prin A? Ce frecvență are coarda?

N. Stănescu

857. Să se construiască triunghiul ABC când se cunoaște unghiul A, $AC + AB = d$, și înălțimea din vârful A.

Ioan Licea
elev, Galați

858. Se consideră șirul U_0, U_1, U_2, U_3, ... U_n și că $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$. Să se calculeze U_n în funcție de U_0, U_1, și n dacă a și b sunt cunoscute.

* * *

859. Prin punctele A și B luate pe două drepte perpendiculare se duc perpendicularele AM și BN pe o dreaptă variabilă ce trece prin intersecția primelor două drepte. Se cere locul geometric al unui punct de pe MN care împarte acest segment într'un raport dat.

I. Lozieiu

860. La ce temperatură viteza medie patratică a moleculelor de oxigen este egală cu a celor de azot la 100°C?

Care este energia internă a moleculelor ce se află în 5 litri de H_2 ținut la presiunea de 3 kgf/cm²

* * *

861. Intr'un cerc de rază R ducem diametrul AC și coardele AB și AD fiind respectiv (l_3) latura triunghiului echilateral și (l_4) latura patratului înscrise în cerc. Dreptele AB și DC se taie în M, iar AD și BC în N. Să se calculeze laturile triunghiului OMN în cazul când AB și AD sunt de o parte și de alta a diametrului OC și în cazul când sunt de aceiaș parte.

N. C. Ciomu

862. Arborele de transmisie al unei mașini are un diametru de 70 mm. Fiind supus la torsiune, să se afle forța tangențială maximă ce se poate aplica unei roți de diametru 200 mm solidară cu axul, știind că rezistența admisibilă la torsiune este de 900 kg/cm². Care este unghiul de deformație la torsiune dacă modulul G este 850.000 kg/cm².

Apostol C. Economu
elev, Caracal

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E. 290. O ladă de formă cubică este umplută cu apă. Să se determine presiunea pe centimetrul pătrat pe fundul lăzii, dacă apa cântărește 64 kg.

* * *

E. 291. Lungimea unui pod de fier este de 30 metri. Să se determine deplasarea maximă a capătului său liber dacă temperatura în timpul verii este de 50° iar în timpul iernei de —30° C.

* * *

E. 292. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\frac{a}{x-b}=\frac{b}{y-a}\ ;\ x+y=c.$$

Tiberiu Weszely

E. 293. In cercul de rază R se duc diametrii perpendiculari AB și CD. Tangenta în A la cerc întâlnește tangenta în C în punctul F și pe BC în E. Dreapta ED taie pe OF în I.

1) Să se demonstreze că I este mijlocul lui OF.

2) Punctele M și N fiind intersecțiile dreptei ED respectiv cu CF și OA, avem relația

$$\frac{MF}{CM}=\frac{ON}{NA}=\frac{1}{2}$$

3) Aria triunghiului CME este o treime din aria triunghiului CDE.

Stan M. Fotă,
elev Giurgiu

E. 294. Să se arate că:

$$x^3+(1-x)^3=1-3x(1-x)$$
$$(1+x)^3-x^3=1+3x(1+x)$$
$$(x+1)^3+(x-1)^3=2c(x^2+3)$$
$$(x+1)^3-(x-1)^3=2(1+3x^2)$$

C. I. Ț.

E. 295. La separarea laptelui pentru fiecare mie de litri se consumă 1,5 kWh de energie electrică. Cât timp va fi necesar pentru această separare dacă puterea motorului care rotește separatorul este de 0,3 kW, iar randamentul este 0,9

* * *

E. 296. Dacă din numărul de trei cifre $a\ b\ c$ se scade răsturnatul său cba, să se arate că numărul obținut are cifra zecilor egală cu 9, iar diferența dintre cifra zecilor și a unităților este cifra sutelor.

Exemplu: 872—278=594.

Ion Horvat
elev, Ocna Mureș

E. 297. Să se arate că

$$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+$$
$$+(a+b+c)(a-b)(c-a)=0.$$

* * *

E. 298. Mașina pentru tunderea oilor este pusă în mișcare de un electromotor care necesită un curent de 0,5 amperi la o tensiune de 220 volți. Să se determine puterea utilă dacă randamentul este 85%.

* * *

E. 299. Să se arate că în orice triunghi avem relația:

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\right)=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

unde a, b, c sunt laturile și h_a, h_b, h_c înălțimile.

Florea C. Constantin
student, București

E. 300. Prin două puncte fixe A și B să se ducă două paralele astfel ca distanța dintre cele două paralele să fie $\frac{3}{5}\ \overline{AB}$.

Matei Nazarie
elev, București

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare din numărul 4, Aprilie 1953)

SOLUȚII DE PROBLEME PRIMITE ÎN LUNA FEBRUARIE 1953

PITEȘTI. Școala medie tehnică de mecanică. Anul II. Popa I. Gheorghe (E: 203, 204, 206, 208, 209, 223, 237, 242, 243, 245), Popescu M. Virgil (718, 722, E: 202, 234, 236, 237, 238, 239, 240), Stănescu Gh. Dumitru (643, 685, 718, E: 190, 198, 201, 202, 207, 208, 209, 213, 217, 223, 235, 240, 243, 247), Rădulescu A. Ion (740, E: 209, 223, 235, 240, 247, 248), Tudor N. Gheorghe (E: 190, 193, 198, 200, 209, 213, 217, 218, 223, 230, 235, 240, 243, 247), Ungureanu I. Marin (615, 625, 685, 718, 743, E: 193, 205, 206, 225, 226, 235, 237, 240, 243, 247), Zamfir M. Trandafir (685, E: 206, 226, 235, 240, 232), Anul III. Stoica C. Marin (615, 618 E: 161, 165, 175, 178, 189, 199, 209, 213, 215, 218, 230, 237, 242, 243, 247, 248). Liceul de băieți. Clasa VIII-a. Luca N. Ion. (E: 163, 195, 198, 218, 242, 243, 245, 248, 251, P), Șerb I. Adrian (655, E: 156, 159, 208, 213, 126, 218, 220, 223, 236, 239, 243, 245, 248, 251), Tonghioiu I. Mihai (E: 195, 196, 213, 216, 218, 243, 245, 247, 248), Clasa IX-a. Cazangiu T. Iulian (690, 691, 692, 724, E: 200, 216, 222, 223, 224, 225, 227, 228, 230, 231, 232, 239), Mihoc N. Ovidiu (581, 595, 658, 679, 718, 724 E: 157, 165, 178, 183, 192, 203, 204, 207, 216, 218, 245, 251, P), Sandu Iulian (552, 590, 658, 664, 679), Saraci M. Dumitru (521, 530, 531, 533, 534, 540, 541, 542, 537, 551, 552, 554, 557, 560, 568, 569, 571, 581, 584, 587, 588, 591, 592, 594, 595, 596, 600, 601, 611, 629, 630, 631, 666, 676, 682, 685, 696, 768, 721, 731, (E: 163, 177, 183, 207, 209, 213, 214, 224, 225), Șireanu Vlad (588, 644, 658, E: 204, 206, 207, 208, 209, 213, 216, 217, 218, 223, 225, 228, 232, 235, 236, 239, P), Steriopol Ion (527, 624, 629, 630, 632, 633, 643, 647, 647, 648, 658, 666, 667, 668, 675, 685, E: 207, 213, 239, P), Zenovie Grigore (560, 562, 569, 582, 583, 585, 590, 594, 595, 597, 601, 603, 604, 613, 634, 635, 638, 647, 654, 659, 662, 668, 669, 679, 685, 691, 718, 743, 745), Clasa X-a fete. Predescu Florica (669, 670, 685, 691, 718, E: 213, 216, 218, 223, 230, 239, 240), Clasa X băieți. Dragomir Constantin (513, 533, 557, 584, 589, 591, 600, 606, 607, 608, 609, 611, 612, 614, 615, 617, 618, 620, 621, 625, 627, 629, 630, 632, 640, 643 647, 648, 651, 654, 655, 658, 690, E: 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 189, 190, 191, 192, 193, 195, P), Fusatu Georghe (509, 514, 534, 540, 541, 543, 568, 574, 587, 590, 591, 608, 609, 610, 611, 615, 621, 627, 630, 632, 633, 643, 647, 655, 658, 666, 670, 685, 686), Ionescu V. Savin (557, 609, 618, 625, 632, 640, 647, 648, 672, 685, 686, 691, 692, 703×, 704×, 705×, 707×, 715, 716, 718, 721, 723, 724, E: 151, 152, 653, 165, 166, 168, 169, 170, 171, 172, 173, P), Iosifescu V. Marius (504, 640, 663, 664, 665, 666, 667, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, P), Nani I. Ion (543, 621, 718, 719, 720, 724, 743, 748), Radu A. Corneliu (533, 561, 613, 663, 670, 682, 691, 696, 701, P), Tudor Dumitru (543, 621, 718, 719, 720. 724, 743, 748). Clasa XI-a, Cocoș N. Ioan (630, 651, 666, 670, E: 205, 208, 209), Costache Titus Romanus (607, 615, 647, 658, 659, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 676, 683, 685, 686, 687, 689, 691, 694, 703×, 707×, 709×, 711×, 716, 717, 718, 719. 720, 721, 724, 728, 734), Namolovan Virgil (548, 561, 576, 581, 583, 588, 593, 594, 596, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 618, 629, 630, 633, 641, 643, 665, 666, 670, 685, 701, 703×, 706×, 709×, 716, 718, 719, 720, 721, 723, 724, 727, 728, 740, 744, 745, 748, 762, P), Marinescu C. Gheorghe (514, 575, 591, 598, 611, 615, 618, 622, 627, 629, 630, 633, 641, 647, 648, 651, 653, 655, 658, 659, 663, 664, 666, 667, 668, 685, 686, 687, 689, 694, 703×, 718, 724), Păun Gh. Ghorghe (531, 541, 547, 549, 554, 556 558, 574, 576, 583, 585, 594, 598, 609, 611, 612, 613, 615, 620, 633, 643, 648, 650, 651, 658, 659, 663, 664, 665, 666, 670, 682), Stănescu Dumitru (591, 604, 608, 610, 611, 615, 621, 625, 633, 648 655, 658, 659, 664, 666, 670, 685, 687, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 728, 744, 748), Șerban Ion (504, 534, 543, 581, 583, 587, 594, 595, 596, 597, 598, 601, 602, 603, 605, 606, 611, 615, 618, 625, 641, 642, 643, 645, 647, 654, 659, 663, 664, 656, 666, 670, 685, 686, 691, 701, 703, 709, P), Vasilescu Vasile (534, 560, 574, 587, 600, 603, 604, 625, 632, 634, 647, 649, 651, 652, 655, 659, 666, 685, 688, 691, 693, 701, 704×, 706×, 707×, 709×, 717, 718, 724, 725, 726, 727, 728, 743, 744, 748, 751, 752, 753, 757, 758, 759, P.

PLOEȘTI. Școala 1 fete clasa VII. Manole Ioana (679, E: 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241), Școala elementară Scăieni. Clasa VII-a. Angelescu P. Alexandru (E: 213, 215, 216, 218, 225, 230, 232, 234, 235, 236, 239, 240, 243, 245, 247), Ghindescu V. Vasile (E: 216, 235, 236, 239, 245), Dinu Constantin (E: 216, 218, 225, 234, 235, 236, 240, 243, 244), Georgescu Ion (E: 215, 216, 218, 225, 230, 232, 234, 236, 239, 243, 245, 247, 251), Școala elementară Brănești. Clasa VII-a. Bucur D. Gheorghe (E: 175, 176, 178, 179, 199, 203, 209). Liceul de băieți. Clasa VII-a. Dumitrescu Sorin (E: 215, 216, 218, 225, 230, 236, 239, 243, 245). Clasa VIII-a. Ionescu P. Gheorghe (E: 173, 183, 203, 204, 225, 230, 235, 236, 237, 243, 245,), Popescu Gh. Dumitru (E: 157. 159, 165, 171, 175, 182, 193, 203, 211, 312, 216, 217, 218, 220, 226, 231), Stroe Radu (533, 591, 594, 595, 602, 611, 618, 621, 634, 743, E: 156, 157, 159, 175, 176, 181, 182, 284, 195, 203, 207, 208, 209, 212, 216, 217, 234, 235, 236, 237, 240, 243, 245, 242, 749), Clasa IX-a. Dogaru Iulian (560, 567, 570, 577, 608, 613, 620, 630, 632, 638, 670, 681, 682, 716, 721, 722, 723, 724, 726, 727, 744, 748, 760), Ioniță I. Radu (591, E: 192, 236, 239, 240, 241), Jipa Gh. Vasile (588, 591, 593, 691, E: 175 176, 213, 216, 217, 218, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 230, 239), Odobescu Alexandru (591, 597, 611, 621, 655, 658, 726), Rădulescu Gh. Constantin (578, 581, 583, 724, 726, 742, 748, E: 172, 225, 230), Teodorescu Cristian (554, 561, 574, 578, 591, 597, 604, 618, 627, 632, 655, 658, E: 159, 171, 210, 213, 216, 217, 218, 221, 225, 230), Clasa X-a. Busuioc Horia (514, 550, 568, 569, 574, 590, 591, 597, 598, 604, 608, 615, 630, 633, 643, 648, 655, 658, 659, 664, 666, 675, 677, 685, 716, 721), Coman M. Nicolae (537, 590, 603, 604, 632, 635, 643, 653, 655, 678, 716, 717, 721, 722, 723, 728, 736, 739, 744, 745, 746, 748, 758×), Cristian Ionel (502, 504, 509, 533, 538, 554, 555, 574, 578, 581, 585, 598, 600, 601, 602, 603, 608, 612, 613, 618, 620, 622, 629, 623, 640, 643, 647, 648, 651, 660, 664, 666, 671, 675, 685, 690, 698, 718, 721, 723, 724, 726, 727, 728, 729, P), Dăscălescu Gheorghe (503, 514, 529, 550, 568, 569, 574, 578, 584, 591, 592, 593, 598, 603, 608, 609, 610, 611, 612, 614, 615,

618, 621, 633, 651, 655, 658, 659, 663, 665, 666, 667, 675, 685, 687, 690, 691, 698, 701, P), Dragomirescu N. Aurel (630, 685, 690, 724, 728), Jilăveanu Gh. Mircea (579, 685, 721, 723, E: 240), Moreanu N. Rudy (503, 598, 554, 598, 613, 615, 621, 624, 629, 630, 645, 647, 648, 651, 663, 664, 665, 683, 685, 690, 716, 718, 720, 721, 722, 723, 724, 726, 736), Mihai Iulian (534, 560, 562, 587, 605, 606, 610, 622, 631, 640, 641, 647, 662, 692, 707×, 710×, 712×, 714×, 715, 726, 730, 736, 744, 745, 747, 748, 751, 756, 757, 760, 762), Pița I. Constantin (533, 550, 566, 568, 570, 578, 581, 583, 588, 589, 591, 593, 596, 597, 598, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 611, 612, 613, 615, 617, 619, 620, 621, P), Popescu I. Dumitru (604, 606, 608, 666, 703, 718), Popescu St. Doru (591, 600, 608, 615, 630, 645, 647, 648, 650, 651, 652, 665, 667, 677, 682, 683, 685, 687, 690, 695. 716, 717, 718, 720, 721, 722, 723, 724, 726, 727, 728, 731. Pușcașu A. Alexandru (598, 604, 624, 627, 629, 630, 631, 632, 633, 643, 645, P),Torjescu S. Florin (529, 547, 558, 560, 575, 577, 584, 592, 593, 598, 599, 600, 606, 610, 614, 616, 618, 645, 647, 652, 654, 659, 663, 665, 669, 672, 674, 675, 676, 677, 679, 681, 682, 686, 695, 716, 717, 718, 720, 721, 732, 723, 724, 726, 727, 728, 731, 733, P), Vasilescu I. Mircea (591, 597, 604, 608, 619, 633, 664, 670).

RĂDĂUȚI. Clasa X-a. Chifan Aurel (574, 600, 642, 666, 670, 673, 685, 686, 691, 693, 716, 718, 721, 728, 734, 740, 743, 744, 745, 746, 748, 751, 757, 758×, E: 216, 217, 218, 228, 235, 240, 248), Lazăr C. Dimitrie (538, 554, 561, 567, 574, 578, 587, 590, 591, 597, 601, 609, 611, 615, 621, 633, 634, 641, 643, 655, 658, 663, 664, 666, 681, 685, 693, 716, 718, 720, 724, 726, 727, 728, 743, 744, 745, 748, 749, 752, 758×, 760×, E: 213, 214, 216, 218, 228, 239), Clasa XI-a. Coroamă Octavian(611, 621, 633, 643, 655, 658, 721, E: 207, 226, 236).

RÂMNICUL SĂRAT. Clasa XI-a: Murgoci E. Costel (627, 630, 632, 633, 655, 658, 663, 666, 670, 685, 687, 688, 691, 716, 718, 721, 724, 727, 745, 748, E: 203, 204, 206, 207, 209, 210, 216, 217, 227, 235, 240, 245), Paul Constantin (632, 655, 658, 685, 724, E: 195, 197, 207, 208, 209, 216, 217, 223, 236, 239).

RÂMNICUL-VÂLCEA. Școala medie tehnică de Comerț. Anul I. Ungureanu Elena (E: 213, 216, 217, 218, 219, 220, 223, 224, 225, 227, 230, 231, 232, 233, 235, 236, 237, 239, 240, 242, 243, 245). Anul II. Pătru D. Elena (561, 687, E: 158, 160, 177, 182, 208, 215, 216, 225, 230, 236). Clasa VII-a. Paulescu N. Dan (E: 201, 202, 203, 204, 209, 233, 236, 239), Clasa IX-a. Negreț C. Nicolae (611. E: 199, 207, 217, 218, 236, 239), Clasa X-a: Stănescu G. Alexandru (608, 621, 633, 651, 658, 670, 744, 745, E: 225, 230, 239, 240, 241, 248, 251), Clasa XI-a. Cocoș N. Ion (608, 643, 685, 718, E: 214).

REȘIȚA. Clasa X-a. Popescu Alexandru Dan (716, 721, 722, 723, 724, 726, 728, 733, E: 213, 218, 226, 228, 230, 231, 232, 239, P).

ROMAN. Școala medie tehnică de mecanică și siderurgie. Anul III-lea. Ionescu Al. Costache (633, 663, 670, E: 155, 212, 213, 214, 216, 218, 222), Clasa XI, Dumea A. Mihai (633, 670, 716, 744, 748), Moraru V. Mihail (525, 527, 536, 543, 568, 574, 578, 587, 590, 621, 630, 633, 641, 643, 658, 666, 687, 716, 718, 721), Popovici George (525, 590, 621, 643, 660, 685, 721).

ROȘIORI DE VEDE. Clasa XI-a C. Miclăuș Vasile (563, 564, 610, 611, 624, 634, 635, 637, 640, 643, 644, 647, 649, 650, 651, 652, 654, 655, 658, 659, 660, 661, 663, 664, 666, 669, 670, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 685, 687, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 698, 699, 701, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, 709×, 710×, 711×, 712×, 713×, 714×, 715, 716, 717, 718, 720, 721, 723, 724, 726, 728, 733, P).

SIGHIȘOARA. Clasa XI. Țerbea Axente (512, 514, 536, 541, 550, 578, 603, 604, E: 215, 218, 222, 229).

SLATINA. Clasa VIII-a. Bușcu P. Constantin (591, 740, 743, 746, 751, E: 157, 175, 179, 207, 208, 216, 226, 236, 243, 247, 251), Dumitrașcu I. Ilie (740, E: 173, 233, 242, 243, 245, 247). Clasa IX-a. Budai Teodor (743, 745, 748, E: 213, 218, 282, 230, 245, 248, 251), Badea D. Constantin, (541. 550, 567, 578, 581, 583, 588, 601, 603, 604, 608, 613, 635, 666, 672, 676, 678, 685, 718, 724, 726, 727, P), Petrulian N. Ștefan (611, 740, 748, E: 159, 161, 163, 207, 209, 222, 231, 239, 242, 243, 248), Popescu Marcela (643, 685, 687, 704×, 709×, 710×, 714×, 716, 718, 724), Popescu G. Sergiu (533, 574, 585, 592, 613, 618, 629, 630, 633, 634, 716, 718, 721, 748, E: 157, 161, 169, 173, 178, 200, 202, 203, 204, 214, 220, 225, 228, 236, 240), Stroescu Marin (E: 157, 160 162, 192, 207, 208, 222, 236, 243, 245), Teculescu Vasile (611, 617, 658, 740, E: 157, 193, 195, 208, 209, 216, 218, 236, 239, 243, 248), Zamfir C. Vasile (540, 630, 643, 725, 740, 744, 748, E: 242, 245, 247, 251). Clasa X-a. Zigulescu D. Marin (514, 540, 574, 578, 587, 591, 603, 685, 718, 721, 724, 740, 745), Clasa XI-a. Andreiță P. Constantin (514, 567, 581, 591, 597, 603, 608, 621, 630, 633, 643, 651, 655, 658, 664, 666, 670, 685, 716, 718, 721, 723, 724, 727, 740, 744, 745, 748, E: 173, 180, 182, 190, 192, 193, 197, 199, 200, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 210, 212, 213, 216, 217, 218, 222, 223, 224, 226, 227, 231, 236, 239), Cojocaru F. Dumitru (621, 685, 687, 718, 724, E: 225, 230), Constandache Rodica (716, 717, 721, 734, E: 239), Udrea I. Petre (630, 643, 648, 658, E: 190, 193, 208, 225), Vasilescu Dorina (670, 687, 724, 744, E: 213, 217, 218, 223, 239, 246).

SUCEAVA. Clasa VIII-a: Hoch Zoi (E: 226, 227, 228, 233, 236), Plăcintă Vasile (716, 717, 718, 724, 728, 729, E: 235, 239), Rusu Petre (E: 218, 220, 225, 228, 245), Clasa XI-a: Klahr Bernard (608, 625, 651, 670, 674, 678), Popovici Stelian (608, 651, 664, 670, 724, 728), Tiperciuc Eugen (633, 658, 728, E: 218, 220).

TÂRGOVIȘTE. Școala tehnică medie de petrol. Anul III. Drăgan T. Gheorghe (500, 540, 542, 548, 549, 557, 558, 560, 569, 570, 572, 575, 576, 578, 582, 591, 601, 618, 675, 685, 686, 689, 691, 718, 721, P), Tache Ștefan (630, 647, 652, 663, 665, 666, 685, 694, 721, E: 200, 207, 217, 208, 218, 225, 230). Clasa VIII liceu. Brebu Gheorghe (543, 563, 615, 621, 721, 744, 748, E: 175, 180 181, 224, 228, 230, 236, 237, 239, 240, 242, 243, 245, 247, 248), Galațkschy Gh. (529, 543, 568, 591, 621, 641, 718, 721, 724, 744, 748, E: 164, 185, 195, 197 200, 205, 208, 210, 215, 217, 221, 235, 236, 237, 240, 242, 243, 245, 248, 251, P), Onea M. Gheorghe (209, 223, 225, 236, 658), Oprea A. Aurel (548, 595, 606, 615, 621, 623, 624, 648, 666, 724, E: 161, 192, 197, 199, 203, 209, 213, 217, 218, 219, 221, 240, 245, 247, 248), Stoian I. Gheorghe (548, 574, 597, 630, 658, E: 157, 158, 164, 173, 195, 199, 205, 213, 215, 216, 217, 221, 223, 225, 227, 228, 230, 236, 237, 239, 242, 243, 248), Clasa X-a. Ionescu I. Ion (554, 629, 630, 664, 665, 670, E: 199, 202, 208, 221, P); Clasa XI. Brezeanu Ioanin (503, 506, 510, 513, 517, 542, 549, 567, 568, 573, 587, 590, 605, 618, 621, 624, 627, 629, 630, 633, 635, 637, 639, 640, 641, 665, P), Dobrescu A. Marcel (514, 576, 578, 581, 583, 607, 611, 630, 640, 653, 658, 659, 664, 665, 669, 670, 673, 678, 701, 703×, 709×, 714×, 717, 718, 724, 727, 728, 734).

TÂRGU-OCNA. Clasa IX-a. Tănase D. Gheorghe (723, 724, 726, E: 215, 218).

TÂRGU-MUREȘ. Anul I Comerț. Bleoca Ileana (E: 157, 164, 200, 208, 222, 236, 239, 240), Antonescu Victor (721, 727, 732, E: 215, 218, 239), Clasa IX-a liceu. Cioreanu Constantin (743, 745, E: 216, 217, 218, 243, 245, 248). Clasa X-a. Weszely Tiberiu (521, 524, 527, 534, 551, 569, 570, 573, 579, 593, 599, 596, 603, 606, 610, 623, 635, 636, 643, 648, 661, 668, 672, 675, 683, 685, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 701, 702, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, 708×, 709×, 710×, 711×, 712×, 713×, 714×, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 726, 727, 728, 729, 731, 732, 733). Clasa XI-a. Pupăză Nicolae (574, 590, 598, 615, 627, 628, 629, 633, 643, 645, 651, 658, 663, 683, 685, 687, 701, 717, 718, 721, 728, 729, 731, 734, 741, 742, 744, 745, 746, 747, 748, 749).

TÂRGU JIU. Anul III B. Câtu C. Nicușor (658, 670, 707×, 717, E: 223, 235), Clasa VIII-a liceu. Trifan Vasile (E: 176, 185, 186, 188, 202), Clasa IX-a: Borcan Al. Marcel (E: 156, 176, 200, 203, 204, 207), Cațighera Virgil (E: 228, 574, 613, 627, 651, 690, 717, 724), Popescu H. Nicolae (578, 621, 655, 658, 670, 678, E: 156, 157, 207, 208, 216, 217, 218, 220, 231, 239), Clasa X-a. Craicu D. Constantin (665, 670, 718, 723, E: 218, 236, 230, 239), Olaru I. Grigore (633, 640, 643, 659, 666, 685, 718, 721, 726, 748), Clasa XI-a. Ionici L. Vasile (633, 651, 670, 679, E: 157, 158, 160, 161, 164, 179, 180, 205, 216, 217, 218, 220, 222, 223, 225, 226, 228, 230), Smeureanu I. Ion (550, 561, 563, 569, 701, 716, 718, 721, 724), Tița D. Constantin (574, 587, 591, 597, 601, 603, 604, 605, 608, 611, 613, 615, 620, 622, 632, 633, 641, 642, 650, 651, 655, 658, 659, 663, 670, 673, 675, 682, 686, 691, 694, 716, 718, 721, 722, 728, 734).

TECUCI. Clasa XI-a. Ciucă Alex. (581, 583, 651, 657, 686, 691, 692, 694, 695, 699, 701, 702, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, 709×, 711, 712×, 713×, 716, 718, 721, 744, 745, 748, 751, 757, P). Clasa X-a: Flueraru I. Constantin (685, 718, 745, 748, E: 223, 225, 245, P), Mitu Alexandru (514, 578, 591, 651, 633, 655, 658, 664, 676, 679, 685, 716, 718, 744, 745, 748, E: 192, 200, 207, 208, 212), Rebegea Corneliu (685, 718, 748, E: 223, 224, 226, 230, 232, 243), Gheorghiu C. Cezar (E: 213, 214, 217, 218, 219, 220).

TIMIȘOARA. Clasa VII-a. Cismaru Ionica (E: 230, 236, 239, 240, 243), Lamoth Dorothea (E: 230, 236, 239, 240, 243). Clasa IX-a. Brașovan Ioan (712×, 716, 718, 720, 721, 724, 734), Trener Emil (722, 723, 724, 727, 734,) Clasa XI-a: Ciosa Ioan (611, 685, 716, 718, 721, 724, 728), Rusnac Leonid (611, 614, 615, 621, 664, 682, 685, 718, 721, 724, 745), Studenți. Couți Romulus (565, 566, 578, 585, 586, 591, 593, 605, 606, 607, 608, 613, 618, 621, 623, 624, 625, 640, 651, 655, 658, 664, 716, 723, 739, 746, E: 200, 221, P), Nicola N. Petre (554, 556, 574, 578, 587, 591, 597, 604, 611, 621, 655, 658, 690, P).

TULCEA. Clasa XI-a. Rubatos Bruno (533, 578, 621, 651, 670, 682, 716, 721, E: 227, 231).

TURDA. Clasa XI. Găbudean Dorin (537, 613, 615, 666, 685, 718, 720, 721, 724, 725, E: 151, 158, 161, 165, 193, 198, 213, 218, 221, 226), Pascu E. Eugen (573, 610, 664, 666, 685, 687, 718, 721, 746, E: 156, 157, 158, 15, 161, 217, 218, 228, 234, 238), Rusu Vasile (615, 621, 665, 670, 685, 718, 724, E: 203, 204, 213, 217, 218, 225).

TURNU MĂGURELE. Clasa VII. Dan St. Octavian (176, 207, 213, 225, 228), Enuță V. Radu (655, 658, E: 192, 207, 208, 213, 218, 236). Clasa IX-a: Dan Valerian (615, 655, 658, E: 206, 207, 208, 213, 218), Ghițulescu Victorel (E: 223, 235, 236, 240, 243, 245, 251), Chivu .V Daniela (676, 671, 748, E: 213, 218, 223, 224, 225, 230, 235, 236, 239, 242, 243, 245, 251). Clasa X-a. Chirilă Lucian (615, 632, 655, 658, 676, E: 207, 208, 236), Giuclea G. Iancu (621, 655, 658, 670, 685, 716, 718, 743, 748, E: 207, 208, 243, 245, 248, 251), Popescu F. Zoe (541, 658, E: 192, 203, 207, 208, 212, 251), Socolescu G. Dinel (621, 670, 723, 728, E: 217, 218), Clasa XI-a, Florescu I. Gabriela (611, 655, 676, 685, 723, 727, 743, 745, 748, 749, E: 208, 213, 217, 218, 220, 222, 225, 230, 236, 248, 251), Puiu M. Virginia (E: 213, 217, 218, 219, 220, 222), Găină Stelian (521, 540, 543, 553, 554, 559, 561, 573, 587, 590, 591, 604, 613, 663, 664, 666, 670, 671, 673, 678, 681, 682, 703, E: 172, 195, 196, 197, 200, 201, P). Absolvent Mihăiescu E. Alexandru (529, 553, 555, 558. 577, 584 594, 600, 506, 606, 607, 612, 613, 620, 622, 634, 659, 676, 677, 678, 682, 685, 686, 687, 688, 691, 694, 695, 698, 701, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, 708×, 709×, 710×, 711×, 712×, 714×, 716, 717, 718, 721, 722, 723, 724, 726, 728, 733, E: 155, 156, 157, 158, 159, 160, 61, 63, 164, 165, 168, 203, 204, 207, 208, 211, P).

★

REDACTAREA SOLUȚIILOR

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluție, numele, școala clasa și localitatea.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie.

Pe aceiaș foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul complect al problemei; iar dacă necesită figură, se va desena cu îngrijire. Folosiți soluțiile problemelor din revistă ca model de redactare a soluțiilor și justificați calculele făcute.

La orice problemă propusă se primesc soluții cel puțin timp de 6 luni dela publicarea enunțului. Se mai primesc soluții la problemele cu numărul de ordine: 616, 620, 626, 636, 637, 642, 645, 646, 648, 619, 660, 667, 668, 673 și următoarele; iar pentru elementar, la exercițiile E: 223 și următoarele.

Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse și însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți ca să înceapă a propune probleme, numai după ce au soluționat un număr mare de exerciții și probleme.

Intrucât sosesc la redacție cereri de numere vechi ale revistei, sau reclamații ale abonaților de neprimirea revistelor, vă informăm că pentru abonamente și procurări de reviste să țineți seama de cele arătate pe coperta revistei, redacția neocupându-se de exepedierea și difuzarea revistei.

In plicul cu probleme rezolvate pe o foaie separată, corespondenții sunt rugați să ne comunice data când au primit, acest număr ai revistei, sugestii în legătură cu articolele, problemele propuse, numărul problemelor propuse și rezolvate, observări asupra revistelor apărute, precum și propuneri pentru viitoarele numere ale R.M.F.

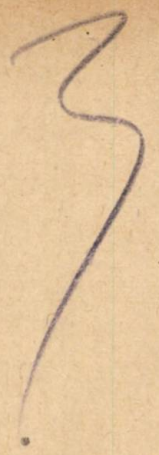
Problemele rezolvate, propuse, note matematice și fizice, articole, dări de seamă asupra activităților cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, sugestii și propuneri, etc. se trimit pe adresa: Revista Matematică și Fizică, Strada Dionisie Lupu 40, parter, Raionul Stalin, București.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA; **Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti**

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.



ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru întreprinderi . . . . . Lei 60 anual

Tarif pentru muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 653 — ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Lei 1.—

E 1426/a

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

„Inainte spre cel de al 4-lea Festival Mondial!"

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

★ ★ ★

ANUL IV

IUNIE 1953

6

EDITURA TEHNICA

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

Pag.

1. *Marile întâlniri ale tineretului lumii pentru pace și prietenie* 133
2. *Legi fizice lineare de N. Bărbulescu* 134
3. *Utilizarea «sciotului» pentru cele patru operații aritmetice de M. Moscovici* 138
4. *Chestiuni de concurs* 143
5. *Probleme rezolvate (472, 481, 492, 500, 521, 533, 556, 582)* 148
6. *Probleme propuse (877 — 903)* 151
7. *Exerciții și probleme propuse pentru școala de 7 ani (E 301 — E. 314)* 154
8. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 155

6

ANUL IV IUNIE 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 6 Iunie 1953

Orszàgos Mùszaki Könyvtàr TULAJDONA

MARILE ÎNTÂLNIRI ALE TINERETULUI LUMII PENTRU PACE ŞI PRIETENIE

Tineretul din toate colţurile lumii întâmpină prin pregătiri entuziaste două mari evenimente: al III-lea Congres Mondial al Tineretului şi al IV-lea Festival al Tineretului şi Studenţilor pentru Pace şi Prietenie, pe care tinerii din R.P.R. şi întreg poporul nostru au mândria de a le găzdui în vara acestui an.

Aceste două mari întâlniri internaţionale ale tineretului se desfăşoară în momente deosebit de importante pentru apărarea cauzei Păcii. Cu puteri sporite, popoarele luptă pentru triumful spiritului tratativelor asupra soluţiilor bazate pe forţă. Alăturându-se politicii consecvente de pace a Uniunii Sovietice, pături tot mai largi de oameni promovează în toate ţările ideea prieteniei şi cooperării internaţionale, bazate pe coexistenţa paşnică a diferitelor sisteme economice şi sociale.

Printre factorii care aduc o contribuţie de seamă pentru apărarea păcii este lupta hotărîtă a tineretului unit în Federaţia Mondială a Tineretului Democrat, care numără 75 milioane de membri în 88 de ţări.

O recentă dovadă a influenţei acestei puternice organizaţii în rândurile celor mai largi pături a tineretului din toate ţările lumii, a fost Conferinţa Internaţională pentru Apărarea Drepturilor Tineretului, convocată din iniţiativa F.M.T.D. în luna Martie la Viena. Conferinţa a condamnat pregătirile războinice din ţările capitaliste, care fac ca bugetele acestor state să fie înghiţite de înarmări în timp ce pentru nevoile de învăţământ şi cultură rămân procente neînsemnate. Atât larga reprezentare a tinerilor din diferite pături şi convingeri, cât şi problemele discutate au făcut să crească autoritatea F.M.T.D. ca apărătoare a drepturilor economice, politice, sociale şi culturale ale tineretului precum şi a aspiraţiilor sale la educaţia sănătoasă şi viitor neameninţat.

Al III-lea Congres Mondial al Tineretului, care se va deschide la 25 Iulie la Bucureşti, va înregistra creşterea forţelor F.M.T.D. şi va fi o tribună dela care va fi exprimată voinţa tinerei generaţii a lumii de a trăi în pace şi de a-şi asigura o desvoltare normală şi armonioasă. Problemele drepturilor tineretului la educaţie şi cultură vor fi din nou prezente în discuţiile Congresului. Aceste probleme sunt strâns legate de lupta pentru reducerea înarmărilor în ţările capitaliste şi pentru punerea ştiinţei în slujba construcţiilor paşnice. Cine dacă nu tinerii sunt interesaţi ca în loc de bombardiere şi cuirasate, să se ridice şcoli şi laboratoare?

In năzuinţa lor de pace, tinerii se apropie indiferent de deosebirile dintre ei şi rândurile lor se strâng indiferent de naţiunea la care aparţin şi limba pe care o vorbesc. In aceasta constă însemnătatea deosebită a evenimentelor din viaţa tineretului, ce se desfăşoară acum. Ea este exprimată în apelul adresat de Comitetul Executiv al F.M.T.D. dela Helsinki tuturor organizaţiilor de tineret care doresc pacea: «Unitatea tineretului este necesară şi posibilă pentru această nobilă cauză. Al III-lea Congres Mondial al Tineretului şi al IV-lea Festival al Tineretului şi Studenţilor prezintă în sensul acesta posibilităţi imense»...

Nimic nu arată mai bine încrederea şi optimismul tineretului, angajat pe calea păcii şi prieteniei decât organizarea celui de-al IV-lea Festival, ce continuă tradiţia marilor întâlniri internaţionale ale tineretului. Ca şi Festivalul dela Berlin din 1951, al IV-lea Festival va fi locul de întâlnire a zeci de mii de soli ai păcii, veniţi de pe toate continentele.

Nu există colţ în lume în care să nu răsune îndemnul tinerilor de a veni la Bucureşti şi cântecele celor ce se pregătesc pentru Festival. In inima Africei şi îndepărtata Australie, în Canada, Scandinavia şi Chili, ca şi în insulele oceanelor, de luni de zile se desfăşoară pregătiri însufleţite ale celor care vor înfrânge toate obstacolele spre a veni la cel de-al IV-lea Festival.

In toate ţările se strâng sume de bani în cadrul «Fondului Internaţional de Solidaritate», care vor permite tinerilor din ţările coloniale şi dependente să participe şi ei la Festival. Pretutindeni s'au înfiinţat Comitete naţionale de pregătire, din care

fac parte numeroase personalităţi enumerate din domeniul ştiinţei, culturii şi artei.

Programul Festivalului este atât de bogat, încât dacă cineva şi-ar propune să ia parte la toate manifestaţiile sale, nu ar putea face acest lucru nici în cursul unei vieţi întregi de om. La manifestările culturale şi artistice, diferitele delegaţii naţionale aduc cele mai bune trăsături ale culturii popoarelor lor. Corurile, dansurile, echipele de teatru, concertele şi reprezentaţiile de balet vor oglindi tezaurul nesecat al culturilor naţionale a căror cunoaştere şi preţuire sunt îndemnuri la prietenie între popoare.

In cinstea Festivalului s'au ţinut festivaluri şi mari adunări naţionale ca cele din Belgia, Austria, Republica Populară Cehoslovacă, Franţa, Italia, Africa de Sud, Brazilia, Ecuator, Birmania şi altele. S'au desfăşurat concursuri care pregătesc participarea tinerilor din toate ţările la cel de-al IV-lea Festival. Toate continentele sunt străbătute în luna Iulie de ştafetele tineretului, care vor transmite Festivalului mesagiul de pace a milioane de tineri.

In cadrul Festivalului se vor desfăşura concursurile culturale, în domeniile literaturii, muzicii, artei plastice şi cinematografiei, care sunt menite să stimuleze tinerele talente puse în slujba păcii şi prieteniei între popoare. In juriile care vor decerna premiile câştigătorilor concursurilor se numără personalităţi de renume mondial în domeniile respective. Aceste juriuri vor acorda înaltul titlu de « Laureat al Festivalului » celor mai distinşi tineri creatori din domeniile artei.

Tot atât de variate sunt şi manifestările sportive din cadrul « Intâlnirilor sportive amicale », la care vor participa echipe de frunte din peste 30 ramuri ale sportului.

In timpul Festivalului vor exista zile închinate unor teme diferite: ziua apărării drepturilor tineretului, ziua studenţilor, ziua tinerelor fete şi altele. Vor fi deschise expoziţii naţionale şi internaţionale, se va desfăşura un festival al filmului şi vor avea loc întâlniri între delegaţiile naţionale sau pe profesiuni.

De o mare importanţă sunt întâlnirile tineretului cu personalităţile cele mai însemnate din domeniile ştiinţei, culturii şi ale artei, care vor face expuneri asupra problemelor celor mai actuale. Tinerii din diferite profesiuni vor discuta chestiunile interesând activitatea lor, iar studenţii vor organiza întâlniri pe facultăţi, unde vor desbate probleme referitoare la învăţământ şi la diferite metode de studiu.

Cu câtă mândrie se gândesc tinerii din Republica Populară Română că aceste bogate manifestări ale măreţei sărbători a tineretului lumii, au loc în ţara lor. Intreg poporul patriei noastre aşteaptă cu interes cel de-al IV-lea Festival şi îi crează un cadru corespunzător. In construcţiile de clădiri, parcuri şi stadioane pentru Festival, poporul nostru manifestă solidaritatea sa cu toţi cei care apără pacea. « In sate şi oraşe, în întreaga ţară, tinerii care ne vor vizita vor fi primiţi cu dragostea şi prietenia pe care poporul nostru le rezervă de secole solilor păcii » a spus acad. Mihail Sadoveanu, preşedintele Comitetului Naţional pentru Pregătirea Festivalului.

Antrenaţi în munca de construcţie şi în terminarea cu succes a anului şcolar, tinerii din ţara noastră au organizat în cinstea Festivalului numeroase manifestări. Tinerii matematicieni şi fizicieni au participat de curând la un mare concurs, care a înregistrat rezultate remarcabile. Atât numărul celor care au luat parte cât şi calitatea lucrărilor au arătat că tinerii din R.P.R. fac paşi importanţi pentru însuşirea raţionamentului matematic şi a calculului, de care este legată desvoltarea învăţământului ştiinţific şi tehnic în ţara noastră.

Iată un succes valoros, în realizarea căruia tinerii au fost însufleţiţi de măreaţa sărbătoare a tineretului lumii.

In dorinţa fierbinte de a reprezenta cu cinste ţara noastră la întâlnirea internaţională pentru pace şi prietenie, să ne pregătim cu puteri sporite şi să înscriem noi succese în studiile noastre.

LEGI FIZICE LINEARE

N. BĂRBULESCU

In Fizică se întâlnesc o seamă de legi simple, ce se stabilesc pe căi diferite, cu toate că au acelaş caracter general. Astfel, pentru legea deformaţiilor elastice prin alungire se foloseşte o cale cu totul diferită decât calea prin care se ajunge la legea dilatării corpurilor. Deasemenea legea compresibilităţii lichidelor se obţine printr'un raţionament cu totul diferit de cel care ne duce la legea variaţiei cu temperatura a rezistenţei electrice.

Şi totuşi, aceste fenomene aşa de mult deosebite între ele, prezintă, între anumite limite, o comportare perfect analoagă: ele se desfăşoară după

o lege liniară. Aceasta ne sugerează ideea de a institui o metodă generală pentru stabilirea legilor lor. In prezentul articol, ne propunem să schiţăm această metodă şi s'o aplicăm în cazurile menţionate mai sus.

Mai întâi, ce este o *lege fizică liniară?* este legea care se exprimă matematic prin ecuaţia unei linii drepte:

$$y = a + bx \qquad (1)$$

în care a şi b sunt constante. Când dăm variabile x valorile succesive:

$$0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

funcţia y capătă atunci valorile respective:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots$$

Valoarea y_0 o numim *valoare iniţială*; se vede din (1) că pentru $x = 0$, avem $y = y_0 = a$, aşa că mai putem scrie:

$$y = y_0 + bx = y_0\left(1 + \frac{b}{y_0}\,x\right)$$

şi punând $C = \dfrac{b}{y_0}$ obţinem:

$$y = y_0\,(1 + Cx) \qquad (2)$$

Expresiunea $(1 + Cx)$ se poate numi în general *binom de variaţie liniară* deci formula (2) se poate citi astfel: *valoarea funcţiei lineare y este egală cu valoarea iniţială înmulţită cu binomul de variaţie liniară.*

Constanta C poate primi numele de *coeficient de variaţie liniară.*

Din (2) scoatem:

$$C = \frac{1}{y_0}\,\frac{y - y_0}{x}$$

căreia îi putem da o formă mai generală:

$$C = \frac{1}{y_0}\,\frac{y - y_0}{x - x_0}$$

în care x_0 este în cazul de faţă zero. Punând $y - y_0 = \Delta y$ şi $x - x_0 = \Delta x$, avem:

$$C = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Să cercetăm semnificaţia concretă, fizică, a constantei C. Pentru aceasta, considerăm cazul particular când $y_0 = 1$ şi $\Delta x = 1$; atunci $C = \Delta y$. Adică, *coeficientul de variaţie liniară C reprezintă cantitatea cu care creşte unitatea de mărime a funcţiei y, când variabila x creşte cu o unitate.*

Aceasta este metoda generală de studiu a fenomenelor care se desfăşoară după o lege liniară. S'o aplicăm în câteva cazuri mai cunoscute.

1) *Legea deformaţiilor elastice prin alungire.* Considerăm un fir metalic de lungime l_0, fixat la extremitatea superioară; de capătul liber facem să acţioneze o forţă F (bunăoară, atârnăm o greutate). Dacă însemnăm cu s secţiunea transversală a firului, atunci raportul $\dfrac{F}{s}$ reprezintă tensiunea σ la care este supus firul [1]).

Sub acţiunea tensiunii σ, firul se lungeşte; lungimea lui iniţială l_0 devine l. Presupunem că asupra firului facem să acţioneze succesiv tensiunile: $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3, \ldots$; fie $l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots$ lungimile respective ale firului. Dacă aceste lungimi nu sunt prea mult diferite de lungimea iniţială l_0, atunci alungirile firului sunt elastice. Adică ele dispar complect de îndată ce forţa acţionantă nu mai lucrează asupra firului.

Să transpunem într'un grafic rezultatele experimentale, luând pe axa absciselor segmente proporţionale cu tensiunile, iar pe axa ordonatelor segmente proporţionale cu lungimile firului. Se constată că atâta vreme cât alungirile firului sunt elastice, curba care reprezintă variaţia lui l în funcţie de σ este o linie dreaptă (fig. 1); ordonata la origină măsoară lungimea iniţială l_0. Ecuaţia acestei drepte este:

$$l = a + b\sigma$$

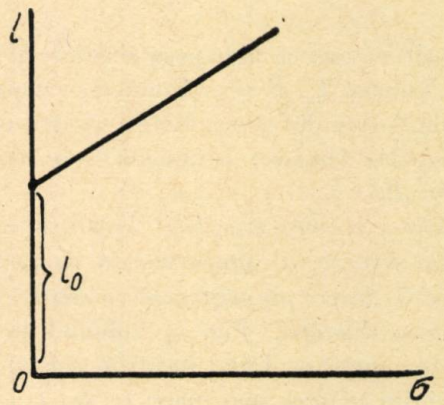


Fig. 1

Pentru $\sigma = 0$, avem $l = l_0 = a$, deci:

$$l = l_0 + b\sigma = l_0\left(1 + \frac{b}{l_0}\,\sigma\right)$$

şi punând $\dfrac{b}{l_0} = k$, avem:

$$l = l_0\,(1 + k\sigma)$$

formulă în care exprimă *legea deformaţiilor elastice prin alungire*: *lungimea unui fir supus alungirilor elastice este egală cu lungimea iniţială înmulţită cu binomul de alungire elastică.* Constanta k reprezintă *coeficientul de elasticitate*: este cantitatea

[1]) *V. A. Goranschi*, Mecanică tehnică, pag. 157, Editura tehnică, 1952.

cu care se alungește unitatea de lungime dintr'un fir, când tensiunea de alungire crește cu o unitate. Potrivit celor stabilite mai sus, avem:

$$k = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta \sigma}.$$

Cum $\Delta\sigma$ măsoară creșterea tensiunii dela 0 la σ, mai putem scrie:

$$k = \frac{1}{l_0} \cdot \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Numind *alungire relativă* a, alungirea unității de lungime:

$$a = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Introducând această notație în expresiunea lui k, obținem:

$$a = k\sigma \qquad (3)$$

care este formula cea mai simplă a legii alungirilor elastice: *alungirea relativă este proporțională cu tensiunea.* Inversul coeficientului de elasticitate *este denumit modulul lui Young* și se notează cu E.

Din formula (3) deducem:

$$\Delta l = k \frac{l_0 F}{s}.$$

Se vede de aici că alungirea elastică Δl depinde de trei factori: l_0, F și s. Enunțarea dependenței lui Δl de fiecare din acești factori constitue o lege a alungirilor elastice, cunoscută sub numele de legea lui *Hooke.*

Alungirea elastică este deci: 1) *proporțională cu lungimea firului*; 2) *proporțională cu forța acționantă, și* 3) *invers proporțională cu secțiunea.*

2) *Legea dilatării.* Fie v_0 volumul la $O°C$ al unui corp oarecare. Când încălzim corpul la temperaturi din ce în ce mai mari: t_1, t_2, t_3,... el se dilată, așa că volumul său capătă valorile respective: v_1, v_2, v_3,... pe cari le măsurăm în mod direct.

Să transpunem într'un grafic rezultatele măsurătorilor: luăm pe abscisă temperatura, iar pe ordonată volumul corespunzător. Dacă intervalul de temperatură în care am făcut măsurătorile nu este prea mare, se constată că punctele figurative ale stării corpului se așternpe o dreaptă (fig. 2) a cărei ordonată la origină este v_0. Ecuația acestei drepte este:

$$v = a + bt$$

în care $a = v_0$. Procedând după metoda generală expusă mai sus, obținem:

$$v = v_0 (1 + \gamma t),$$

de unde deducem pentru coeficientul de dilatare γ;

$$\lambda = \frac{1}{v_0} \frac{\Delta v}{t}.$$

Deoarece t reprezintă aici creșterea de temperatură dela $O°\,C$ la $t°\,C$, mai putem scrie încă:

$$\lambda = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\Delta v}{t}.$$

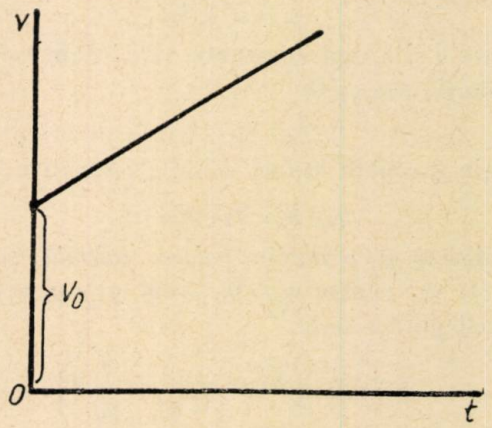


Fig. 2

Sensul fizic al coeficientului λ îl obținem din această formulă luând $v_0 = 1$ și $\Delta t = 1$; atunci $\lambda = \Delta v$. Adică, *coeficientul de dilatare în volum reprezintă cantitatea cu care se dilată unitatea de volum dintr'un corp, când i se ridică temperatura cu un grad.*

In acelaș fel putem stabili și legea după care variază presiunea p a unui gaz cu temperatura

$$p = p_0 (1 + \beta t)$$

când îl încălzim sub volum constant, sau legea după care variază rezistența specifică cu temperatura:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$$

3) *Legea compresibilității.* Considerăm un corp care are volumul v_0 sub presiunea normală p_0. Să mărim presiunea cu Δp_2: volumul se micșorează și devine v_1; dacă mărim presiunea cu Δp_0, volumul se micșorează și devine v_2, ș.a.m.d. Experiența ne furnizează astfel o serie de valori v_1, v_2, v_3,... corespunzătoare creșterilor respective de presiune Δp_1, Δp_2, Δp_3,...

Să transpunem aceste valori într'un grafic, luând pe axa absciselor creșterile de presiune, iar pe axa ordonatelor volumele respective. Dacă excedentul de presiune nu este prea mare, atunci curba care se obține este o linie dreaptă (fig. 3), ce coboară către axa presiunilor.

Ecuația acestei drepte este:

$$v = a - b\Delta p$$

în care $a = v_0$. Avem deci:

$$v = v_0 \left(1 - \frac{b}{v_0} \Delta p\right) = v_0 (R - \beta \Delta p),$$

formulă care exprimă *legea compresibilității corpurilor: volumul unui corp supus la compresiune este egal cu volumul înmulțit cu binomul de compresibilitate.*

Din formula precedentă deducem:

$$v - v_0 = - v_0 \beta \Delta p$$

și, punând după regula generală: $v - v_0 = \Delta v$, obținem pentru coeficientul de compresibilitate β;

$$\beta = - \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta p} .$$

Semnul minus din membrul II traduce acest fapt fizic, că unei creșteri de presiune îi corespunde o micșorare de volum.

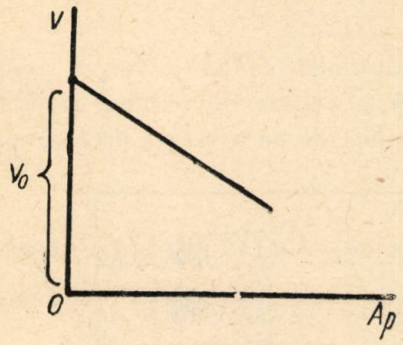


Fig. 3

Semnificația fizică a coeficientului de compresibilitate se află după regula generală, luând $v_0 = 1$ și $\Delta p = 1$; atunci $\beta = - \Delta v$. Adică, *coeficientul de compresibilitate reprezintă cantitatea cu care se micșorează unitatea de volum dintr'un corp, când presiunea exterioară crește cu o unitate.*

4) *Legea barometrică.* Sunt și cazuri când o lege mai complicată poate fi pusă sub forma simplă, de lege lineară. Așa este cazul cu *legea barometrică*, după care în câmpul de gravitație presiunea unui gaz scade cu altitudinea. Relația matematică dintre presiunea p și altitudinea h este ceva mai complicată; putem ajunge însă la o formă mai simplă, dacă studiem dependența de altitudine a logaritmului presiunii. Se obține acest rezultat, că *logaritmul presiunii gazului variază linear cu altitudinea* h:

$$\log p = a - bh$$

Insemnătatea cu p_0 presiunea gazului la nivelul de referință ($h = 0$); avem atunci $\log p_0 = a$, deci:

$$\log p = \log p_0 - bh$$

de unde:

$$\log \frac{p_0}{p} = bh \qquad (4)$$

Ne propunem să determinăm constanta b. Pentru aceasta, facem un mic artificiu de calcul scriind:

$$\log \frac{p_0}{p} = \log \left(1 + \frac{p_0}{p} - 1 \right) = \log \left(1 + \frac{p_0 - p}{p} \right) .$$

Când h nu este prea mare, diferența $p_0 - p$ este mică, așa că putem lua: [1])

$$\log \left(1 + \frac{p_0 - p}{p} \right) \approx \frac{p_0 - p}{p} = \frac{\Delta p}{p} .$$

Introducând acest rezultat în formula (4) avem:

$$bh = \frac{\Delta p}{p}$$

de unde:

$$\Delta p = hbp. \qquad (5)$$

Dar pentru Δp putem stabili și o altă expresiune. In adevăr, la nivelul zero avem presiunea p_0 iar la nivelul h, presiunea p:

$$p_0 = p + \Delta p,$$

adică, la nivelul zero acționează presiunea p plus greutatea coloanei de gaz ce are secțiunea de 1 cm^2 iar înălțimea de h cm. Greutatea acestei coloane fiind $h\rho g$, unde ρ este densitatea gazului, avem:

$$p_0 = p + h\rho g$$

de unde:

$$\Delta p = p_0 - p = h\rho g.$$

Comparând acest rezultat cu cel dat de formula (5), obținem:

$$pbd = \rho g$$

de unde:

$$b = \frac{\rho}{p} g$$

Raportul $\frac{\rho}{p}$ îl putem scoate și din legea gazelor perfecte:

$$pv_m = RT$$

în care v_m reprezintă volumul unei molecule-gram, de gaz. Insemnând cu M masa moleculară a gazului avem:

$$p \frac{M}{\rho} = RT$$

---

[1]) In matematica superioară se demonstrează că, pentru x foarte mic:

$$\log (1 + x) \approx x$$

Noi vom justifica acest rezultat printr'un exemplu numeric. Logaritmul din formula de mai sus este logaritm natural; pentru a-l înlocui cu logaritmul zecimal, introducem factorul de conversiune 2,303, adică trebue să scriem:

$$2{,}303 \log_{10} (1 + x) \approx x$$

Considerăm că $x = 0{,}0022$, avem:

$$2{,}303 \log_{10} (1 + 0{,}0022) = 2{,}303 \times 0{,}00096$$

și, efectuând înmulțirea găsim produsul 0,002210, care este aproximativ egal cu valoarea luată pentru x.

de unde:

$$\frac{\rho}{p} = \frac{M}{RT}$$

așa că:

$$b = \frac{Mg}{RT}.$$

Introducând această expresiune în formula (4), obținem:

$$\log \frac{p_0}{p} = \frac{Mg}{RT} h$$

Această ultimă formă exprimă legea barometrică, importantă nu numai în studiul gazelor ci și al soluțiilor, după cum au dovedit ceiebrele experiențe ale lui *Jean Perrin*, pentru măsurarea numărului lui *Avogadro*.

UTILIZAREA „SCIOTULUI" PENTRU CELE PATRU OPERAȚII ARITMETICE

M. MOSCOVICI

Sciotul (dela cuvântul sciot = socoteală) este un aparat de calculat foarte răspândit în U.R.S.S.

Cauza folosirii pe scară largă a acestui aparat trebue căutată atât în simplitatea construcției sale cât și în economia mare de efort mintal necesitat în operațiile de calcul lungi și obositoare.

Pentru unele operații (adunarea și scăderea) viteza de lucru a unui calculator experimentat este aproximativ egală cu aceea obținută cu orice mașină modernă de calculat.

Pentru operațiile înmulțirii și împărțirii, precum se va vedea în cele ce urmează, procedeele de lucru propuse fac ca aceste operații să fie făcute cu o mare economie de efort mintal într'un timp relativ mai scurt decât pe calea obișnuită.

Descrierea aparatului și formarea numerelor pe el

Sciotul este format dintr'un cadru de lemn, în interiorul căruia sunt fixate o serie de vergele de metal paralele. Pe fiecare din aceste vergele sunt înșirate câte 10 bile; cele două bile dela mijlocul fiecărei vergele (a 5-a și a 6-a) sunt vopsite în negru, ceeace face mai ușoară numărarea bilelor.

Aparatul se așează pe masă, în partea dreaptă a celui care lucrează și cu partea mai joasă a aparatului, mai apropiată de calculator.

Observarea 1. La aparatele de tip vechi (vezi fig. 1), pe două dintre vergele (prima și a 4-a de jos), erau înșirate numai câte 4 bile. Aceste vergele erau de tinate calculului cu sferturi de unități ale vechilor unități rusești ca arșinul, pudul, etc.; odată cu adoptarea sistemului metric aceste vergele cu 4 bile și-au pierdut însemnătatea.

Fiecare vergea a sciotului servește pentru manipularea unităților de un anumit ordin (unități, zeci, sute, mii, zeci de mii, etc.) (vezi fig. 2).

— Fiecare bilă de pe o vergea a aparatului reprezintă o unitate din ordinul respectiv; prin urmare o bilă de pe o vergea dată corespunde în

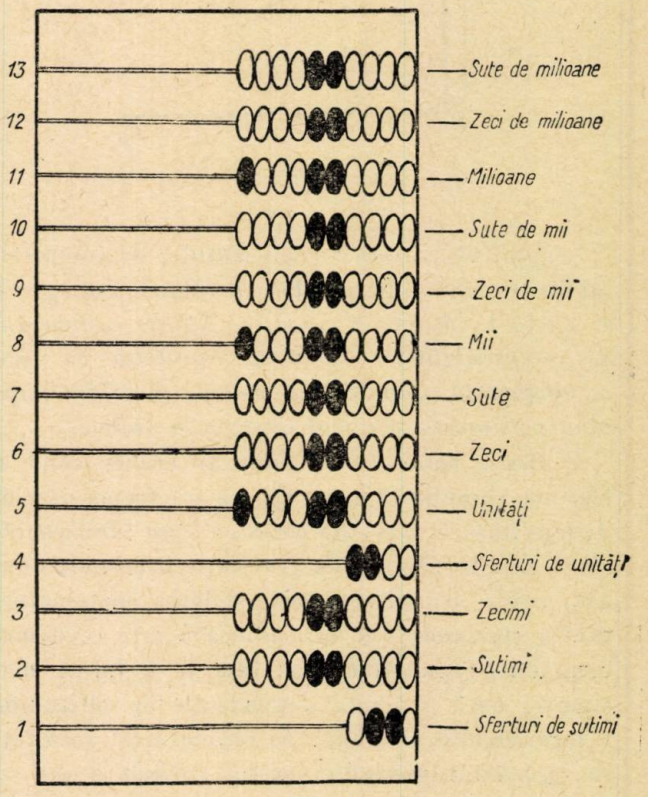


Fig. 1

valoare cu zece bile de pe vergeaua precedentă și cu o zecime din valoarea unei bile de pe vergeaua următoare. Pe figura alăturată sunt arătate ordinele de unități ale tuturor vergelelor. Pentru găsirea rapidă a ordinului unităților căutate, se marchează prima bilă din stânga de pe vergelele unităților, miilor și milioanelor cu o culoare deosebită ca a celorlalte bile (de obicei cu negru sau roșu).

Observarea 2. Inainte de a începe operaţiile pe sciot toate bilele trebue să fie aşezate pe partea dreaptă a aparatului pentru ca prin mutarea lor spre stânga să putem începe formarea numerelor. Operaţia mutării se începe cu bilele de ordinul cel mai mare. Numărul bilelor mutate în partea stângă corespunde cu numărul unităţilor ordinului respectiv, adică cu cifra care îl reprezintă.

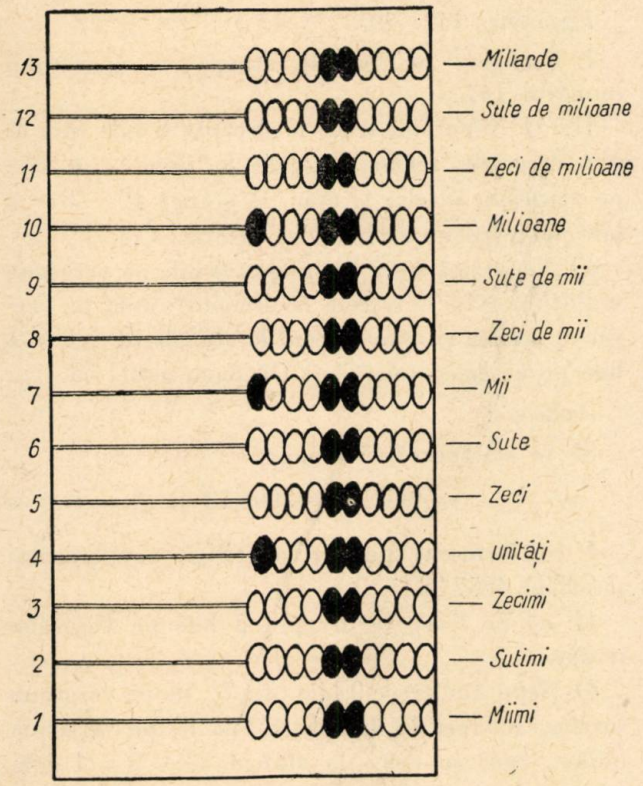


Fig. 2

Exemplu:

— 4 bile mutate spre stânga pe vergeaua ordinului miilor reprezintă 4000.

— 3 bile mutate spre stânga pe vergeaua ordinului sutelor reprezintă 300.

— 8 bile mutate spre stânga pe vergeaua ordinului zecilor reprezintă 80.

— 7 bile mutate spre stânga pe vergeaua unităţilor reprezintă 7.

— 2 bile mutate spre stânga pe vergeaua zecimilor reprezintă 0,2.

— 9 bile mutte spre stânga pe vergeaua ordinului sutimilor reprezintă 0,09.

Toate bilele enumerate mai sus mutate spre stânga reprezintă aşa dar, numărul 4387,29.

Observarea 3. Bilele nu se trec în stânga una câte una, ci deodată toate cele necesare de pe vergeaua ordinului respectiv.

Observarea 4. Dacă în numărul care trebue format există zerouri, se trece peste vergelele ordinelor respective.

Operaţia adunării

Pentru a aduna cu ajutorul sciotului mai multe numere, se procedează astfel: se formează pe aparat primul număr, aşa cum s'a arătat mai înainte, mutând bilele spre stânga, apoi, la unităţile mutate din toate ordinele se adaugă numărul unităţilor ordinelor corespunzătoare ale celui de al doilea număr tot prin deplasarea bilelor spre stânga; această operaţie se repetă pentru fiecare număr care trebue adunat.

Se citeşte la urmă suma, indicând numărul bilelor de pe vergea şi ordinul respectiv al acesteia.

De exemplu: Fie de adunat 2473 cu 6326.

Se procedează astfel:

— Se formează pe aparat numărul 2473 prin mutarea spre stânga a:

2 bile pe vergeaua ordinului miilor
4 bile pe vergeaua ordinului sutelor
7 bile pe vergeaua ordinului zecilor
3 bile pe vergeaua ordinului unităţilor.

— Se continuă mutarea spre stânga a:

6 bile pe vergeaua ordinului miilor
3 bile pe vergeaua ordinului sutelor
2 bile pe vergeua ordinului zecilor
6 bile pe vergeaua ordinului unităţilor

— Se citeşte rezultatul adunării numărând bilele pe fiecare vergea indicând şi ordinul respectiv avem:

8 bile pe vergeaua miilor
7 bile pe vergeaua sutelor
9 bile pe vergeaua zecilor
9 bile pe vergeaua unităţilor.

adică 8799.

Observarea 5. Dacă la adunarea numerelor, pe o vergea oarecare, nu avem bile suficiente, la dreapta pentru a le putea mişca la stânga în vederea adunării unităţilor, ordinelor corespunzătoare din cele două numere, se procedează astfel: se mută la stânga o bilă de pe vergeaua ordinului imediat superior şi apoi, se deplasează spre dreapta (se scade) pe vergeaua ordinului dat, diferenţa până la 10 a acelor unităţi.

Exemplu: Fie de adunat 289 + 937.

— Formăm pe aparat 289.

— Pentru a muta la stânga încă 9 bile de pe vergeaua sutelor, pe care nu dispunem decât de încă 8 bile, mutăm la stânga o bilă pe vergeaua miilor şi apoi mutăm la dreapta (10—9) o bilă pe vergeaua sutelor. Pentru a muta 3 bile pe vergeaua zecilor, pe care nu dispunem decât de încă două bile, mutăm la stânga o bilă pe vergeaua sutelor şi apoi, la dreapta 10 — 3 = 7 bile pe vergeaua zecilor; mutând la stânga 7 bile de pe vergeaua ordinului

unităților, nu mai dispunem decât o de o singură bilă de pe aceeași vergea; deaceea mutăm la stânga o bilă pe vergeaua zecilor și apoi la dreapta 10 — 7 = 3 bile pe vergeaua unităților.

Obținem astfel suma 1226.

Aplicație: Fie de adunat:

487,48 + 1875,38 + 21008,04

— Formăm primul număr 487,48 mutând spre stânga:

4 bile pe vergeaua sutelor
8 bile pe vergeaua zecilor
7 bile pe vergeaua unităților
4 bile pe vergeaua zecimilor
8 bile pe vergeaua sutimilor

— Adăugăm al doilea număr 1875, 38 astfel: mutăm spre stânga o bilă pe vergeaua miilor

Nedispunând de 8 bile pe vergeaua sutelor, mutăm o bilă pe vergeaua sutelor și scădem (mutăm la dreapta) 10 — 8 = 2 pe aceea a sutelor.

Nedispunând de 7 bile pe vergeaua zecilor, mutăm la stânga o bilă pe vergeaua sutelor și scădem (mutăm la dreapta) 10 — 7 = 3 bile pe aceea a zecilor.

Nedispunând de 5 bile pe vergeaua unităților, mutăm la stânga o bilă pe vergeaua zecilor și scădem (mutăm la dreapta) 10 — 5 = 5 bile pe vergeaua unităților.

Mutăm la stânga 3 bile pe vergeaua zecimilor. Neputând muta 8 bile pe vergeaua sutimilor, mutăm la stânga o bilă pe vergeaua zecimilor și scădem (mutăm la dreapta) 10 — 8 = 2 bile pe vergeaua sutimilor.

Adăugând și al treilea număr 21008,04 după procedeul arătat mai sus, obținem suma 23370,90.

Operația scăderii

Pentru a face scăderea cu ajutorul sciotului, se procedează invers ca la adunare, adică, prin deplasarea la dreapta aparatului a bilelor de pe diferite vergele și anume; după ce se formează pe aparat numărul descăzut, se scad din fiecare ordin al său atâtea bile câte are ordinul corespunzător al scăzătorului.

Exemplu 476—253.

I. Se formează pe aparat 476.

II. *a)* Se mută la dreapta două bile (din 4) de pe vergeaua sutelor;

b) se mută la dreapta 5 bile (din 7) de pe vergeaua sutelor;

c) se mută la dreapta 3 bile (din 6) de pe vergeaua unităților.

Obținem rezultatul 223.

Observare. Ca și la adunare, putem întâlni și aici cazul când nu avem suficiente bile la stânga, pe o anumită vergea, pentru a le trece la dreapta; în acest caz procedăm astfel: trecem la dreapta (scădem) o bilă de pe vergeaua ordinului imediat superior și trecem la stânga (adunăm) pe vergeaua dată un număr de bile egal cu diferența dintre 10 și acele unități.

Exemplu: 147—89.

I. Formăm pe partea stângă a aparatului numărul 147.

II. *a)* Neputând trece la dreapta 8 bile (din 4) din vergeaua zecilor, trecem la dreapta o bilă pe vergeaua sutelor și apoi, la stânga 10 — 8 = 2 bile pe vergeaua zecilor.

b) Neputând trece la dreapta 9 bile pe vergeaua unităților (din 7) trecem la dreapta o bilă pe vergeaua zecilor și apoi trecem la stânga 10 — 9 = 1 bile pe aceea a unităților. Obținem astfel 58.

Aplicație.

Să se efectueze scăderea:

4857,38 — 2909,43

I. Se formează pe partea stângă a aparatului numărul 4857,38.

II. *a)* Se trece la dreapta 2 bile pe vergeaua miilor.

b) Neputând trece 9 bile (din 8), de pe vergeaua sutelor, se trece la dreapta o bilă de pe vergeaua miilor, apoi se trece la stânga 10 — 9 = 1 bilă pe vergeaua sutelor.

c) Vergeaua zecilor rămâne neschimabtă.

d) Neputând trece la dreapta 4 bile (din 3) de pe vergeaua zecimilor se trece la dreapta o bilă de pe vergeaua unităților, apoi, se trece la stânga 10 — 4 = 6 bile pe vergeaua zecimilor.

e) Se trec la dreapta 3 bile (din 8) de pe vergeaua sutimilor.

Am găsit astfel diferența căutată: 1947,95.

Operația înmulțirii

Pentru a efectua înmulțirea cu ajutorul sciotului se procedează ca și la operația în scris. Se înmulțește pe rând fiecare cifră a înmulțitorului cu toate cifrele deînmulțitului și apoi se adună produsele parțiale obținute. Cu ajutorul sciotului se ușurează obținerea produselor parțiale căpătate prin înmulțirea unei cifre a înmulțitorului cu toate cifrele deînmulțitului. Suma produselor parțiale se obține automat la sfârșitul operației, când nu avem decât a citi rezultatul total. Avem astfel, un dublu ajutor folosind acest aparat, dar în schimb apare o greutate la formarea în mod just, pe aparat, a produselor

parţiale, adică marcarea diferitelor vergele care conţin aceste produse parţiale.

De exemplu 62×37

434
186
2294

Primul produs parţial are unităţile (4) pe vergeaua unităţilor aparatului, iar unităţile numărului 186 sunt pe vergeaua următoare, deoarece ele în realitate sunt zeci, aşa că, trebue să luăm măsuri pentru evitarea confuziei care ar rezulta aşezând unităţile numărului 186 pe altă vergea decât a doua.

Pentru remedierea acestui neajuns ne vom servi de un simplu artificiu în operaţia de deplasare a bilelor şi anume: ne vom servi, fie de un creion, fie de degetul arătător al mânei drepte. Rămâne să mai reamintim că produsele numerelor de câte o singură cifră pot fi numere de o cifră sau cel mult de două cifre.

Pentru înscrierea în mod just a produselor parţiale pe sciot ne vom servi de un creion sau de degetul arătător al mânei drepte pentru a marca vergeaua cu ordinul unităţilor în diferitele cazuri care se pot prezenta. După ce a fost bine aleasă vergeaua unităţilor, formăm pe aparat diferitele produse rezultate din înmulţirea cifrelor înmulţitorului cu acele ale deînmulţitului.

Exemplul I: 172×3.

a) $3 \times 2 = 6$. Marcăm cu creionul vergeaua unităţilor (aparatului) pe care formăm produsul 6, mutând la stânga aparatului 6 bile. Apoi deplasăm creionul pe vergeaua următoare (am avut un produs de o singură cifră).

b) $3 \times 7 = 21$, Pe vergeaua marcată cu creionul formăm 1, unităţile, mutând la stânga o bilă, apoi, pe vergeaua următoare formăm 2, zecile, mutând la stânga două bile şi rămânem cu creionul pe această vergea (am avut un produs cu două cifre).

c) $3 \times 1 = 3$. Formăm pe vergeaua marcată numărul 3, deplasând la stânga aparatului 3 bile pe această vergea.

Am obţinut pe aparat numărul 516, produsul căutat.

Exemplul II. 8146×349.

Se procedează precum urmează:

a) $9 \times 6 = 54$ Deplasăm la stânga pe vergeaua unităţilor aparatului 4 bile, iar pe cea următoare 5 bile şi rămânem cu creionul pe această vergea.

b) $9 \times 4 = 36$. Deplasăm 6 bile la stânga pe vergeaua marcată cu creionul şi apoi 3 bile pe cea următoare şi rămânem cu creionul pe această vergea. (Când nu avem suficiente bile la dreapta, procedăm ca la adunare, a se vedea mai sus).

c) $9 \times 1 = 9$. Deplasăm 9 bile la stânga şi mutăm creionul pe vergeaua următoare.

d) $9 \times 8 = 72$. Deplasăm 2 bile la stânga pe vergeaua marcată şi 7 bile pe cea următoare.

Am obţinut astfel primul produs parţial 73314.

Pentru formarea celui de al doilea produs parţial procedăm la fel.

Cu creionul vom marca la început vergeaua zecilor aparatului, ca fiind ordinul unităţilor în acest de al doilea produs.

Avem:

a) $4 \times 6 = 24$. Deplasăm la stânga aparatului 4 bile pe vergeaua marcată anterior, apoi două bile pe cea următoare şi menţinem creionul pe această vergea.

b) $4 \times 4 = 16$. Deplasăm 6 bile la stânga pe vergeaua marcată anterior, apoi mutăm o bilă la stânga pe vergeaua următoare şi menţinem creionul pe această vergea.

c) $4 \times 1 = 4$. Deplasăm patru bile la stânga pe vergeaua marcată anterior şi menţinem creionul pe această vergea.

d) $4 \times 8 = 32$. Deplasăm la stânga două bile pe vergeaua marcată, apoi două bile pe cea următoare şi menţinem creionul pe această vergea.

Am obţinut pe aparat suma primelor produse parţiale — 399154.

Pentru aflarea celui de al treilea produs parţial. procedăm la fel. Pornim cu creionul de pe vergeaua sutelor, ca ordinul unităţilor în acest produs.

Avem:

a) $3 \times 6 = 18$. Deplasăm la stânga 8 bile pe vergeaua marcată, apoi 1 bilă pe cea următoare, pe care ne oprim cu creionul.

b) $3 \times 4 = 12$. Deplasăm la stânga 3 bile pe vergeaua marcată, apoi 1 bilă pe cea următoare şi rămânem cu creionul pe această vergea.

c) $3 \times 1 = 3$. Deplasăm la stânga 3 bile pe vergeaua marcată şi mutăm creionul pe vergeaua următoare;

d) $3 \times 8 = 24$. Deplasăm la stânga 4 bile pe vergeaua marcată, apoi două bile pe cea următoare.

Am obţinut pe aparat suma celor 3 produse parţiale adică produsul total 2.842.954.

Observarea 1. In cazul când înmulţitorul are unul sau mai multe zerouri, se sare cu creionul un număr corespunzător de vergele.

Observarea 2. In cazul când printre cifrele înmulţitorului avem 1,2 sau 3, s'ar putea evita înmulţirea, formând pe aparat întregul deînmulţit odată, de două ori sau de trei ori cu unităţile pe vergelele marcate cu creionul ca în procedeul obişnuit.

Exemplu: 8273 × 123

1) se ţine creionul pe vergeaua unităţilor şi se formează 8273 de 3 ori cu unităţile pe această vergea, avem 24819;

2) se deplasează creionul pe vergeaua următoare şi se formează de două ori 8273 cu unităţile pe vergeaua marcată, avem deci 190279;

3) se deplasează creionul pe vergeaua următoare şi se formează 8273 cu unităţile pe această vergea; se citeşte pe aparat produsul total 1.017.579.

Observarea 3. In cazul când printre cifrele înmulţitorului avem 9; 8 sau 7, se poate proceda înmulţind deînmulţitul cu 10 şi apoi scăzând (trecând la dreapta) odată, de două ori sau de trei ori deînmulţitul dat cu unităţile pe vergelele corespunzătoare.

Exemplu: 185 × 87.

a) se marchează cu creionul vergeaua zecilor şi se formează 185 cu unităţile pe această vergea apoi se trece la dreapta (se scade) de trei ori numărul 185, unităţile fiind pe vergeaua unităţilor aparatului;

b) se marchează cu creionul vergeaua treia (a sutelor) şi se formează 185 cu unităţile pe această vergea şi apoi se trece la dreapta (se scade), de două ori 185 cu unităţile pe vergeaua precedentă, adică a zecilor. Obţinem pe aparat produsul 16075.

Artificiile de mai sus se vor folosi după ce s'a căpătat suficientă rutină, lucrând după procedeul obişnuit şi numai pentru un înmulţitor de o cifră sau de două cifre, altfel artificiul nu mai este practic.

Operaţia împărţirii

Pentru a efectua operaţia împărţirii cu ajutorul sciotului se procedează precum urmează.

a) Se determină exact prima cifră a câtului, folosind pentru aceasta şi cifra următoare a împărţitorului.

De exemplu:

13456: 479

Pentru a vedea dacă cifra 3 (13: 4 = 3) este cifra bună a câtului se face produsul 3 × 0,7 (7 este cifra a doua a împărţitorului, adică a zecimilor faţă de ordinul sutelor 4) avem: 3 × 4 + 3 × 0,7 = = 14,1, care neputându-se scădea din 13, rezultă că cifra 3 este prea mare, deci prima cifră a câtului este 2. Această cifră a câtului se formează pe ultima vergea de pe aparat sau se scrie pe hârtie.

b) Cifra exactă a câtului se înmulţeşte pe rând cu toate cifrele împărţitorului şi se scad produsele obţinute din deîmpărţit, care se găseşte format pe aparat. Scăderea se efectuează prin trecerea spre dreapta a bilelor ordinului respectiv aşa cum s'a procedat la scădere. Şi aici, ca şi la înmulţire se foloseşte creionul cu care se marchează vergeaua unităţilor, de unde se începe efectuarea primului produs. In cazul nostru a fost marcată vergeaua zecilor (cu 5 bile).

Se procedează precum urmează:

I. 1) 2 × 9 = 18. Se scade 18 din 45 (vezi scăderea) şi ne oprim cu creionul pe vergeaua lui 4.

2) 2 × 7 = 14. Se scade 14 începând cu unităţile pe vergeaua marcată şi ne oprim cu creionul pe vergeaua lui 3.

3) 2 × 4 = 8. Se scade 8 din numărul de pe vergeaua care este marcată cu creionul.

Avem astfel primul rest parţial 387.

II. Se consideră restul total 3876 şi se continuă împărţirea, operând ca mai sus.

3876: 479

a) 38: 4 = 9. Incercăm cifra 9, avem: 9 × 4 + 9 × 0,7 = 36 + 6,3 = 42,3, deci 9 este prea mare, atunci încercăm cifra 8 avem: 8 × 4 + 8 × 0,7 = 32 + 5,6 = 37,6, deci cifra 8 este cea căutată.

Inmulţim cifra 8, pe rând, cu cifrele împărţitorului.

b) 1. 8 × 9 = 72. Se scade 72 începând cu unităţile pe vergeaua marcată cu creionul (vergeaua unităţilor aparatului) şi ne oprim apoi cu creionul pe vergeaua lui 7.

2. 8 × 7 = 56. Se scade 56 începând cu unităţile pe vergeaua marcată şi apoi oprim creionul pe vergeaua lui 8.

3. 8 × 4 = 32. Se scade 32 începând cu unităţile pe vergeaua marcată, restul final este 44.

Rezultatul împărţirii este, câtul 28 şi restul 44.

Observare generală

Pentru a obţine maximum de eficacitate în folosirea sciotului trebue lucrat la început cu mare atenţie, punând accentul pe exactitate, rămânând ca, pe măsura obţinerii deprinderilor, să căutăm a mări şi viteza în operaţiile aritmetice pe care le avem.

CHESTIUNI DE CONCURS

Problemele date la etapa I-a din 26 Aprilie 1953, a concursului de matematici organizat de Societatea de Ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. şi Facultatea de Matematică şi Fizică a Universităţii C. I. Parhon, în regiunea Cluj [1])

Clasa VIII-a

904. Un grup de 15 elevi şi eleve plecaţi în excursie, iau masa la un restaurant. Elevii cheltuiesc în total 36 lei, iar elevele cheltuiesc deasemenea 36 lei. Ştiind că fiecare elevă cheltuieşte cu 2 lei mai puţin decât un elev, se cere numărul elevilor şi elevelor precum şi preţul mesei pentru fiecare.

***

905. O grădină a unei gospodării agricole colective are forma unei pătrat $ABCD$ cu latura de 400 m. Pentru irigarea grădinii se construieşte un sistem de canale astfel:

— Primul canal uneşte A cu mijlocul R al laturei CD:

— Cel de al doilea, uneşte B cu mijlocul S al laturii AD;

— Cel de al treilea uneşte C cu mijlocul P al laturii AB:

— Cel de al patrulea uneşte D cu mijlocul Q a laturii BC.

a) Să se arate că direcţiile a două canale sunt perpendiculare pe direcţiile celorlalte două.

b) Să se calculeze ariile parcelelor determinate de aceste canale.

Clasa IX-a

906. Să se arate că dacă numerele

$$\frac{1}{b-a},\ \frac{1}{2b},\ \frac{1}{b-c},$$

sunt în progresie aritmetică, atunci numerele a, b, c sunt în progresie geometrică.

***

907. Dintr'un triunghiu ABC, se duce bisectoarea unghiului A care taie latura opusă în punctul D. Pe latura AB şi pe prelungirea ei se iau $BE = BE' = BD$. La fel pe latura AC şi pe prelungirea ei se iau $CF = CF' = CD$.

a) Să se arate că EF şi $E'F'$ sunt paralele cu BC.

b) Să se demonstreze că triunghiul AED şi triunghiul ADF' precum şi triunghiul AFD şi triunghiul ADE' sunt asemenea şi să se deducă relaţiile:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{AF'};\quad \overline{AD}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AE'}.$$

Clasa X-a

908. Să se rezolve ecuaţia trigonometircă:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

***

909. Intr'un tetraedru regulat $VABC$ se iau mijloacele M şi N ale muchiilor VA şi BC.

a) Să se arate că dreapta MN şi înălţimea tetraedrului coborîtă din V sunt 2 drepte situate în acelaş plan.

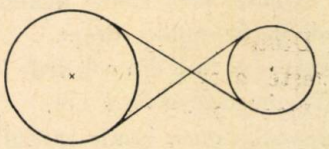
b) Să se arate că dreapta MN este perpendiculara comună a muchiilor VA şi BC.

c) Să se calculeze sinusul unghiului plan format de 2 feţe ale tetraedrului.

Clasa XI-a

910. O maşină prevăzută cu 2 roţi legate printr'o curea de transmisiune ca sensurile de rotaţie ale roţilor să fie contrarii (a se vedea figura alăturată).

Se cere lungimea curelei, ştiind că distanţa dintre axele roţilor este 12 dm, iar razele lor sunt de 15 cm şi 45 cm.



911. Se dă pătratul $ABCD$ şi pe laturile lui se iau punctele M, N, P, Q, Astfel că $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CD} = \overline{DQ}$.

a) Să se arate patrulaterul $MBPQ$ este un pătrat având centrul O, în centrul pătratului $ABCD$.

b) Să se arate că dreptele MC şi ND sunt perpendiculare. Deasemeni dreptele DM, AN, sunt perpendiculare.

c) Să se arate că patrulaterul $OMBN$ este inscriptibil.

d) Să se deducă că mijloacele segmentelor AB, MN, BC sunt colineare.

ANUL I ŞCOLI PEDAGOGICE

912. O cooperativă are o cantitate dintr'o marfă al cărui preţ unitar nu se cunoaşte. Dacă s'ar

[1]) La problemele 904—917 se primesc soluţii fiind socotite ca probleme propuse.

vinde kgr. cu 1,80 lei, atunci valoarea totală a marfei ar fi cu 20 lei mai mare decât valoarea reală. Dacă s'ar vinde cu 1,50 lei kgr, atunci valoarea obținută ar fi cu 25 lei mai mică decât valoarea reală. Se întreabă ce cantitate de marfă a avut cooperativa și care este prețul ei unitar.

Să se rezolve problema și aritmetic.

***

913. Pe laturile unui paralelogram $ABCD$ se construiesc în exteriorul acestuia 4 patrate. Notând cu $EFGH$ centrele patratelor construite respectiv pe laturile AB, BC, CD, DA, să se arate că:

1) triunghiurile AEH, EBF, FCG, GDH sunt egale.

2) patrulaterul $EFGH$ este un patrat.

ANUL II ȘCOLI PEDAGOGICE

914. Un ceasornic C_1 întârzie 10 minute pe zi, un al doilea ceasornic C_2, grăbește cu 15 minute pe zi, iar la treilea ceasornic C_3, întârzie 30 secunde pe oră.

Presupunând că au fost puse toate la ora exactă, 12, se întreabă peste cât timp vor arăta din nou toate, aceiași oră exactă.

***

915. Dintr'o foaie de carton dreptunghiulară se construește o cutie fără capac având forma unui paralelipiped dreptunghic drept.

Pentru aceasta se taie din colțurile foii de carton câte un patrat cu latura de 1 cm.

Să se găsească dimensiunile inițiale ale foii de carton știind că lungimea ei este cu 2 cm mai mare decât lățimea, iar volumul cutiei este 7,92 dm^3.

ANUL III ȘCOLI PEDAGOGICE

916. In trei vase se află cantități necunoscute de apă. Din primul vas scotem o treime din apă și o vărsăm în al doilea; apoi din al doilea scoatem o pătrime din apă și o vărsăm în al treilea; în sfârșit din al treilea scoatem o zecime și o vărsăm în primul vas. Știind că după aceste operații fiecare vas conține 9 litri apă, se cere să se afle cantitatea de apă conținută la început de fiecare vas.

***

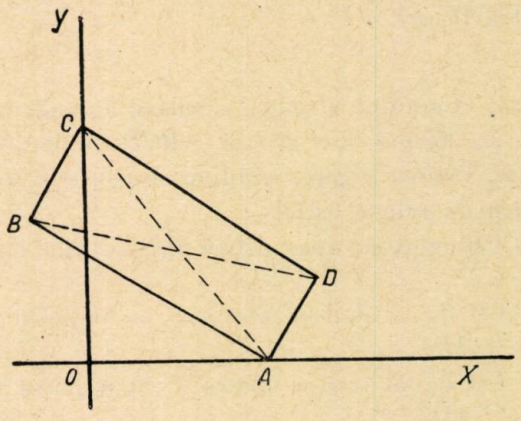
917. Un pahar are forma unui con circular drept cu raza bazei de 5 cm. și înălțimea de 8 cm. In pahar se toarnă apă până la înălțimea de 6 cm, apoi si introduce în pahar o bilă sferică de metal cu raza de 2 cm. Se întreabă cu cât s'a ridicat nivelul apei din pahar.

PROBLEMELE DE MATEMATICI DATE LA ETAPA I-a LA 26 APRILIE 1953 ÎN REGIUNEA IAȘI [1])

Clasa VIII-a

918. OX și OY fiind două drepte perpendiculare se consideră toate dreptunghiurile $ABCD$ care au, vârful A pe OX, vârful C pe OY, și raportul laturilor constant: $\frac{AB}{BC} = k$. Se cere:

a) Locul vârfurilor B și D.



b) Dintre toate dreptunghiurile precedente se consideră acelea care au dimensiuni date. Locul centrelor.

***

919. Brigadierii unei echipe de muncă, întrecându-se între ei pentru depășirea planului efectuiază zilnic cu 1/30 de lucrare în plus decât le este norma. In modul acesta ei termină lucrarea cu 5 zile înainte de termen. Se cere a se afla numărul de zile în care ar fi terminat lucrarea dacă ar fi lucrat conform normei.

Să se generalizeze problema.

***

Clasa IX-a

920. O hidrocentrală (H) trebue să alimenteze cu energie electrică o gospodărie colectivă (G) aflată în același unghiu a două șosele perpendiculare ca și hidrocentrala; alimentarea trebue să se facă prin două stații de transformare A și B, care se află pe câte una din cele două șosele.

In acest scop un cablu va lega hidrocentrala cu cele două stații de transformare în continuare, și apoi tot în continuare cu gospodăria.

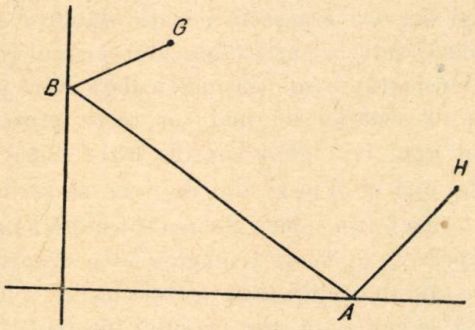
---

[1]) La problemele 918–928 se primesc soluții fiind socotite ca probleme propuse.

Se cere să se afle:

a) Locul așezării pe cele două șosele a celor două stații cu condiția de a face cea mai mare economie în lungimea cablului.

b) Dacă H și G sunt determinate prin distanțele lor în km la cele două șosele, astfel: H (4, 2) și G (1,3), să se afle lungimea cablului, precum și unghiurile lui față de cele două șosele.



c) Să se generalizeze problema, fixându-se pentru H și G poziții generale în unghiul condiderat.

***

921. Termenii unei progresii geometrice sunt așezați în modul următor.:

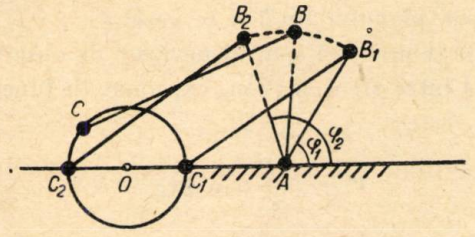
$$a$$
$$a\,q,\quad a\,q^2$$
$$a\,q^3,\ aq^4,\ a\,q^5$$
$$\cdot\ ,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Să se calculeze suma și produsul termenilor din linia de rang p.

***

Clasa X-a

922. Un mecanism este format din: o roată de rază r cu centrul fix O, biela BC și balansierul AB care oscilează în jurul punctului fix A. Se cunosc lungimile $OA = m$ și R ($R < m$), precum și unghiurile φ_1 și φ_2 formate de balansier cu prelungirea bazei OA, când C vine pe segmentul AO sau pe prelungirea lui ($O < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$).



Se cere:

a) Să se calculeze lungimile $a = AB$ și $b = BC$.

b) Să se construiască grafic aceste lungimi.

c) Condiția de posibilitate a problemei.

***

923. Să se rezolve:

$$4 \cos 2x + 3 \operatorname{tg}^2 x = 3.$$

Clasa XI-a

924. Se consideră o placă de sticlă, în formă de cerc. Pe o dreaptă perpendiculară pe planul acestui cerc în centru sunt situate două surse S_1 și S_2 care emit lumină în toate direcțiile (în mod uniform). Fie q cantitatea de lumină emisă pe secundă de surse. Apoi fie α_1 și α_2 unghiurile sub care se vede din S_1 și S_2 un diametru al plăcii.

a) Ce realație trebue să existe între α_1 și α_2 pentru ca pe placă să cadă pe secundă cantitatea de lumină Q.

b) Știind că unghiul sub care se vede de pe conturul plăcii segmentul $S_1 S_2$ este θ, să se afle α_1 și α_2, și minimul valorii Q.

c) Să se discute soluțiile atunci când $\alpha_1 = 2\,\alpha_2$.

(Intrebările *b* și *c* sunt independente între ele).

***

ANUL I ȘCOLI PEDAGOGICE

925. Trei țesătoare stahanoviste dela Fabrica «Țesătura» Iași, lucrând în Martie 1952, prima la 20 războaie, a doua la 19 războaie și a treia la 16 războaie, au produs zilnic 1308 metri pânză.

In Iulie, prima mai trece la 2 războaie, a doua la încă 5 războaie și a treia la încă 6 războaie și produc zilnic 1610 m. pânză.

In Martie 1953, lucrând toate trei la câte 24 războaie, au produs zilnic 1704 m pânză.

Știind că fiecare țesătoare și-a menținut tot timpul productivitatea la un războiu, să se afle aritmetic și algebric câți metri produce fiecare țesătoare la câte un războiu.

Să se calculeze creșterea salariului zilnic al fiecărei țesătoare în Martie 1953 față de Martie 1952, dacă lucrul a 100 m pânză se plătește cu 17,50 lei.

***

ANUL II ȘCOLI PEDAGOGICE

926. Două vase V și V', cu pereții laterali verticali, conțin apă până la înălțimile H și h' respectiv. Se toarnă apă din V în V' până la înălțimea H; atunci nivelul apei în V coboară la h. Până la ce înălțime trebue turnată apă din V' în V sau din V în V' pentru ca cele două vase să conțină cantități egale de apă?

***

927. Un stâlp vertical AB este ancorat în punctele B și C prin câte 3 cabluri fixate în trei puncte M, N, P ce formează un triunghi echilateral cu

centrul în piciorul A al stâlpului. S'a măsurat lungimea $MN = 18$ m și unghiurile $AMC = 45°$ și $AMB = 60°$. Să se calculeze lungimea cablului necesar pentru ancorarea stâlpului.

***

ANUL III PEDAGOGICE

928. Un rezervor de înălțime 10,5 m este format din un cilindru de rază 7,5 m terminat cu un segment sferic având înălțimea egală cu 2/5 din raza sferei din care face parte. In cât timp va fi umplut rezervorul de un robinet cu orificiul circular de rază 1,5 cm, viteza curentului fiind de 20 m pe minut?

***

PROBLEMELE DE MATEMATICI DATE LA ETAPA I-a LA 26 APRILIE 1953 IN REGIUNEA TIMIȘOARA [1])

Clasa VIII-a

929. Se dă ecuația:

$$\frac{x+3+\sqrt{6}}{x-3+\sqrt{6}} - \frac{x-m}{x+m} + \frac{x+3-\sqrt{6}}{x-3-\sqrt{6}} = 1$$

și se cere:

a) Să se determine m astfel încât produsul rădăcinilor acestei ecuații să fie egal cu -5.

b) Să se rezolve complect ecuația de mai sus pentru valoarea găsită a lui m și să se verifice apoi rădăcinile respective.

c) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{y}{2} + \frac{1}{y} = x$$

unde x are ca valoare una sau alta din rădăcinile ecuației precedente.

d) Să se pună rădăcinile ecuației dela punctul *c)* sub forma cea mai simplă.

***

930. Un triunghiu oarecare ABC are laturile: $a = BC = 21$ m; $b = CA = 17$m; $c = AB = 10$ m

a) Să se demonstreze că unghiul A al acestui triunghiu este obtuz și să se calculeze proecția laturii AB pe AC și înălțimea BE coborîtă din vârful B pe latura AC.

b) Prin B se duce paralela BD la AC și se ia $CD = AB$, astfel ca să se formeze un trapez isoscel. Să se afle aria trapezului $BACD$.

c) Să se determine valoarea raportului în care punctul I de intersecție a diagonalelor BC și AD împarte fiecare din diagonale calculându-se apoi mărimea segmentului MN cuprins între laturile neparalele, dus prin I, paralel cu bazele.

Clasa IX-a

931. Se consideră ecuația trigonometrică

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5$$

și se cere:

a) Să se rezolve această ecuație dându-i soluția generală și soluția particulară din primul cadran.

b) Considerând soluția particulară din primul cadran al ecuației de mai sus, care prezentând unghiul unui triunghiu cuprins între două laturi ale sale una de 4 m și alta de 5 m, să se demonstreze fără a folosi chiar valoarea calculată a unghiului respectiv, că acest triunghiu este dreptunghic și să se afle în același timp a treia latură a lui.

c) Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul considerat la punctul precedent și să se determine segmentele pe care punctele de tangentă le determină pe laturile respectiv corespunzătoare.

***

932. *a)* Să se afle valoarea expresiei:

$$\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}\ldots$$

b) Să se afle valoarea expresiei:

$$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}}}}}}\ldots$$

c) Să se generalizeze acest calcul, aflând valoarea expresiei:

$$\sqrt[n]{a_1\sqrt[n]{a_2\ldots\sqrt[n]{a_k\sqrt[n]{a_1\sqrt[n]{a_2\ldots\sqrt[n]{a_k}}}}}}\ldots$$

d) Să se verifice cu ajutorul formulei găsite la punctul 3 rezultatele dela punctele *a)* și *b)*.

Clasa X-a

933. Un observator situat pe verticala centrului unei sfere, așezată pe un plan oirzontal, vede sfera sub unghiul $2a$. Inălțimea observatorului deasupra planului fiind h se cere:

a) Să se arate că spațiul nevăzut de observator, cuprins între sferă și plan, exprimat în funcție de a și h, este:

$$V = \frac{\pi h^3}{3} \sin a \operatorname{tg}^2 a$$

b) Să se determine unghiul a astfel încât volumul aflat să fie $\frac{\pi h^3}{18}$.

$\left(\text{Se va face substituția } \sin a = \frac{1}{x}\right)$.

[1]) La problemele 929—942 se primesc soluții fiind socotite ca probleme propuse.

c) Să se calculeze, pentru valoarea lui a mai sus determinată, bazându-ne pe considerații pur geometrice, volumul spațiului nevăzut în funcție de raza sferei.

***

934. Se cere să se afle valorile arcului x pentru care numerile $\sin x$, $\sin\frac{3x}{2}$, $\sin 3x$ formează o progresie geometrică. Să se afle rația progresiei și să se verifice.

Clasa XI-a

935. La două cercuri tangente exterior se duc tangentele comune exterioare. Se cere:

a) Să se arate că semilungimea tangentei comune, mărginită la punctul de contact este media geometrică a razelor cercurilor, iar distanța punctului de contact al cercurilor la una din tangentele comune este media armonică a razelor sau a patra proporțională între raze și semisuma razelor cercurilor.

Să se deducă din figura formată că media geometrică este mai mare decât media armonică.

b) Să se exprime aria trapezului format de cele două tangente și coardele de contact în funcție de razele cercurilor.

c) Să se afle locul geometric al punctului de contact al cercurilor cunoscând poziția punctelor de contact ale lor cu una din tangentele exterioare și presupunând lungimea razelor variabilă, apoi să se construiască cele două cercuri, dat fiind și raportul razelor.

936. Se dă expresia binomială:

$$\left(a-\frac{a^{-2}+a^{-\frac{3}{2}}-a^{-1}}{-a^{2}+a^{\frac{3}{2}}+a}\right)^{16}$$

a) Să se calculeze coeficientul binomial al lui a^4.

b) Utilizând calculul cu numere imaginare să se calculeze puterea pentru $a = 1 + i$.

(Se va folosi și forma trigonometrică).

ANUL I ȘCOLI PEDAGOGICE

937. Intr'o gospodărie agricolă de stat s'a recoltat de pe două parcele 3297 q. grâu, câte 23 q și 55 kg la hectar. De pe prima parcelă s'a recoltat cu 942 q mai mult decât pe de a doua parcelă. A treia parte din recoltă se oprește pentru sămânță, iar a 21-a parte din recoltă se repartizează SMT-ului pentru muncile agricole prestate. Restul de grâu se întrebuințează pentru fabricarea pâinii. Știind că dintr'un kg de grâu se scot 900 grame de făină, iar dintr'un kg de făină se fac 1,200 kg pâine, se întreabă:

a) Care este cantitatea de pâine fabricată?

b) Care este suprafața fiecăreia din cele două parcele de pe care s'a recoltat grâul.

***

938. *a)* Intr'un triunghiu dreptunghiu ipotenuza BC întrece o catetă cu 6 cm și pe cealaltă catetă cu 12 cm. Să se afle cele trei laturi.

b) Dacă se prelungește una din catete cu 30 cm cu cât trebue prelungită cealaltă catetă pentru a obține un triunghiu asemenea cu cel dat.

c) Să se calculeze înălțimea corespunzătoare ipotenuzei triunghiului obținul la punctul *a)*.

***

ANUL II ȘCOLI PEDAGOGICE

939. La fabrica de marmeladă «Refacerea» s'a fabricat gem din 3 tone caise. Prin curățirea de coji și sâmburi s'au pierdut 3/5 din cantitatea adusă. Adăugându-se zahărul necesar la caisele curățite, s'a obținut un amestec de 3150 kg. S'a constatat că în urma fierberii din fiecare 5 kg de amestec s'au obținut 3 kg gem, care s'a pus în 2200 borcane de două feluri, cu capacitatea de 1/2 litru și 7/10 litru. Litrul de gem cântărește 1/2 kg.

Se cere:

a) Cât zahăr s'a pus la fiecare kg de caise curățite?

b) Câte borcane de 1/2 litru și câte de 7/10 litru s'au umplut?

c) Ce greutate are gemul dintr'un borcan de 1/2 litru și din cel de 7/10 litru? ***

940. O piramidă are ca bază un dreptunghiu iar înălțimea ei cade în punctul de întâlnire a diagonalelor dreptunghiului.

Se dau: înălțimea piramidei h, suprafața S a secțiunii plane ce trece prin vârf și una din diagonalele bazei. Dimensiunile dreptunghiului fiind în raportul de 1/2, să se afle:

a) Dimensiunile dreptunghiului dela bază.

b) Volumul piramidei.

c) Aplicație $h = 8$ cm, $S = 80$ cm.

ANUL III ȘCOLI PEDAGOPICE

941. La ora 7 dimineața pleacă din gara A spre C, capitala țării, un tren al cărui viteză este de 65 km/oră. El se întâlnește în C, la ora 14 și 30 minute cu un alt tren ce vine din direcția opusă și

a plecat din gara B situată la distanța de 604,5 km de A, la ora 12 și 15 minute (amiază).

Pe aceste direcții circulă zilnic 4 trenuri pe distanța AC și 6 trenuri pe distanța BC. Locomotivele celor 10 trenuri consumă 3,978 tone cărbuni pe zi (cărbunele se repartizează proporțional cu lungimea drumului parcurs).

Se cere:

a) Viteza trenului al doilea.

b) Cantitatea de cărbuni repartizată fiecărei locomotive pentru dus și întors.

c) Care este consumul unei locomotive pentru un km. de drum.

***

942. Generatoarea unui con circular drept este de 6 cm, iar lungimea cercului de bază este de 18,84 cm. In acest con este înscris un cilindru echilateral.

Se cere:

a) Inclinarea generatoarei pe planul bazei (geometric).

b) Raza cilindrului înscris.

c) Raportul volumelor celor două corpuri.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 472

Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$3x^2 - 2y^2 = 1.$$

Ea ne dă soluțiile problemei: să se afle un număr întreg astfel încât adăugând 1 la dublul și triplul lui, să obținem patrate.

Virgil Claudian

Soluție. O soluție a ecuației fiind $x^2 = 1$; $y^2 = 1$ rădăcinile sunt de forma [1]):

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \pm 2t \\ y^2 &= 1 \pm 3t \end{aligned} \qquad (1)$$

ceeace justifică partea a doua din enunțul problemei.

x^2 fiind impar (t întreg, pozitiv) iar y^2, nedivizibil prin 3, rezultă că, pentru același t, x și y sunt de forma

$$x = 2n \pm 1$$

$$y = 3n \pm 1$$

Inlocuind pe rând x și y în relațiile (1) și egalând valorile lui t obținem:

$$n = 0; \quad n = 4 \quad \text{și} \quad n = -4$$

iar pentru x și y valorile:

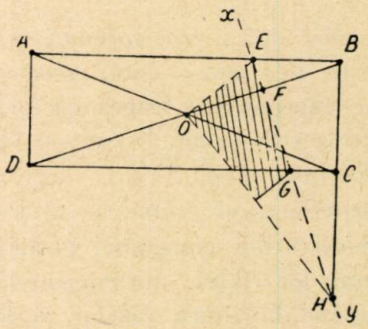
$$x = \pm 1,\ y = \pm 1 \quad \text{și} \quad x = \pm 9,\ y = \pm 11.$$

Problema 481

Se îndoiește o placă dreptunghiulară de dimensiuni a *și* b (a > *b*) *astfel ca unul din vârfuri să ajungă în centrul plăcii. Se cer ariile celor două figuri obținute prin îndoire.*

Ilie Loziciu

Soluție. Fie $ABCD$ placa dreptunghiulară ($AD = BC = b$; $AB = CD = a$) de centru 0. Pentru ca vârful B, de ex., să ajungă în centrul plăcii,



placa trebue îndoită dealungul mediatoarei xy a lui OB.

Fie E, F, G, H respectiv intersecțiile dreptei xy cu AB, OB, CD, BC.

Triunghiurile dreptunghice ABD și BFH sunt asemenea având $\sphericalangle FHB = \sphericalangle ABD$ ca unghiuri cu laturile perpendiculare.

Prin urmare:

$$\frac{BF}{b} = \frac{BH}{BD}, \quad BH = \frac{a^2 + b^2}{4b}$$

deoarece $BD = 4\,BF = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Mai departe, vom deosebi două cazuri

$$1°)\ BH > b \quad , \quad 2°)\ BH < b$$

ceeace revine la 1°) $b\sqrt{3} < a < \infty$, 2°) $b < a < 3b$.

In primul caz avem:

$$CH = BH - b = \frac{a^2 - 3b^2}{4b}$$

[1]) Algebră, manual unic, cl. X-a medie, pag. 136.

și deoarece triunghiurile ABD, CHG și BEA sunt asemenea, avem:

$$\frac{S_{CHG}}{S_{ABD}} = \frac{CH^2}{AB^2}\,; \quad \frac{S_{BEH}}{S_{ABD}} = \frac{BH^2}{AB^2}$$

$$S_{CHG} = \frac{\frac{ab}{2}\cdot\left(\frac{a^2-3b^2}{4b}\right)^2}{a^2} = \frac{(a^2-3b^2)^2}{32\,ab}$$

$$S_{BEH} = \frac{\frac{ab}{2}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{4b}\right)^2}{a^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{32\,ab}.$$

Prin urmare:

$$S_1 = S_{EBCG} = S_{EBH} - S_{CHG} = \frac{b\,(a^2-b^2)}{4a}$$

$$S_2 = S_{AEGD} = ab - \frac{b\,(a^2-b^2)}{4a} = \frac{b\,(3a^2+b^2)}{4a}.$$

In al doilea caz, când H este între B și C,

$$S_1 = S_{BEH} = \frac{(a^2+b^2)^2}{32\,ab}$$

$$S_2 = ab - S_{BEH} = \frac{30\,a^2b^2-(a^4+b^4)}{32\,ab}.$$

Problema 492

In circuitul unui curent alternativ a cărui f.e.m. este de 120 volți sunt legate în serie: un bec electric ce prezintă o rezistență de 120 ohmi, un condensator de 9 microfarazi și o bobină a cărei rezistență este de 80 ohmi și inductanța proprie 1 henry. Pulsația curentului este de 800. Să se determine:

a) *impedanța circuitului* b) *factorul de putere* c) *puterea medie* d) *ce fenomen are loc dacă se micșorează la jumătate capacitatea condensatorului?*

Virgil Atanasiu

Soluție. $R = 120 + 80 = 200$ ohmi; $\omega = 800$; $L = 1$ henry; $C = 9\cdot10^{-6}$ farazi; $U = 120$ volți.

a) $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 690$ ohmi;

b) $\cos\varphi = \frac{R}{Z} \cong 0{,}29$;

c) $P = UI\cos\varphi = \frac{U^2}{Z}\cos\varphi = 6{,}03$ watt.

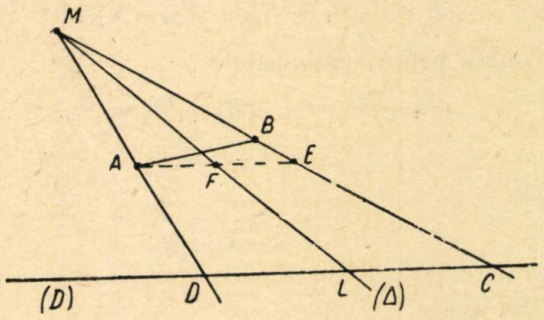
d) Impedanța scade la 559 ohmi.

Problema 500

Se dau: o dreaptă fixă (D) și două puncte fixe A, B așezate de aceeași parte a dreptei (D). O altă dreaptă (Δ) întâlnește pe (D) în punctul L. Să se determine poziția punctului M pe dreapta (Δ) astfel ca dreptele AM și BM să întâlnească dreapta (D) în două puncte egal depărtate de L. Se va face discuția după pozițiile posibile ale dreptei (Δ).

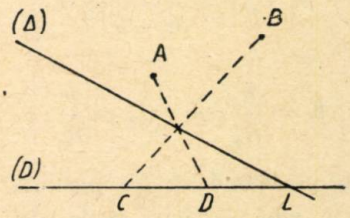
Gh. D. Simionescu

Soluție. Presupunem problema rezolvată, adică am găsit un punct M pentru care $LC = LD$. Ducând din A, $AE//(D)$ putem scrie



$$\frac{AF}{DL} = \frac{FE}{LC}$$

și cum $DL = LC$, rezultă $AF = FE$. Construcția rezultă imediat: ducem $AF//(D)$ până taie (Δ) în F apoi prelungim AF cu o lungime egală FE. Dreapta BE taie (Δ) în M.

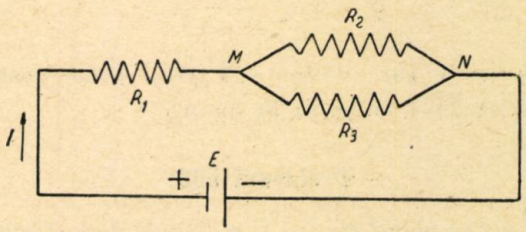


Problema este posibilă numai când (Δ) taie AB între A și B. In caz contrar punctele C și D sunt ambele de aceeași parte a punctului L.

Când (Δ) trece prin mijlocul lui AB, $BE//(\Delta)$ iar M este situat la infinit.

Problema 521

Se constitue următorul circuit



în care:

$$E = 6v, \quad R_1 = 2\Omega, \quad R_2 + R_3 = 4\Omega,$$
$$V_M - V_N = 2v, \quad R_i = 0{,}5\Omega.$$

1. *Se cere să se calculeze: I (intensitatea curentului principal), I_1 și I_2 (intensitățile curenților derivați), R_2 și R_3.*

2. *Să se arate ce condiții trebue să îndeplinească suma $R_2 + R_3$ pentru ca problema să fie posibilă.*

O. Florescu

Soluție. Să rezolvăm mai întâi această problemă în cazul general. Avem

$$E = I(R_i + R_1) + V_M - V_N.$$

Notăm pentru prescurtare

$$R_i + R_1 = a, \quad R_2 + R_3 = S,$$
$$V_M - V_N = b,$$

deci

$$I = \frac{E-b}{a} \text{ Amperi.}$$

Mai avem

$$b = I \cdot \frac{R_2 R_3}{S}$$

de unde

$$R_2 R_3 = \frac{a\ b\ S}{E-b}.$$

R_2 și R_3 sunt rădăcinile ecuației în x

$$x^2 - Sx + \frac{a\ b\ S}{E-b} = 0. \qquad (1)$$

Apoi

$$I_1 = \frac{b}{R_2} \quad \text{și} \quad I_2 = \frac{b}{R_3}.$$

Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca ecuația (1) să aibă rădăcini reale, deci ca

$$S^2 - \frac{4abS}{E-b} \geqslant 0.$$

Cum $S > 0$, această condiție se reduce la

$$S \geqslant \frac{4\ a\ b}{E-b}.$$

In cazul numeric dat de problemă avem

$$S = 4 \leqslant \frac{4\ a\ b}{E-b} = 5.$$

In acest caz diferența $V_M - V_N$ nu poate fi egală cu $2V$ cum se dă în enunț.

Problema 533

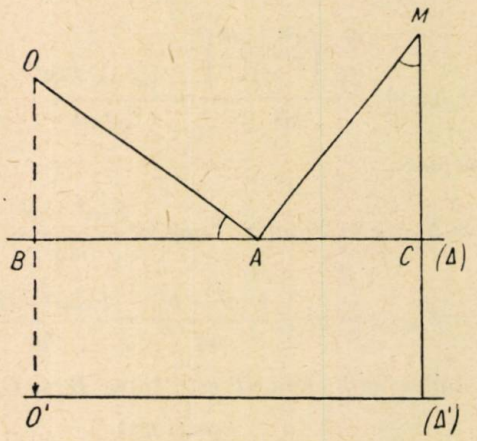
Fie O un punct fix și (Δ) o dreaptă dată. Dintr'un punct A situat pe (Δ) se duce AM egală cu AO și perpendiculară pe OA. Se cere locul lui M când A variază pe dreapta dată.

N. Gaiu

Soluție. Prin O' simetricul lui O față de (Δ) ducem dreapta $(\Delta') \parallel (\Delta)$.

Fie B și C respectiv proecțiile lui O și M pe (Δ).

Deoarece triunghiurile OAB și AMC sunt egale, $(OA = AM,\ \sphericalangle OAB = \sphericalangle AMC)$, distanța BC este egală cu $MC + OB$. Cum distanța dintre (Δ) și (Δ') este egală cu OB, rezultă că distanța lui M la (Δ') este egală tot cu $MC + OB$.



Locul lui M este deci format de bisectoarele unghiului OO', (Δ') în întregime, căci A descrie întreaga dreaptă (Δ) iar un alt punct, M' simetricul lui M față de A poate fi determinat, de cealaltă parte a dreptei (Δ).

Problema 556

Un atom de heliu ionizat are un electron pe prima orbită de rază 0,26 Å. Să se calculeze forța electrostatică cu care se atrag nucleul și electronul, precum și forța cu care s'ar atrage masele lor dacă n'ar fi electrizate. Se dă masa nucleului de heliu $3{,}34 \cdot 10^{-24}$ gr și constanta atracției universale $6{,}67 \cdot 10^{-8}$.

Nicolae Stănescu

Soluție. Sarcina electronului este $0{,}48 \cdot 10^{-9}$ ues CGS și deci a nucleului de He, $0{,}96 \cdot 10^{-9}$ ues CGS. Prin urmare forța electrostatică căutată va fi:

$$F = \frac{2 \cdot 0{,}48^2 \cdot 10^{-18}}{(0{,}26 \cdot 10^{-8})^2} \text{ dyne}$$
$$F = 1{,}772 \text{ dyne.}$$

Masa electronului este $0{,}91 \cdot 10^{-27}$ gr., deci forța de atracție gravitațională între cele două particule va fi:

$$F_1 = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{3{,}34 \cdot 10^{-24} \cdot 0{,}91 \cdot 10^{-27}}{(0{,}26 \cdot 10^{-8})^2}$$
$$F_1 = 3 \cdot 10^{-41} \text{ dyne.}$$

Problema 582

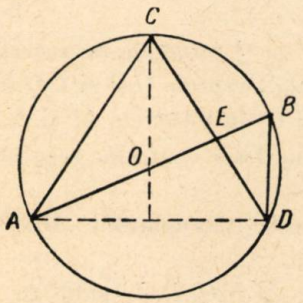
Se dă un cerc de diametru AB *și coardele egale* AC *și* CD, *punctele* C *și* D *fiind de o parte și de*

alta a diametrului AB·E *fiind intersecția* (AB, CD) *să se arate că*

$$\overline{AE} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{AB}^2 = 4\,\overline{CE} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CD}^2$$

Păun D. Nicolae
student, București

Soluție. Fie 0 centrul cercului. Din asemănarea triunghiurilor *ACE* și *EBD* obținem:



$$\frac{AE}{ED} = \frac{CE}{BE} = \frac{AC}{BD}$$

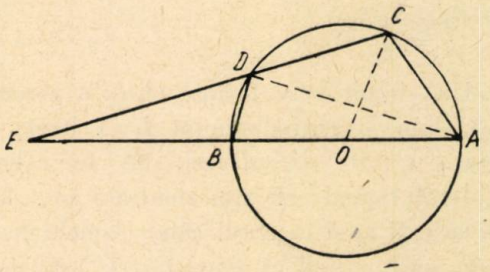
și cum produsul primelor două rapoarte este egal cu patratul celui de al treilea, rezultă

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BD}^2} \qquad (1)$$

Mai observăm că *C* fiind mijlocul arcului *ACD*, *OC* este perpendicular pe *AD*, și cum unghiul *ADB* este drept, rezultă *OC*//*BD*. Deci putem scrie

$$\frac{ED}{CE} = \frac{BD}{OC} \qquad (2)$$

Inmulțind relația (1) cu relația (2) ridicată la patrat și ținând seamă că $\overline{AC} = \overline{CD}$ și $\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, obținem relația cerută.



Observare. Relația este adevărată și când punctele *C* și *D* sunt de aceeași parte a diametrului *AB*.

PROBLEME PROPUSE

877. Intr'un cilindru închis cu un piston există 0,5 kg aer la o presiune efectivă de 2,066 kg/cm² și la o temperatură de 5° C. Se furnizează acestei cantități de aer o cantitate de căldură de 60 kcal și se menține tot timpul aceiași presiune. Se întreabă care este temperatura finală a aerului și lucrul mecanic util produs, cunoscând căldura specifică a aerului sub presiune constantă $C_p = 0{,}24$ kcal/kg și constanta sa $R = 29{,}27$.

C. Dragomir
elev, Pitești

878. Care sunt laturile unei cutii paralelipipedice care umplută cu 45 dm³ de apă și așezată orizontal pe rând pe cele trei fețe diferite apa se află până la înălțimile respectiv de 25 cm, 30 cm și 15 cm.

* * *

879. Ce cantitate de acid sulfuric este necesară ca în prezența unui metal oarecare să obținem cantitatea de hidrogen suficientă umplerii unui balon sferic cu diametrul de un metru.

Ionel Bichir
elev, Bârlad

880. Două întreprinderi industriale se asociază și execută în 70 zile planul de construcții de vagoane I.T.B., primind premiu de 24 000 lei. Acest premiu este împărțit de ei invers proporțional cu timpul necesar îndeplinirii aceluiaș plan de fiecare întreprindere în parte. Să se afle:

— In câte zile ar fie xecutat planul respectiv fiecare întreprindere în parte, dacă prima ar fi depășit pe a doua cu 48 zile.

— Care sunt cotele fiecărei întreprinderi din premiul acordat.

* * *

881. Două lumănări identice, aprinse și puse una lângă alta, luminează un ecran așezat la distanță de 4 metri. Să se calculeze la ce distanță de ecran să fie așezată numai o singură lumânare aprinsă pentru ca ecranul să fie la fel luminat.

I. Brezeanu
elev, Târgoviște

882. Ce cantitate de cărbuni este necesară pentru a transforma integral în vapori un kg. de ghiață cu temperatura de —4° C știind că pierderile de căldură sunt 20%, iar căldura spe-

cifică și de topire a gheții este 0,5 cal/g și 80 cal/g; căldura de vaporizare a apei 539 cal/g și puterea calorică a cărbunilor 7000 kcal/kg.

In cât timp se transformă în vapori aceași cantitate de ghiață cu aceiaș temperatură inițială dacă se folosește un fierbător electric cu rezistența de 24 ohmi pus la o priză de 110 volți, randamentul fiind 0,9.

Stan M. Fotă
elev, Giurgiu

883. Sub ce unghi r trebue să se reflecteze o rază de lumină pe un cristal de sare gemă ($n=1{,}544$), pentru a obține un grad de polarizare maxim al razei reflectate?

* * *

884. Un circuit este format dintr'o rezistență $R=250$ ohmi, o selfinductanță $L=1$ henry și o capacitate $C=10$ microfarazi. Să se calculeze curentul total când cele trei elemente sunt legate în derivație și apoi în cazul când elementele sunt legate în serie, știind că tensiunea U este de 100 volți și pulsația curentului $\omega = 500$ este aceiași în ambele cazuri.

Emil D. Tătaru
elev, Aiud

885. Un solenoid are 240 spire pe o lungime de 36 cm. Care este intensitatea câmpului din interior când trece prin solenoid un curent de 15 amperi? Ce valoare are fluxul care străbate un cerc cu suprafața de 4 cm^2 așezat în interiorul solenoidului perpendicular pe direcția liniilor de forță.

Se va face desenul.

Eftimie Gr. Bălescu
elev, Târgoviște

886. Două particule identice străbătând respectiv un câmp electric și unul magnetic, astfel că forța ce acționează asupra lor să fie perpendiculară pe direcția mișcării, suferă o deplasare respectiv S_E și S_H după ce au parcurs spațiul a. Știind că intensitatea fiecărui câmp este E și H, și că avem relația

$$\frac{E}{S_E}\left(\frac{S_H}{H}\right)^2 \frac{1}{a^2} = 72 \cdot 10^{12} \text{ u. e. s/gram}$$

să se stabilească natura particulelor.

C. Em. Racoveanu
clasa XI, Turnu Severin

887. Fie un triunghi oarecare ABC, iar M și H respectiv mijlocul laturei AB și ortocentrul triunghiului dat.

Să se demonstreze relația:

$$\overline{AB}^2 = 2\,(\overline{CM}^2 + \overline{MH}^2 - \overline{HC}^2)$$

Gh. I. Bercea

888. Să se arate că dacă x, y, z sunt numere diferite de zero, de același semn și avem egalitățile:

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$y^2 + z^2 = x^2 + 1{,}2yz$$

atunci avem și egalitățile

$$xy = 0{,}48z^2$$
$$15\ x = 20y = 12z.$$

C. Ionescu-Țiu

889. Fie P și Q punctele de intersecție a două cercuri O_1 și O_1. Dreptele O_1Q și O_1Q taie respectiv cercurile O_2 și O_1 în punctele M și N, iar dreptele MP și NP taie linia centrelor respectiv în R și S. Să se arate că:

1. Bisectoarele triunghiului MNP sunt concurente în Q;
2. Punctele M,N,O_1,P,O_2 sunt pe același cerc.
3. Triunghiul PRS este isoscel.

Dumitru Arcanu
student, București

890. Se dă un semicerc de diametru AB. O coardă AC întâlnește tangenta din B în D, iar tangenta din C întâlnește pe BD în E. Fie O mijlocul diametrului AB. Să se arate că dreapta OE și perpendicularele din B și D respectiv pe CE și CD sunt concurente într'un punct M, iar patrulaterul $OBMD$ este inscriptibil.

Ioan Licea
elev, Galați

891. Un triunghi ABC cu toate unghiurile ascuțite se rotește în jurul fiecărei laturi. Să se arate că raportul între S suma suprafețelor corpurilor astfel obținute și V suma volumelor lor este dat de relația

$$\frac{S}{V} = \frac{3}{r} - \frac{24\,R}{ab + bc + ca}$$

unde R și r sunt respectiv raza cercului circumscris și a cercului înscris triunghiului dat ABC.

Hamer Ladislau
elev, Timișoara

892. Intr'un cerc de rază R se înscrie un triunghi oarecare ABC. Se duc înălțimile AA', BB', CC' care se taie în H.

Fie r' raza cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$.

Să se arate că:

1°. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghi (cu toate unghiurile ascuțite) avem:

$$4\,R\,r' = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 8\,R^2 = 2\,\overline{AH} \cdot \overline{HA'}$$

2°. Dacă unghiul A este obtuz avem:

$$4\,\overline{R}\,\overline{r'} + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 + \overline{BC}^2 - 8\,R^2 = 2\,\overline{HA} \cdot \overline{AA'}.$$

D. C. Panu

893. Fie AA', BB', CC', trei ceviene concurente în interiorul unui triunghi oarecare ABC; Paralele duse prin A' la AB și AC taie pe AC și AB respectiv în D și E; paralele duse prin B' la AB și BC taie pe BC și AB respectiv în F și G, iar paralelele duse prin C' la AC și BC taie pe BC și AC respectiv în H și I.

Să se arate că punctele M (DE; BC), N (FG; AC), P (HI' AB) sunt colineare. Cazuri particulare.

Marius Iosifescu
elev, Pitești

894. Se dau două cercuri O_1 și O_2 și o dreaptă (Δ) oarecare. Pe această dreaptă se iau 3 puncte C_1, C_2, C_3 din care ca centre se descriu 3 cercuri de raze oarecare.

Cercul C_1 taie cercul O_1 în A și A' și cercul O_2 în a și a'.

Cercul C_2 taie cerczul O_1 în B și B' și cercul O_2 în b și b'.

Cercul C_3 taie cercul O_1 în C și C' și cercul O_2 în c și c'.

Dreptele AA' și aa' se întâlnesc în M; BB' și bb' în N iar CC' și cc' se întâlnesc în P.

Să se arate că punctele M, N, P sunt pe o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor O_1O_2.

Ștefan N. Mihăilescu
elev, București

895. Pe un fluviu sunt două porturi A și B; B este în aval de A. Simultan pleacă două nave M și N, nava M pleacă din A către B, iar nava N pleacă din B către A și se întâlnesc după 20 ore.

După un timp cele două nave pleacă în sens invers din portuirle finale A și B situate la distanța de 360 km și se întâlnesc din nou însă la distanța de 40 km de punctul primei întâlniri. Viteza curentului fiind 1/10 din suma vitezelor navelor iar o milă marină fiind de 1852, metri se cere viteza fiecărei nave în mile pe oră (noduri) precum și viteza curentului în kilometri pe oră.

C. V. Costăchescu

896. Să se rezolve sistemul cu șase necunoscute

$$\begin{aligned} x + x' &= a, \\ y + y' &= b, \\ z + z' &= c, \end{aligned} \qquad \text{și} \qquad \begin{aligned} yz' - y'z &= d \\ zx' - z'x &= e \\ xy' - x'y &= f \end{aligned}$$

Care este condiția de compatibilitate?

M. Ghermănescu

897. Să se arate că ecuația $4x^3 - 3x - 8a^4 + 8a^2 - 1 = 0$ este verificată pentru $x = \cos\frac{2b}{3}$, unde $\cos\frac{b}{2} = a$.

Anatolie Mândru
elev, București

898. O grindă de lungime l încastrată în perete este solicitată de o forță F care face un unghi α față de direcția grinzii.

Să se calculeze:

— Forța care încovoaie grinda, forța care întinde grinda și momentul încovoietor maxim.

I. I. Loziciu
elev, Caransebeș

899. Să se elimine x și y din relațiile:

$$a + \sin^2 2x = b + \cos^2 2x$$

$$\sin 3x + \cos 3x + 1 = c$$

$$c(c-2)\operatorname{tg} 3y = a \operatorname{cotg} 2x.$$

Mihail Gh. Ionescu

900. Să se arate că oricare ar fi x real. însă diferit de $+1$ și -1, avem:

$$\frac{x^7 - 1}{x^2(x-1)} - x > 2(x^2 + x + 1)$$

Să se arate pentru ce valori ale lui x în loc de inegalitate este egalitate.

Zamfira Petrică
elev , București

901. Un tub sonor are lungimea de 0,5 m. Să se calculeze numărul de vibrații al sunetului fundamental și numărul de vibrații al armonicii a două superioare în următoarele cazuri.

a) Tubul este deschis la ambele capete.

b) Tubul este închis la ambele capete.

c) Tubul este închis la un capăt și deschis la celălalt capăt.

Vizeta sunetului în aer este de 340 m/s.

* * *

902. Să se arate că termenii șirului lui Fibonacci 1,1,2,3,5,8... cu relația de recurență:

$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$, satisfac și relația:

$U_n\, U_m + U_{n+1}\, U_{m+1} = U_{n+m+1}$.

* * *

903. Pentru care valori întregi ale lui x și n expresia $x^n - x^2 - 1$ se divide cu 7.

Const. Berdan

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E. 301. Cu cât trebue micșorată lungimea unui pendul ca să bată secunda la fel la Moscova ca și la București, dacă la București accelerația gravității este $g = 980{,}55$ cm/s^2 iar pentru Moscova accelerația gravității este $g = 981{,}5$ cm/s^2.

* * *

E. 302. Un pioner, pornește dintr'un punct de pe latura unui triunghi desenat pe teren, mergând paralel cu o latură până întâlnește pe cealaltă, apoi își continuă drumul în același mod.

Să se arate că drumul pionierului se închide în punctul de plecare și că lungimea acestui drum nu depinde de punctul de plecare dacă plecarea nu se face din nmijlocul unei laturi; iar dacă plecarea se face din mijlocul uneia din laturi drumul parcurs se reduce la jumătate.

Ilie Loziciu

E. 303 Dacă unui dreptunghiu îi mărim lungimea cu un metru și îi micșorăm lățimea cu trei metri aria lui scade cu 58 m^2, iar dacă îi micșorăm lungimea cu doi metri și îi mărim lățimea cu un metru aria lui crește cu 40 m^2. Să se afle laturile dreptunghiului.

* * *

E. 304. Dacă unui număr oarecare i se adaugă de opt ori suma cifrelor sale se obține un număr divizibil prin nouă. Să se demonstreze.

Marin I. Predoescu

E. 305 Să se desfacă numărul 28 în două părți, așa că înmulțind pe prima cu 17 și a doua cu 9 și făcând suma produselor, să obținem ca rezultat 341.

* * *

E. 306. Intreitul unui număr mărit cu 2 a fost înmulțit cu 5. Produsul obținut micșorat cu 4 a fost împărțit la 7 și s'a obținut 18. Care este numărul cu care s'a pornit la calcule?

* * *

E. 307. Apa care se transformă în ghiață își mărește volumul cu a 11-a parte din volumul apei, cu cât își micșorează volumul la sută ghiața când prin topire se transformă în apă.

Să se explice dacă nivelul apei dintr'un pahar cu apă în care plutește o bucată de ghiață scade sau se ridică dacă se topește ghiața.

* * *

E. 308. Să se arate că dacă y este diferit de zero și avem relațiile

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$y^2 + z^2 = x^2 + yz$$

avem și relația

$$2z = y + x\sqrt{3}$$

C. I. Ț.

E. 309. Un pionier are asupra sa mai puțin de 100 lei; însă îi lipsesc anume atâți lei cât ar avea peste 100, dacă ar avea de 9 ori cât are acum. Să se calculeze câți lei are pionierul?

* * *

E. 310. Două roți dințate sunt angrenate: una are 140 dinți, iar cealaltă 48 dinți. Inainte de a începe să se miște se înseamnă cu creta dinții care se găsesc pe linia centrelor celor două roți. După câte învârtituri dinții însemnați cu creta vor fi iar în linie dreaptă?

C. I. Ț.

E. 311. Greutatea unei bârne de brad este 27 și $\frac{4}{5}$ kgr, iar a unei bârne de stejar este $45\frac{1}{2}$ kgr. Greutatea a 10 bârne de brad este de $384\frac{1}{5}$ kg. Câte bârne sunt de brad și câte de stejar?

* * *

E. 312. Intr'un triunghiu dreptunghiu fie M și N mijloacele catetelor și D piciorul înălțimii dusă din unghiul drept A. Să se arate că patrulaterul $ADMN$ este inscriptibil iar suprafața sa este jumătate din suprafața triunghiului dreptunghic dat.

C. Dragomir
elev, Pitești

E. 313. Pe laturile unui patrat $ABCD$, construim triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP și DAQ. *a)* Să se demonstreze că figura $MNPQ$ este un pătrat, *b)* Să se arate că suprafața patratului $MNPQ$ se obține înmulțind suprafața patratului $ABCD$ cu $(2 + \sqrt{3})$.

Tiberiu Weszely
elev clasa X-a

E. 314. Să se afle anul naşterii unei persoane, ştiind că diferenţa dintre răsturnatul numărului ce reprezintă anul naşterii sale şi numărul respectiv este 3726, cifra unităţilor este 5, suma formată din cifra miilor şi cifra sutelor este 9, iar suma dintre cifra sutelor şi cifra zecilor este 13.

Emil Surdu
elev Tr. Severin

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pentru activitatea rezolvitorilor de probleme în luna Martie 1953 arătată mai jos, se evidenţiază:

Iosifescu V. Marius (clasa X-a, Piteşti), *Bălescu Gr. Eftimie* (clasa XI-a, Târgovişte), *Hammer Ladislau* (clasa X-a, Timişoara), *Uţă G. Florian* (clasa X-a, Predeal), *Dobre Dan* (Buzău), *Drăghicescu D. C.* (clasa XI-a, Petroşani), *Petrică Zamfira* (clasa IX-a, Centrul şcolar, 2, 10, 13 fete Bucureşti), *Bocu Mircea* (clasa IX-a, Oradea), *Cavaleru Alexandru* (clasa XI-a, Piteşti), *Bichir Ionel* (clasa XI-a, Bârlad), *Pupăzan Nicolae* (clasa X-a, Predeal), *Oprea A. Constantin* (clasa XI-a, Târgovişte), *Enescu Dumitru* (clasa XI-a, Piteşti), *Ungureanu Ştefan* (Anul II Şc. medie tehnică Câmpulung, Suceava), *Cristian Ionel* (clasa X-a, Ploieşti), *Vârcol Alexis* (clasa XI-a, L.b.10, Bucureşti), *Moraru Liliana* (Codlea, Reg. Stalin), *Cucurzeanu P. Ion* (clasa X-a, Piteşti), *Zidăroiu Gh. Corneliu* (clasa X-a, Craiova), *Dumitrescu Ştefan* (Clasa X-a, L.b.5, Bucureşti), *Tătaru D. Emil* (clasa IX-a Aiud), *Peteanu Vasile* (clasa IX-a Aiud,) *Făgăraş Constantin* (clasa X-a, Ploeşti), *Marinescu Petre* (clasa XI-a, Ploeşti), *Dănilă Gh.* (Giurgiu) şi *Licea Ioan* (Galaţi).

★

S'au mai primit soluţii bune la cel puţin cinci probleme din Revista Matematică şi Fizică dela următorii corespodenţi:

AIUD. Clasa IX-a. Peteanu Vasile (572, 589, 592, 636, 643, 648, 650, 651, 655, 658, 659, 664, 665, 666, 669, 670, 671, 673, 675, 677, 678, 679, 680, 682, 683, 684, 685, P), Tătaru D. Emil (529, 589, 683, 684—699, 701, 702, 703* 703*, 704*, 705*, 706*, 707*, P).

ALEXANDRIA. Liceul mixt. Clasa X-a. Rădulescu Ileana (569, 574, 587, 608, 610, 627, 629, 630, 633, 643, 647, 648, 655, 658, 663, 666, 685, 687, 703*, 719, 720, 740, 745, 748, E: 193, 208, 213, 216, 235).

BACĂU. Clasa XI-a. Cosma Mihai (703*, 705*, 706*, 709*, 712*, 715, 716, 720, 721, 723, 726, 728), Vasiliu Florian (655, 656, 658, 666, 670, 685, 716, 718, 721, 748, 757). Şcoala medie tehnică de Construcţii. A ul III. Buzdugan Minodora (578, 608, 609, 621, 716, 717, 720.

BAIA MARE. Clasa XI-a. Gâvruş Eugen (685, 691, 746, 748, 751, 757, 758, 759), Mureşean Mihai (610, 621, 667, 720, 724, 727, E: 205).

BĂILE SLĂNIC (Târgu Ocna). Clasa VI-a. Căruntu Maria (187, 202, 203, 209, 235).

BÂRLAD. Clasa VIII-a. Bichir Ilie (558, 608, 618, 625, 630, 635, 645, 684, 685, 690, 691, 727, 736, 737, 739, 740, 744, 745, 748, E: 228, 242, 243, 245). Clasa X-a. Chirică V. Constantin (643, 655, 663, 670, 685, 691, 743, 745), Clasa XI-a. David Alexandru (643, 654, 655, 658, 663, 666, 670, 679), Bichir Ionel (540, 544, 558, 569, 571, 574, 577, 587, 588, 592, 596, 598, 600, 604, 609, 645, 664, 666, 670, 676, 677, 680, 682, 683, 685, 686, 687, 690, 691, 702, 717, 716, 718, 721, 724, 727, 728, 731, 734, 739, 740, 744, 745, 748, P), Druţu Gh. Constantin (588, 591, 598, 603, 604, 608, 611, 620, 621, 625, 632, 633, 640, 670, 676).

BOTOŞANI. Clasa VII-a. Străchinaru Maria (E: 242, 243, 245, 247, 248), Clasa XI. Anania Marilena (664, 670, 673, 704*, 705*, 707*).

BREZOI (Reg. Piteşti). Wagner Emil (718, 721, 725, 727, 736, 742, 745, 746, 748).

BUCUREŞTI. Liceul 1 băieţi. Clasa IX-a. Feinstein Ilie (724, 726, 736, 740, 745, 748), Nicolae Alexandru (525, 552, 582, 609, 613, 652, 654, 658, 670, 690, 699, 709, 723, 737, 746, E: 221, 250, E), Bădulescu Vlad (670, 743, 745, 748, E: 245, 248), Zamfirescu Mihnea (652, 654, 658, 716, 723, 724, 726, 729, 736, 761, E: 207, 209, 217, 220, 236).

Liceul 1 fete. Clasa IV. Predoescu Marieta (E: 218, 220, 242, 243, 245).

Centrul şcolar 2—10—13 fete. Clasa IX-a. Gongea Valentina (615 653, 658, 670, 748, E: 207, 208, 239), Wechsler Henriette (615, 655, 658, 670, 745, 748, E: 207, 208), Petrică Zamfira (524, 559, 562, 565, 573, 589, 653, 656, 666, 673, 680, 687, 699, 708*, 709*, 710*, 711*, 712*, 713*, 714*, 715, 716, 716, 717, 721, 722, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 733, 734, 758, 759, P).

Liceul 3 băieţi. Clasa X-a. Radu Nicolae (655, 670, E: 208, 230, 239, 243, 248), Clasa XI-a: Mihăilescu N. Ştefan (515, 516, 522, 523, 533, 548, 557, 611, 651, 654, 658, 673, 685, 687, 688, 689, 690, 691, 694, 695, 703*, 704*, 705*, 706*, 707*, 718, 723, 724, 725, 726, 727, P).

Şcoala 3 mixtă. Clasa VII-a. Bănică Paul (E: 239, 240, 243, 245, 248).

Liceul 4 băieţi. Clasa XI-a: Radcenco Vsevolod (664, 670, 673, 682, 683, 716, 724, 746, 748, 770).

Liceul 5 băieţi. Clasa IX-a. Anghel Mircea (E: 161, 185, 223, 224, 228, 236, 239, 244, 245, 248, 251), Cârstescu F. Ion (670, 685, 740, 745, 748, E: 216, 218, 223, 230, 236, 245, 251), Clasa X-a. Dumitrescu Ştefan (571, 583, 588, 591, 597, 601, 604, 611, 613, 632, 633, 637, 640, 651, 655, 658, 664, 670, 675, 679, 685, 704*, 711*, 712*, 716, 718, 724, 736, 740, 748, 757), Nedea F. Dumitru (560, 592, 615, 658, 740), Clasa XI-a, Grejdan Grigore (560, 591, 592, 597, 611, 613, 615, 617, 618, 627, 633, 634, 648, 670, 676, 680, 683, 687, 718, 729, 740), Ştefănescu Emil (624, 625, 633, 647, 648, 655, 658, 664, 670, 703*, 705*).

Liceul 6 băieţi. Clasa IX-a B. Kestendband Barbu (706, 714, 736, 742, 743, 748, 749, 752, 753, 762, E: 243, 245, 248, 251), Clasa XI-a. Ştefănescu N. Nicolae (655, 683, 685, 687, 718, 739, 743, 748, E: 228).

Liceul 7 băieţi I. L. Caragiale. Clasa IX-a: Ionescu Gabriel (744, 745, 748, 758, 762), Stoleru George (E: 233, 234, 235, 239, 240, P), Rosinger Elmer (658, 691, 734, 745, 748, 762).

Liceul 8 băieți. Clasa VI-a. Gavrilă Horia (E: 235, 236, 239, 240, 244, 245, 249, 251).

Liceul 10 băieți Aurel Vlaicu. Clasa VIII-a. Sandu Ioan (E: 158, 160, 161, 185, 193, 199, 200, 202, 217, 220, 223, 236, 240, 243, 245, 246), Stănășilă Octavian (E.: 151, 153, 154, 158, 161, 163, 165, 172, 173, 174, 178, 193, 223, 246), Clasa X-a. Andreescu Gh. Mircea (736, 742, 752, 754, 760, 762, 765, 766, 767, 770), Clasa IX-a. Câmpu Eugen (573, 683, 684, 690, 691, 736, 744, 745, 746, 748, 751), Clasa XI-a. Șincan Corneliu (765, 767, 768, 769, 770, 771, 774, 775), Vârcol Alexis (525, 554, 567, 568, 569, 643, 655, 670, 685, 687, 690, 703*., 716, 724, 728, 737, 741, 743, 744, 745, 746, 747, 750, 751, 752, 756, 757, 758*, 770, 774, 775, 777, 778, 779, E: 244, 248), Mândru Anatolie (765, 767, 769, 770, 771, 774, 775, 777, 779, 780).

Școala medie de Statistică (anul II) Sandu Olimpia (509, E: 155, 156, 157, 218, 213, 225, 230).

Școala 14 băieți .Clasa VII-a. Pipă C. Ion (E: 202, 203, 204, 213, 216, 218, 221, 236, 245, 248, 249. 251).

Școala mixtă Slobozia. Clasa VII-a. Crețu I. Steluța (E: 223, 225, 228, 230, 236, 239, 245).

Școala 50 băieți. Clasa VII-a: Nicolai V. Florin (E: 213, 216, 217, 218, 223, 224, P) Student. Anul I. Popescu P. Pavel (514, 615, 621, 625, 633, 635, 655, 658, 670, 681, 682, 721, 724, 728, 748, P).

Școala elementară Străulești. Clasa VI-a. Bică Florian (184, 185, 202, 209, 240), Cojocaru Maria (184, 185, 202, 209, 240), Clasa VII-a. Bică Maria (184, 185, 202, 209, 240).

BUZĂU. Anul II. Negruț Gh. Nicolae (710*, 723, 729, 743, 749, 750, P), Clasa VIII-a. Golianu Zoica (602, 615, 621, E: 220, 221, 222, 223, 225, 230, 239, 240, 243, 245, 247), Ioniță Aurelia (E: 216, 224, 225, 230, 235, 236, 238, 239, 240), Clasa X-a Duțu Alexandru (607, 625, 635, 705*, 709*, 710*, 721*, 713*, 714*, 744 745, 746, 748 756, 757, P) Golianu Petru (643, 664, 740, 745, 765, 767), Mocanu I. Marin (721, 724, 744, 745, 748, 758), Jarcău Aurel (736, 739, 744, 745, 748, 758), Suțescu Dan (521, 608 630, 651, 664, 670, 685, 718, 724, 728), Clasa XI-a. Biju Lucica (651, 718, 736, 745, 746, 748, 756, 757), Dobre Dan (587, 590, 597, 598, 600, 601, 603, 604, 608, 610, 615, 618, 620, 621, 625, 630, 633, 635, 636, 643, 651, 654, 655, 658, 664, 666, 667. 670, 674, 675, 679, 685, 691, 698, 702, 704*, 706*, 708*, 710*, 712*, 713*, 716, 718, 720, 721, 722, 723, 724, 726, 727, 728, 736, 739, 744, 745, 748, 758*, 762*), Scarlat I. Ion (521, 527, 581, 587, 589, 593, 600, 605, 607, 608, 609, 611, 612, 618, 621, 623, 625, 632, 635, 636, 658, 663, 664, 673, 698).

CĂLĂRAȘI. Clasa VII-a. Niculescu Dan (E: 213, 216, 218, 220, 222, 223, 225, 226, 227, 228, 230, 231), Clasa X-a. Rădulescu Ion (540. 568, 569, 578, 590, 591, 609, 625, 630, 635, 737, 740, 745, 748, E: 156, 157, 161, 187, 204, 215, 216, 217, 218, 221, 240, 245, 251), Știrbu Valeriu (633, 685, 691, 716, 718, 745, 748), Vasilescu Constantin (635, 652, 676, 683, 685, 691, 703*, 704*, 705*, 706*, 707*, 708, 709, 710, 711, 714, 716, 718, 724, 734, 737 740, 743, 748, 758*, 759*).

CÂMPINA. Școala medie tehnică de Petrol Nr. 2. Pârciu Mircea (634, 641, 659, 673, 698, 701, 713*, 733, 751, 762*).

CARANSEBEȘ. Școala medie tehnică Silvică. Anul III. Loziciu I. Ilie (569, 574, 608, 613, 214, 217, 218, 221, 223, 225, P).

CÂMPULUNG MUSCEL. Școala pedagogică de băieți. Anul IV. Popescu I. Ioan. (E: 223, 228, 240, 243, 245, 247, 248), Liceul de băieți. Clasa VIII-a. Enescu V. Vlad (E: 213, 215, 218, 235, 236, 239, 243, 245, 247).

CÂMPULUNG SUCEAVA. Clasa IX-a. Friedel Senta (E: 213, 216, 217, 218, 221), Hogea Ion (621, 663, E: 213, 217, 218), Școala medie tehnică pentru exploatarea lemnului. Anul I. Hahitchi Constantin (611, 658, E: 157, 175, 200, 208), Rebenciuc Teodor (611, 621, 669, 691, 723, 745, E: 175, 200, 213, 239, 245), Abul II. Ungureanu Ștefan (533, 534. 591. 603, 604, 607, 608, 611, 613, 618, 621, 625, 633, 651, 658, 659, 663, 668, 669, 670, 679, 691, 694, 716, 717, 723, 724, 729, 733, 744, 745, 746, 755, P).

CARACAL. Clasa XI-a. Economu C. Apostol (504, 514, 554, 557, 587, 591, 604, 611, 621, 643, 651, 689, 691, 714, 744, 745, 748, E: 150, 152, 153, 175, 178, 179, 180, 181, 182, 184, 187, 190, 192, 204, 207, 208, 209, 212, 242, 243, 244, 245, 247, 248, P), Predețeanu Nicolae (581, 723, 724, E: 184, 195, 215, 241, 252, 259, 260).

CLUJ. Școala elementară 1 băieți. Clasa V-a: Vrăjitoru Mihai (E: 243, 245, 247, 252, 259, 260), Facultatea muncitorească de 2 ani. Anul II. Muscalu C. Ștefan (744, 748, 764, 765, 766, 767, 768, 770, E: 261, 263), Popa Viorel (666, 676, 685, 718, 721, 724, 727, 744, 745, 746, 748), Popescu N. Corneliu (744, 745, 746, 748, 758), Liceul 3 băieți. Clasa IX-a: Constantinescu Florin (578, 620, 682, 724, 743, E: 208, Bucurescu M. Traian (746, 748, 243, 245, 251), Sașcă Ioan (724, 745, 746, E: 236, 245, 251), Pop Cornel (736, 737, 743, 745, 747, 748, 753, 757*, 758*, 761), Clasa X-a: Spârchez Zeno (709, 710, 716, 721, 745, 747, 748, 779, 780, 783), Clasa XI-a. Grecu Dan (588, 645, 666, 691, 726, 740, 742, 743, 747, 748, 753).

CHITILA (București). Clasa V-a. Shultet L. Laslau (E: 150, 151, 156, 166, 184, 186), Clasa VI-a. Chițimia M. Eustațiu (E: 156, 159, 165, 166, 170, 171, 175, 178, 179, 184, 202, 204), Clasa VII-a. Mirea Constantin (E: 150, 151, 156, 166, 178, 218), Newton A. Iosif (E: 150, 151, 156, 160, 165, 166, 167, 171, 175, 182, 184, 186, 213, 219, 245), Paraschiv M. Gheorghe (E: 150, 160, 166, 175, 176, 182, 213, 230, 245).

CODLEA (Reg. Stalin). Fără indicație de școală și clasă: Moraru Liliana (503, 514, 543, 567, 568, 571, 574, 587, 590, 604, 625, 630, 632, 635, 641, 643, 651, 655, 659, 664, 666, 671, 710*, 716, 718, 721, 724, 743, 746, 748, E: 159, 165, 168, 171, 172, 175, 177, 178, 182, 194, 195, 197, 199, 200, 203, 207, 211, 213, 215, 216, 217, 218, 220, 221, 236, 239, 240, 243, 245, 251).

CORABIA. Liceul mixt. Clasa VI-a. Ciocoiu T. Lucian (E: 225, 228, 230, 242, 243, 245, 247), Clasa VIII-a: Dinu Marin (758, E: 225, 230, 239, 242, 245), Ioan C. Elena (E: 225, 230, 239, 240, 242, 243, 245, 248), Ilinca V. Veronica (758*, E: 242, 243, 245, 247), Simian M. Maria (758, E: 225, 228, 230, 235, 239, 242, 243, 248), Stavre Petre (685. 717, 718, 720, 721, E: 248, 251), Velicu Elena (E: 225, 230, 239, 240, 242, 243, 245, 247, 295).

CONSTANȚA. Școala hidrotehnică. Anul I. Alexandru Ștefan (740, E: 204, 209, 217, 218, 223, 236, 239, 245, 246), Băcioiu M. Nicolae (691, 745, 217, 218, 220, 223, 240, 243, 245, 248), Pascu I. Gheorghe (E: 217, 220, 234, 239, 248), Anul II Curtede Pichiret (670, E: 216, 217, 218, 225, 230, 237, 242, 247, 248), Ionescu Nelu (633, 744, 748, E: 205, 216, 243, 244, 246, 247, 248, 250, P), Lambă Stelian (651, 674, 676, 679, 681, 682, 696, 725, 729, E: 160, 176, 219, 226, 231, 235, 239), Panciu Ion (592, 663, 223, 233, 234, 235, 236, 237, 242, 243, 244, 245, 248),

CRAIOVA. Liceul de fete Nr. 1. Clasa IX-a: Cetățeanu Cecilia (600, 603, 604, 618, 624, 630, 632, 646, 651, 740, 741, 743, 744, 748, E: 213, 225, 228, 230, 239), Șchiopu Eugenia (611, 632, 652, 655, 743, 744, E: 213, 216, 217, 218, 239, 245), Clasa XI-a,. Florea C. Paula (706*, 741, 743, 744, 745, 748, E: 193, 244), Șerban I. Ileana (742, 743, 744, 745, 746, 748, 751, 758, E: 243, 251), Colegiul Popular N. Bălcescu. Clasa VIII-a. Trifan V. (594, 600, 613, 632, E: 192), Clasa X-a. Iliescu M. Mihai (E: 207, 208, 209, 216, 223, 225, 230, 245), Istinie C. Crăciunel (736, 744, 745, 748, E: 158, 216, 220, 221, 224, 243, 245, (P), Nicolescu E. Radu (723, 724, 727, 728, 733, 734). Zidăroiu Gh. Cornelius (531, 533, 552, 554, 555, 557, 581, 583, 584, 588, 597, 598, 613, 620, 634, 651, 654, 685, 693, 697, 701, 718, 721, 726, 728, 729, 744, 745, 748, 752, 753), Clasa XI-a. Câmpeanu I. Aurel (532, 533, 552, 563, 608, 659, 670, 724, 743, 744, 745, 746, 748, 749, 753, 756, 770, 775, 783), Dinu Constantin(514, 569, 583, 615, 621, 634, 685, 718, 741, 744, 748, 753, E: 161, 200, 207, 243, 248, 251), Tiță I. Nicolae (617, 642, 649, 675, 676, 677, 678, 726, 729, 736, 740, 741, 743, 744, 745, 746, 744, 748, 749, 750, 757, 762*, P), Școala medie electrotehnică. Anul I. C. Dinu Gheorghe (658, 685, 728, 729, 744, E: 161, 193, 207, 208, 225, 230, 236, 239, 243, 245, 261).

Liceul Nr. 2 băieți. Clasa X-a: Cazanacli Nicolae (605, 635, 685, 690, 701, 716, 721, 726, 728, 743, 745, 748), Florescu Gh. Mircea (245, 246, 151, 748, 761*, 762), Guran A. Marius (633, 658, 670, 685, 724, 728, 748, E: 200, 208, 213, 216, 225, 226, 228, 239, 251), Marciu Gr. Marius (718, 721, 724, E: 207, 208, 209, 233, 235, 236, 239), Student: Sârbu Ovidiu (640, 737, 744, 748, 761*, P).

CURTEA DE ARGEȘ. Liceul mixt. Clasa X-a. Aldea Alexandru (643, 685, 718, 728, 744, 745, 748).

DOROHOI. Clasa X-a. Cojocaru V. Mihai (590, 591, 600, 602, 607, 608, 612, 621, 622, E: 175, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 185, 186, 192, 193), Clasa XI-a Scutelnicu Constantin (527, 610, 642, 653, 654, 661, 682, 703*, 704*, 705*, 706*, 707*, 709*, 710*, 711*, 713*, 714*, 715, 736, 743, 744, 745, 748, 751, 752, 756, 757, P).

FĂGĂRAȘ. Clasa XI-a. Burlea Gavrilă (521, 548, 557, 590, 629, 630, 633, 648, 663, 685, 686, 718, 720, 721, P).

FOCȘANI. Clasa IX-a. Robănescu Nicolae (540 591, 604, 655, 658, E: 156, 160, 165, 203, 207, 208, 214, 217, 218, 223, 225, 226, 230, 236, 242), Clasa XI-a. Țâțu Marin (517, 590, 603, 604, 643, 651, 655, 658, 663, 664, 691, 716, 722, 724, 737, 740, 744, 745, 746, 748, 757*, 758*, 765, 767, 768, 769, 770, 779).

GALAȚI. Clasa VIII-a. Roditi Ioan (744, 748, E: 243, 244, 245, 248, 250), Clasa IX-a: Mihăilescu Georgeta (651, 670, 683, 724, 748, E: 217, 225, 245), Clasa X-a: Fișterman H. Dorel (588, 591, 604, 624, 627, 633, 651, 745, 762), Licea Ioan (504, 527, 643, 645, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 654, 655, 656, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 663, 666, 667, 668, 670, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, P).

GIURGIU. Anul II S.T.M.A. Laudă P. Aurel (618, E: 215, 217, 220, 240), Clasa VI-a. Buga Victor (E: 171, 173, 175, 213, 243), Clasa VIII-a: Mateescu Doina Lucia (615, 621, 742, 743, 770, E: (157, 186, 259), Mișcol Mircea (509, 609, 670, 770, E: 155, 156, 159, 162, 165, 166, 167, 181, 183, 184, 191, 192, 200, 201, 209, 212, 213, 217, 218, 220, 221, 222, 223, 226, 228, 229, 231, 233, 238, 244, 245, 247, 249, 250, 251, 260, 261, P), Clasa IX-a: Baciu V. Petre (171, 208, 235, 237, 239, 242, 243, 245, 248), Măgureanu Iulian (540, 543, 560, 568, 569, 574, 587, 590, 591, 609, 610, 611, 615, 621, 625, 627, 632, 633, 643, 658, 721, 743, E: 161, 165, 170 171, 173, 174, 178, 182, 184, 187, 204, 208, 209, 240,) Stanciu E. Mirel (574, 587, 590, 592, 630, 644, 663, 670, 718, 729, E: 165, 166, 170, 171, 181, 185, 187, 191, 194, 197, 206, 207, 208, 216, 219, 220, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 240 241, 242, 243, 245, 247, 248, 249, P), Ștefănescu N. Emil (E: 150, 159, 165, 167, 202, 218, 223, 235, 240, 264), Clasa X-a. Floricâ V. Sergiu (629, 630, 647, 648, 670, 685, E: 193, 200, 204, 208, 209, 210, 213, 217, 223, 225, 230, 235, 239, 243), Pieleanu D. Radu) 648, 670, 721, E: 240, 243, 245), Clasa XI-a: Angelescu M. Dan (608, 621, 629, 633, 658, 666, 670, 687, 718, 740, 743, 748, E: 208, 213, 216, 217, 223, 225, 230, 236, 239), Georgescu St. Eugeniu (543, 630, 633, 648, 666, 685, 687, 718, 721, 746, 747, E: 193, 208, 223, 225, 237, 238, 242, 243, 247), Mișcol Sotir (514, 521, 578, 608, 615, 618, 670, 685, 721, 724, 740), Dănilă Gheorghe (504, 509, 527, 535, 548, 568, 590, 591, 592, 593, 604, 609, 611, 613, 615, 651, 652, 658, 685, 686, 703*, 709*, 718, 721, 726, 743, 745, 748, E: 157, 158, 161, 163, 165, 166, 167, 178, 179, 180, 181, 184, 187, 189, 191, 192, 193, 194, 196, 197, 199, 203, 204, 205, 208, 209, 210, 214, 218, 225, 227, 230, 232, 233, 234, 235, 237, 238, 239, 242, 243, 245, 247, 250, P), Tănăsescu Petrică (509, 521, 533, 600, 603, 609, 610, 615, 621, 627, 629, 630, 633, 643, 663, 665, 666, 670, 685, 691, 716, 721, 723, 724, 743, 744, 745, 751, 765, 768, P), Vlad C. Ilie (685, 718, E: 225, 233, 239), Anul II S.T.M.A. Roșu Janeta (591, 603, 604, 621, 635, 644, 651, 654, 655, 658, 659, 670, 724, 727, 744, 745, 748),

HALĂUCEȘTI. (Pașcani-Iași). Clasa VII-a. Costea Șerban (E: 213, 218, 223, 230, 239, 248), Dumitriu Constantin (E: 175, 213, 218, 220, 228, 243), Murărescu Gh. (E: 175, 182, 213, 218, 220, 223, 225, 227, 228, 230, 232, 239, 245, 248).

HUNEDOARA. Școala medie tehnică siderurgică. Anul IV. Cimporescu Doinel (712*, 744, 757, E: 155, 156, 157, 158, 159, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 251).

IAȘI. Clasa VII-a. Cristian Cristina (E: 206, 218, 220, 234, 240, 243, 244, 245, 250, 251), Jolobceastac Leonida (E: 208, 213, 214, 215, 216, 218, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 231, 232, 248), Stauber Aron (E: 223, 224, 225, 226, 227, 228, 231, 232, 248), Clasa IX-a. Herscovici Iosif (514, 554, 578, 581, 617, 679, 693, 726, 748, 750, (755), Rădulescu Magda (737, 745, E: 223, 225, 228, 230, 239, 245, 248).

ORADEA. Clasa VII-a: Buzuloiu Florin (E: 156, 157, 185, 192, 202, 204, 209, 216, 218, 223, 234, 235, 243, 245), Clasa IX-a. Bocu Mircea (661, 669, 692, 708*, 709*, 710*, 711*, 712*, 713*, 714*, 716, 717, 718, 719, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 730, 731, 733, 734, 736, 739, 740, 744, 745, 746, 748, 751, 752, 754, 755, 756, 757, 758*, 759*, 760*, 761*, 762*,), Venter Dumitru (560, 615, 630, 685, 691, 729, 743, 746, 748, E: 217, 218, 225, 227, 243, 245, 247, 248, 251), Clasa XI-a. Noje A. Alexandru (533, 560, 615, 621, 630, 633, 640, 650, 664, 665, 666, 675, 685, 716, 718, 723, 724, 740, 743, 746, 748). Școala medie tehhică de Construcții. Anul II. Găbrian Corneliu (703*, 704*, 705*, 706*, 707*, 710*, 770), Târlea Alexandru (704*, 705*, 760, 769, 770, 779, E: 223, 224).

ORAȘUL STALIN. Clasa VII-a. Podeanu Corneliu (E: 213, 214, 217, 218, 219, 221), Purecel Laurențiu (E: 200, 202, 206, 213, 218, 245), Clasa VIII-a. Olteanu Ilie (180,

194, 198, 209, 202, 213, 214, 215, 217, 218, 220, 224, 242, 245), Taffet Toma (655, E: 180, 200, 206, 209, 212, 213, 214, 215), Clasa IX-a: Neamțu Mihail (655, 744, 756, E: 180, 200, 212, 244), Clasa X-a. Iacob Lidia (591, 597, 651, 658, 655, 670, 742), Tudor E. Alexandru (718, 721, 740, 748, E: 240).

PETROȘANI. Clasa XI-a B. Drăghicescu D. C. (509, 514, 543, 554, 562, 570, 578, 587, 591, 598, 599, 602, 603, 604, 607, 608, 611, 615, 621, 629, 630, 632, 633, 648, 651, 654, 655, 658, 666, 670, 673, 682, 685, 691, 694, 701, 711×, 716, 717, 718, 720, 721, 725, 728, 729, 734, 744, 748, 752, 757, 768).

PIATRA NEAMȚ. Clasa VII-a: Macovei Ilie (718, 724, 728, 743, E: 248), Clasa IX-a. Baruch Sofie (743, 745, 748, 756, E: 245), Iliescu Irina (743, 745, 748, 756, E: 225, 230, 245), Clasa X-a. Bătinețu M. Dumitru (525, 574, 621, 737, 739, 743, 744, 745, 748, E: 161, 165, 175, 203, 209, 216, 242, 243, 245, 246, 247, 248, 251, P), Măxinoiu Geogetta (717, 723, 724, 727, 729, 744, 745, 748, 751, 756), Popuțoaia Elisabeta (670, 724, 746, 748, 756, 757, 758*, 762), Pristaru V. Ion (608, 615, 685, 694, 695, 718, 734), Clasa XI-a. Boțani Elena (658, 704, 724, 743, 746, 757, 758), Botezatu Ionel (655, 658, 698, 709, 719, 724, 744, 748, 766, 770, 777, 778, E: 190, 207, 208, 209, 224, 225, 236, 245, 248, 250), Davidescu Ilie (770, 780, E: 257, 259, 261, 278), Faibiș I. (527, 605, 615, 625, 648, 665, 698, 695, 701*, 709*, 710*, 712*, 713*, 714*, 723, 748, 751, E: 193, 200, 223, 224, 225, 3226, 234, 239, 240, 248), Haimovici Fulga (633, 658, 698, 704*, 734), Idelovici Tica (743, 746, 748, 752, 753, 758*), Șum Constatin (552, 612, 668, 743, 744, 746, 750, 766, 767, 770, 780, E: 190, 201, 236, 243, 245, 251).

PITEȘTI. Clasa VIII-a. Apostol N. Ion (213, 218, 223, 239, 243, 245, 247, 250), Gulie I. Nicolae (591, 658, 743, E: 178, 207, 213, 216, 217, 218, 220, 236, 243), Rusu A. Grigore (E: 218, 223, 227, 237, 239, 243, 245, 247, 250), Șerb Gh. Gabriel (744, E: 160, 207, 225, 230, 231), Trache A. Remus (658, 184, 203, 204, 207, 209, 236, 251), Ursu Gh. Mihai (E: 197, 242, 243, 245, 247, 251), Clasa X-a. Cucurezeanu P. Ion (540, 565, 576, 578, 582, 603, 608, 613, 618, 620, 625, 630, 632, 636, 643, 648, 651, 663, 673, 690, 701, 705, 707, 715, 716, 717, 722, 723, 724, 727 ,728) Dragomir Constantin (588, 592, 624, 635, 637, 659, 663, 664, 666, 670, 671, 673, 677, 681, 682, 685, 687, 718, 719, 721, 723, 730, E: 194, 197, 198, 199, 200, 201, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, P), Ionescu V. Savin (591, 597, 620, 645, 654, 659, 662, 671, 677, 678, 682, 683, 688, 701, 719, 727, 728, 731, E: 203, 204, 205, 206, 207, 209, 211, 213, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, P), Iosifescu V. Marius (708*, 709*, 710*, 712*, 713*, 714*, 715—728, 730—737, 739—749, 751—758*, 759*, 760*, 761*, 762*, P), Petrișor Marin (540, 663, 6688, 707×, 723, 744, E: 239, 246, 248), Radu Corneliu (666, 673, 686, 689, 693, 698, 703*, 706*, 707*, 715, 716, 717, 721, 724, 726, 728, 733, 741, 743, 744, 748, 752, 753, 755, 757, 758, E: 248, 262, 263). Clasa XI-a. Cavaleru Alexandru (533, 534, 554, 581, 584, 585, 592, 597, 598, 603, 624, 631, 636, 643, 651, 654, 655, 657, 663, 667, 668, 676, 683, 688, 704*, 706*, 707*, 710*, 716*, 719, 720, 723, 727, 728, 729, 740, 744, 745, 746, 748, 751, 757, P), Diaconescu Ion (502, 503, 514, 531, 533, 538, 543, 554, 555, 565, 568, 569, 570, 574, 575, 578, 581, 582, 587, 588, 590, 591, 597, 598, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611), Enescu Dumitru (533, 540, 562, 568, 574, 576, 578, 581, 584, 587, 591, 597, 601, 603, 611, 613, 615, 635, 646, 647, 650, 651, 659, 669, 676, 679, 683, 691, 694, 701, 706*, 707*, 724, 727, 728), Lupașcu Ion (618, 621, 658, 685, 691, 718, 721, 723, 724, 744, 748), Păunescu I. Șerban (574, 587, 594, 595, 604, 615, 618, 643, 647, 648, 655, 658, 659, 685, 701, 718, 723, 724, 728, P).

Școala medie tehnică metalurgică. Anul I. Burciu Dumitru (E: 204, 205, 207, 211, 213, 218, 239), Ciobanu Ștefan (E: 206, 208, 213, 218, 221, 250, 259), David Gh. Ion (223, 235, 247, 259, 260), Marin C. Marin (E: 235, 242, 243, 245, 247), Oprea D. Eugen (E: 212, 222, 223, 225, 239, 240), Pâșă Gh. Ion (E: 218, 225, 237, 237, 259, 260), Păun St. Ilie (721, E: 235, 242, 243, 247), Stoian A. Florea (E: 193, 198, 204, 207, 208, 218, 225, 230, 231, 235, 240, 242, 243, 245, 247), Stan Gh. Ion 615, 633, E: 193, 198, 206, 207, 235, 240), Vani Moț (615, E: 189, 205, 206, 208, 209, 223), Anul II. Bădescu St. Gheorghe (643, 765, E: 217, 218, 223, 225, 237, 242, 258, 260), Ana F. Gheorghe (E: 192, 218, 223, 225, 235, 242, 247, 258, 259), Baldovinescu C. Gheorghe (E: 203, 213, 243, 245, 247), Luca A. Constantin (E: 237, 239, 242, 243, 245), Matei Ilie (E: 198, 202, 203, 205, 223, 226, 237, 242, 243, 245, 247), Mincă V. Marin (625, 630, 685, E: 193, 217, 221, 223, 225, 230, 243), Piju A. Constantin (E: 237, 239, 242, 243, 245), Sima F. Badea (743, E: 189, 218, 225, 227, 230, 242, 243, 247, 259), Stănescu Gh. Dumitru (765, 768, E: 218, 226, 245, 259, 260), Zamfir M. Trandafir (615, 746, E: 189, 192, 225, 227, 230, 242). Anul II. Bărbulescu T. Alexandru (567, 576, 685, 718, 721, 723, 724, 748, E: 239, 242, 243, 248).

PLOEȘTI. Liceul I. L. Caragiale. Clasa VI-a. Bărbieru Pana (E: 243, 244, 245, 246, 247), Drăgan Radu (E: 243, 244, 245, 246, 247), Georgescu I. Mihai (E: 243, 244, 245, 246, 247), Ionescu Lucian (E: 243, 244, 245, 246, 247), Panaitatu Gh. Dumitru (E: 243, 244, 245, 246, 247), Popescu Florian (E: 243, 244, 245, 246, 247), Pop Ștefan (E: 243, 244, 245, 246, 247), Tănase Stelian (E: 243, 244, 245, 246, 247), Clasa VII-a: Manole Ioana (E: 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251), Clasa VIII-a: Brozici Mircea (633, E: 160, 163, 169, 171, 174, 184, 185, 186, 197, 202, 204, 207, 209, 213, 215, 217, 218, 220, 223, 227, 245, 247, 248), Luputiu Ioan (675, 722, 724, 736, 739, E: 213, 214, 216, 218, 219, 220, 222, 223, 227, 230, 231, 245, 248, 250, 251), Opriș Cristache (718, E: 175, 177, 178, 181, 195, 203, 204, 205, 206, 208, 223, 240, 242, 245), Stroe Radu (554, 575, 581, 590, 600, 633, 643, 650, 651, 658, 717, 723, 725, 744, 765, 768, 770, E: 155, 158, 163, 165, 170, 173, 174, 179, 186, 187, 200, 224, 226, 233, 246, 248, 250, 252, 253, 254, 256, 260, 261, P), Vulpescu Marcel (E: 208, 217, 228, 235, 236, 239), Clasa IX-a. Dogaru Iulian (651, 662, 664, 675, 691, 693, 696, 736, 742, 751, 756, 761, P), Horoiu Dan (588, 591, 624, 655, 745), Jipa G. Vasile (632, 727, 736, 743, 744, 745, 748, 761, 762), Negrea Sorin (744, 745, 746, 748, E: 297), Panaitescu Alexandru (566, 581, 607, 620, 651, 662, 682, P), Ștefănescu Venera (581, 583, 724, 726, 744, 748, 758, E: 172, 223, 225, 230, 239), Clasa X-a. Cristian Ionel (526, 527, 534, 558, 566, 575, 582, 583, 585, 586, 593, 597, 602, 604, 663, 665, 669, 673, 693, 716, 717, 733, 736, 740, 743, 744, 745, 748, 749, 752, 753), Dogaru T. Mihai (502, 526, 533, 534, 566, 570, 586, 602, 605, 622, 633, 647, 648, 659, 661, 662, 663, 664, 666, 669, 670, 673, 674, 675, 677, 681, 682, 685, 691), Dumitrescu Stelian (728, 744, 745, 748, 756), Făgăraș Constantin (543, 593, 675, 683, 690, 691, 703×, 706×, 707×, 709×, 711×, 712×, 715, 716, 723, 724, 726, 728, 735, 736, 740, 744, 745,

747, 748, 751, 756, 757, E: 180, 203, 207, 208, 209, 236, 239, 246, 248, 251, P), Mangu Ștefan (645, 655, 670, 685, 690, 691, 707, 724, 748), Pușcașu Alexandru (554, 648, 651, 652, 655, 657, 663, 664, 665, 666, 670, P), Vulpescu D. Dumitru (630, 648, 658, 682, 727, 736, 740, 742, 744, 748, 749, 757). Clasa XI-a. Marinescu Petre (514, 568, 569, 574, 578, 587, 591, 598, 604, 608, 611, 614, 615, 621, 627, 630, 633, 643, 648, 651, 666, 670, 685, 687, 691, 703×, 705×, 707×, 710×, 722, 724), Stan Gh. Ioan (632, 633, 723, 724, 727, 736, 743, 744, 745), Școala medie tehnică de Comerț. Anul II. Ciainu Rodica (604, 655, 691, 724, 748).

PREDEAL. Clasa X-a. Alexa Ioan (611, 625, 632, 655 658, 670, 673, 680, 693, 697, 716, 718, E: 208, 216, 222, 284), Budin I. Constantin (600, 601, 625, 633, 642, 650, 655, 658, 659, 673, 680, 693, 697, 701, 715, 716, 718, 723, 726, 728, 729, 734, 737, 743, 745, 746), Coman Gheorghe (608, 611, 625, 632, 655, 658, 670, 673, 680, 687, 693, 718, E: 193, 197, 213, 216, 217, 218), Duțu I. Gheorghe (625, 649, 650, 655, 659, 673, 680, 685, 693, 697, 701, 715, 716, 717, 718, 726, 728, 729, 734, 750, E: 193, 207, 208, 209, 213, 216, 225, 230, 235), Hușțiuc N. (567, 625, 643, 655, 670, 673, 680, 693, 697, 718, E: 182, 217, 223), Iordăchescu Gabriel (584, 611, 655, 658, 670, 673, 680, 685, 693, 697, 718, 726, 727, 743, 747), Pupăzan V. Nicolae (615, 621, 624, 640, 642, 649, 650, 659, 660, 673, 674, 675, 679, 680, 682, 685, 691, 692, 693, 697, 699, 701, 703×, 707×, 715, 717, 718, 723, 726, 729, 731, 743, 744, 746, 747, 748, 750, 753, 752, 755, 757, 758×, 761×), Răduț Nicolae (611, 625, 643, 655, 670, 673, 680, 685, 693, 697, 718, E: 203, 213, 216, 217, 218, 219, 223, 230, 236, 239, 240, 245, 247, 251), Uță G. Florian (526, 540, 560, 578, 587, 596, 621, 624, 625, 640, 642, 649, 650, 652, 655, 658, 659, 660, 666, 671, 673, 674, 675, 676, 679, 680, 681, 682, 687, 691, 692, 693, 694, 696, 697, 698, 699, 701, 704×, 706×, 707×, 715, 716, 717, 718, 719, 721, 723, 724, 726, 727, 728, 729, 731, 734, 736, 737, 743, 744, 745, 747, 748, 750, 752, 753, 757, 758×, 761×), Vereș A. Eugen (649, 650, 659, 673, 680, 693, 697, 701, 715, 716, 728, 729, 747, 750, 757).

PUCIOASA. (Reg. Ploești). Vasile Cristian (709×, 710×, 711×, 712×, 713×, 714×).

RÂMNICUL-SĂRAT. Liceul mixt. Clasa VII-a. Vlase Constantin (E: 243, 244, 245, 246, 247). Clasa VIII-a. Voicea Viorica (655, 658, E: 208, 243, 245).

RÂMNICUL VÂLCEA. Clasa IX-a. Neguț C. Gheorghe (658, E: 157, 175, 192, 208, 213, 216, 245), Clasa X-a. Stănescu G. Alexandru (655, 665, 716, E: 182, 193, 200), Clasa XI-a. Stan I. Gheorghe (630, 666, 670, 685, 716, 718, 721, 746, 757).

REȘIȚA. Clasa X-a. Popescu Al. Dan (538, 603, 633, 643, 648, 660, 675, 685, 690, 691, 693, 695, 698, 701, 703×, 705×, 709×, 711).

ROMAN. Școala medie tehnică de mecanică. Anul III. Ionescu Al. Costache (685, 686, 717, E: 223, 224, 225, 226, 228, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 237, 240, 242, 243, 245, 246, 247, 248), Vasilescu Anton (651, 685, 745, E: 208, 209, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 230, 231, 234, 235, 237, 239, 240, P), Liceul de băieți. Clasa VIII-a Juncu Gelu (758×, E: 165, 223, 243, 245), Clasa XI-a. Lazăr Aldo Ioram (534, 540, 543, 546, 548, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558×, 559×, 560×, 562×, 582, 583, 584, 585, 587, 588, 590, 591), Vulpe Ioan (601, 604, 608, 611, 617, 625, 631, 633, 664, 670, 673, 682, 703×, 704×, 716, 717, 724, 744, 745, 748, 756, 757).

SATU-MARE. (Baia). Clasa XI. Călinescu Valeriu (621, 685, 691, 716, 721, 744, 745, 748).

SCĂENI (Ploești). Școala elementară mixtă. Clasa V-Ia. Drăgan Ana (E: 165, 202, 203, 235, 245), Dinu C Florica (E: 175. 202, 203, 231 240, 243, 245, 247), Simion I Teodora (E: 165, 175, 202, 238, 243, 245, 247), Stan Maria (E: 165, 202, 235, 240, 243, 245, 247), Simion St. Maria (E: 165, 175, 202, 240 ,243, 245, 247), Stănescu H. Constantin (E: 165, 175, 202, 203, 232, 235, 240, 243, 247), Tameș Constantin (E: 165, 175, 202, 203, 240, 243, 247), Tatu D. Valeria (E: 165, 203, 235, 240, 243, 247), Clasa VII-a. Biță Ion (E: 213, 218, 230, 235, 243, 245), Angelescu P. Alexandru (E: 156, 160, 165, 175, 202, 207, 209, 251), Dinu Constantin (E: 220, 231, 232, 233, 244, 251), Dima Emilia (E: 213, 225, 229, 230, 236, 239, 243, 245, 247, 251), Diaconu Ion (E: 213, 235, 243, 245, 247), Ene Gheorghe (E: 165, 176, 203, 213, 216, 218, 236, 239, 240, 243, 246, 247), Ene E. Maria (E: 213 218, 243, 245, 247), Frecăuțeanu Teodor (E: 203, 213, 216, 218, 221, 235, 236, 239, 243, 245, 247), Georgescu N. Ion (E: 165, 202, 203, 206, 209, 210, 227, 235, 240), Ghindescu V. Vasile (E: 176, 213, 218, 240, 243, 245), Stănescu Elena (E: 213, 218, 230, 232, 235, 236, 239, 243, 245, 247, 251), Teodoru I. Constantin (E: 160, 218, 225, 230, 243, 246).

SLATINA. Clasa VIII-a. Popescu I. Florea (597, 655, 670, E: 156, 157, 197, 200, 207, 208), Clasa IX-a. Badea D. Constantin (552, 554, 555, 568, 569, 571, 572, 580, 597, 602, 607, 622, 679, 691, 693, 694, 721, 728, 733, P), Florea Ion (744, 748, E: 243, 244, 245, 246, 248), Pișculescu Constantin (615, 655, 658, E: 156, 161, 165, 173, 182, 213, 218, 220, 223, 240, 243), Stroescu A. Marin (621, 655, E: 218, 213, 225, 230), Popescu Gh. Sergiu (709×, 722, 724, 756, 758, 759, 760, E: 156, 172, 174, 246, 248), Clasa X-a. Ivuță P. Petre (643, 666, 721, 723, 744, 748, E: 215, 217, 218, 220, 239, 243, 244, 245, 246), Zigulescu D. Marius (543, 607, 608, 610, 611, 612, 615, 621, 627, 632, 633, 643, 651, 655, 658, 716, 717, 744), Clasa XI-a. Crăcea I. Ștefan (514, 608, 621, 633, 666, 718, 748, E: 200, 213, 251, P), Militaru D. Marius (611, 643, 666, 718, 721, 723, 743, 748, E: 213, 218, 235, 236, 239), Popescu Marcela (591, 593, 658, 666, 691, 705×, 707×, 709×, 710×, 711×, 717, 734, 744, 745, 748, 756, 757, 758, 759, 760, 761, E: 243), Zigulescu D. Matache (543, 627, 630, 685, 718, 721, E: 182).

SUCEAVA. Clasa IX-a. Chindaus Vasile (748, E: 230, 236, 245, 248), Budăi Teodor (691, 713, E: 216, 217, 220, 223, 224, 227, 239), Cazachevici Gheorghe (691, 743, 745, 748, E: 223, 224, 225, 227, 248, 251), Georgian Mihai (743, 748, 753, E: 250, 251).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VIII-a. Berbente Corneliu (590, 591, 567, 574, 585, 615, 621, E: 155, 156, 157, 160, 163, 178, 182, 203, 204, 208, 209, 210, 213, P), Brebu I. Gheorghe (534, 548, 574, 590, 641, 670, 723, 724, 728, 740, 745, 746, 765, 767, 768, 770, P), Galatky A. Gheorghe (554, 567, 569, 590, 593, 597, 663, 670, 689, 723, 727, 741, E: 171), Onea M. Gheorghe (E: 156, 160, 210, 220, 230, 245), Oprea A. Aurelian (586, 655, 685, 721, 744, 746, 748, E: 243, 259), Stoian I. Gheorghe (621, 643, 685, 745, E: 245), Ristoiu I. Alexandru (E: 157, 213, 218, 225, 236), Clasa XI-a. Brezeanu Ioanin (581, 647, 648, 651, 653, 654, 655, 658, 661, 664, 666, 667, 670, 671, 673, 676, 678, 682, 683, 685, 686, 687, 691, 693, 694, 701, 703, P), Băbescu Gr. Eftimie (521, 576, 581, 584, 607, 620, 624, 629, 630, 634, 643, 647, 648, 653, 665, 666, 673, 675, 678, 685, 689, 691, 698, 701, 703×, 704×, 705×, 706×, 709× 710×, 714×, 715, 716, 718, 721, 723,

724, 726, 727, 728, 734, 736, 743, 744, 745, 748, 757, 758×, 759×, 760×, 761×, 762×, E: 157, 197, 199, 200, 207, 208, 213, 221, 222, 236, 239), P), Oprea A. Constantin (521, 534, 548, 555, 568, 571, 581, 583, 598, 599, 601, 603, 606, 607, 618, 621, 622, 629, 643, 648, 651, 655, 658, 659, 666, 670, 675, 685, 698, 701, 710×, 718, 721, 724, 726, 727, 728, 736, 744, 745, 746, 748), Şcoala medie tehnică de petrol. Anul II. Bobeică I. Dumitru (718, 721, 723, 739, 740, 748, 751, 765, 767, 768, E: 223, 230, 233, 236, 238, 239, 242, 243, 245, 247, 252, 258, 259).

TÂRGU-JIU. Clasa VIII-a. Şerbulescu V. Ion (740, E: 175, 179, 225, 236, 239, 243, 245, 247, 251), Clasa IX-a. Cațighera Virgil (608, 632, 670, 682, 695, 736, 744, 745, 748), Garnoviceanu Coriolan (505, 508, 591, 611, 615, 621, 645, 658, 744, 770, 779, E: 156, 157, 159, 160, 169, 175, 179, 192, 197, 207, 218, 223, 225, 228, 230, 234, 235, 239, 243, 245, 246, 251, P). Clasa X-a. Croicu D. Constantin (630, 633, 640, 643, 685, 721, 726, 748, E: 207, 209, 243, 245), Crăciun V. Constantin (E: 213, 216, 223, 225, 228, 245), Olaru Grigore (611, 624, 627, 630, 632, 651, 664, 682, 709, 716, 723, 724, 728, 744, 745), Stamatoiu V. Vasile (593, 607, 630, 658, 666, 685, 718, 721, 723, 724, 740, 743, 748, E: 158, 161, 176, 177, 182, 183, 193, 205, 210, 235, 236, 239, 243, 247, 248, 251). Clasa XI-a. Tița D. Constantin (543, 555, 560, 607, 630, 666, 678, 679, 693, 698, 701, 705×, 709×, 711×, 713×, 731, 736, 743, 744, 745, 748, 751, 752, 753, 756, 757, 759).

TÂRGU OCNA. (Bacău). Clasa XI-a. Ruscinschi Alexe (611, 615, 658, 659, 716, 721, 728, 744, 745, 748).

TÂRGU MUREȘ. Clasa VII-a. Matei Aurel. (E: 160, 161, 175, 176, 182, 225, 230, 233, 237, 239, 243, 247, 252, 254, 255), Clasa VIII-a. Cătărig Alexandru (735, 736, 737, 744, E: 243, 244, 247, 248), Iaina Adrian (735, 737, 740, 743, 744, E: 245, 247), Matei Ioan (735, 736, 737, 740, 743, 744), Ștefanelli C. Dorin (735, 736, 737, 743, 744, E: 248). Clasa IX-a. Antonescu Victor (735, 736, 737, 740, 742, 743, 744, 745, 751, 752, 753, E: 243, 245, 248, 250, 251), Lazlo Jean (726, 736, 737, 740, 743), Moisoiu Adrian (736, 743, 745, E: 224, 234, 243, 244, 245), Popescu Viorel (685, E: 223, 230, 234, 235), Clasa X-a. Matei Nicolae (735, 736, 740, 742, 743, 744, 745, 751, 756), Pușcașu Eugen (578, 621, 625, 685, 735, 736, 742, 743, 744, 745, 747, 751, 756, E: 156, 161, 243, 244, 251).

TECUCI. Clasa X-a. Gheorghiu C. Cezar (618, 685, 670, E: 193, 212, 216, 225) Țurcanu Ioan (718, 721, 742, 744, 745, 748, 755, E: 223, 224, 225, 226, 228, 230, 232, 239, 243, 245, 246, 247, 251).

TIMIȘOARA. Școala elementară Margina Făget. Clasa VII-a: Arsenovici Tiberiu (E: 206, 207, 209, 213, 218, 220, 224, 225, 230, 240). Birăescu Nu,ca (E: 240, 243, 245, 248, 251), Cismariu Ionica (E: 244, 245, 246, 248, 251), Schelegia V. Antoaneta (E: 240, 243, 245, 248, 251), Surducan Viorel (243, 244, 245, 248, 251), Clasa X-a. Bâlă Cornel (683, 685, 718, 721, E: 223), Hammer Ladislau (563, 572, 585, 589, 590, 603, 605, 612, 622, 633, 635, 640, 641, 645, 648, 652, 663, 675, 682, 683, 684, 685, 690, 691, 694, 695, 701, 702, 703×, 704×, 705×, 706×, 707×, 709×, 710×, 715, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 726, 727, 728, 733, 736, 740, 741, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 751, 753, 755, 756, 757, 758×, 759×, 760×, 761×, 762×, P), Clasa XI-a. Pascu Pavel (655, 664, 670, 673, 678, 685, 687, 691, 703×, 716, 721, 724, 728).

TULCEA. Clasa XI-a. Șerban Constantin (601, 604, 618, 621, 633, 655, 670, 682, 687, 745, 748).

TURNU MĂGURELE. Clasa X-a. Chirilă St. Lucian (670, 718, 743, 748, E: 245, 251), Clasa XI-a. Popescu Leontina (691, 705×, 713, 724, 745, E: 230). Absolvent Mihăescu I. Alexandru (565, 638, 650, 672, 719, 725, 727, 736, 737, 739, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 751, 752, 755, 756, 757, 758×, 759×, 760×, 761×, 762×, E: 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 230, 231, 232, P).

TURNU-SEVERIN. Clasa IX-a. Gârjoabă Gh. (721, 742, 743, 745, 748, E: 214, 215, 216, 217, 218, 228, 236, 239), Răduț Marian (743, 748, E: 225, 235, 240), Schefler Alexandru (743, 645, 748, E: 213, 215, 217, 218, 221, 228, 236, 239), Clasa X-a. Cotorogea Dan (713×, 718, 721, 736, 744, 745, 748), Doran Mircea (514, 590, 615, 621, E: 217, 218, 243, 245, 248), Pârvuleț A. Constantin (591, 633, 666, 682, 744, 745, 748), Păunescu Ion (504, 644, 740, 741, 745, E: 204, 210), Pârvulescu Emil (601, 617, 640, 648, 665, 666, 669, 671, 675, 677, 683, 684, 685, 688, 691, 735, 736, 743, 746, 747, 751), Tufan V. Constantin (621,647, 721, 740, 748, E: 239, 243, 245), Clasa XI-a. Surdu Emil (591, 592, 618, 630, 633, 664, 745, 748, P).

VASLUI. Clasa X-a. Baichis J. (567, 603, 628, 655, 657, 744, 748, 757), Clasa XI-a. Alexandru Doru (604, 611, 615, 655, 658, 659, 664, 665, 670, 673, 677, 739, 744, 745, 748, 770, 774, E: 213, 217, 218, 221, 222), Bostan Mircea (633, 685, 658, 655, 728, 748, E: 208, 210, 218, 225, 251), Toma Paul (611, 621, 655, 658, 670, 685, 757).

★

REDACTAREA SOLUȚIILOR

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluție, numele, școala clasa și localitatea.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie.

Pe aceiaș foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul complect al problemei; iar dacă necesită figură, se va desena cu îngrijire. Folosiți soluțiile problemelor din revistă ca model de redactare a soluțiilor și justificați calculele făcute.

La orice problemă propusă se primesc soluții cel puțin timp de 6 luni dela publicarea enunțului. Se mai primesc soluții la problemele cu numărul de ordine: 616, 620, 626, 636, 637, 642, 645, 650, 651, 659, 660, 667, 668, 673 și următoarele; iar pentru elementar, la exercițiile E: 223 și următoarele.

Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse și însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți ca să înceapă a propune probleme, numai după ce au soluționat un număr mare de exerciții și probleme.

Intrucât sosesc la redacție cereri de numere vechi ale revistei, sau reclamații ale abonaților de neprimirea revistelor, vă informăm că pentru abonamente și procurări de reviste să țineți seama de cele arătate pe coperta revistei, redacția neocupându-se de exepedierea și difuzarea revistei.

In plicul cu probleme rezolvate pe o foaie separată, corespondenții sunt rugați să ne comunice data când au primit, acest număr al revistei, sugestii în legătură cu articolele, problemele propuse, numărul problemelor propuse și rezolvate, observări asupra revistelor apărute, precum și propuneri pentru viitoarele numere ale R.M.F.

Problemele rezolvate, propuse, note matematice și fizice, articole, dări de seamă asupra activităților cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, sugestii și propuneri, etc. se trimit pe adresa: Revista Matematică și Fizică, Strada Dionisie Lupu 40, parter, Raionul Stalin, București.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA; Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa priviloare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru întreprinderi . . . . . Lei 60 anual

Tarif pentru muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 795 — ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Lei 1.—

E 1426/a

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OLMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Országos Műszaki
Könyvtár
TULAJDONA

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Trăiască al patrulea Festival Mondial al Tineretului și Studenților pentru Pace și Prietenie!

IULIE 1953

7

EDITURA TEHNICA

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Nicolai Copernic de Mircea Malița*	161
2.	*Structura metalică de C. Rabega*	164
3.	*Rezultatele concursurilor de matematici*	173
4.	*Chestiuni de concurs*	175
5.	*Probleme rezolvate (473, 504, 583, 584, 587, 588, 640, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 661, 662, 663, 664, 665)*	175
6.	*Probleme propuse (943—962) + (963—976 concurs)*	184
7.	*Exerciții și probleme propuse pentru școala de 7 ani (E 315 — E. 324)*	186
8.	*Poșta redacției*	186
9.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	187

ANUL IV 7 IULIE 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacție

REDACȚIA: Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — București

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondența privitoare la activitatea matematică și fizică a școlilor, precum și orice material informativ care ar interesa redacția noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 7 Iulie 1953

NICOLAI COPERNIC

Mircea Maliţa

lector universitar

Faptul că Pământul se roteşte, constitue astăzi unul din adevărurile pe care le dobândeşte orice om odată cu primele cunoştinţe ştiinţifice şi ale căror evidenţă este unanim recunoscută. Mai pune cineva la îndoială că Pământul exercită în cursul unui an o mişcare de revoluţie în jurul Soarelui şi că în 24 ore se roteşte complect în jurul propriei sale axe?

Dar iată că acest adevăr nu numai că nu a fost recunoscut întotdeauna, dar timp de 1500 ani a fost combătut ca o mare erezie, ce putea să coste viaţa celui care o împărtăşea. Numai după îndelungate lupte şi cu grele jertfe a putut fi răsturnată teoria oficială a fixităţii Pământului în spaţiu, care mai domnea acum patru veacuri. Deaceea victoria noii concepţii asupra alcătuirii sistemului solar realizată de opera lui Nicolae Copernic, genialul savant polonez, dela a cărui moarte s'au împlinit 410 ani la 24 Mai, constitue unul din cele mai mari momente ale istoriei ştiinţei. Ea continuă să prezinte acelaşi pasionant interes pentru toţi cei care vor să cunoască piedicile pe care le-au avut de înfruntat adevărurile cele mai simple ale ştiinţei, până au devenit bunuri ale întregii omeniri.

Nicolai Copernic (1473—1543)

Copernic a trăit într'o epocă de mari prefaceri. La sfârşitul secolului al XV-lea începuse bătălia între feudalism şi burghezia orăşenească, care odată cu acapararea de bogăţii dorea să cucerească şi influenţa politică. Orizontul lumii se lărgea. Copernic avea 19 ani, când Columb descoperă America. El a fost contemporan cu perioada de înflorire a literaturii şi artei, care proclama, în contrast cu amorţirea evului mediu, dragostea de viaţă şi forţa creatoare a omului. Această epocă a Renaşterii era cea mai progresistă cotitură din viaţa omenirii de până atunci, cum o caracterizează Engels.

Dar biserica care furnizase întreg arsenalul ideologic al feudalismului, continua să exercite apăsarea ei de plumb asupra tuturor domeniilor gândirii. Neadmiţând niciun fel de obiecţii şi cunoştinţe care să contrazică dogmele sale, biserica constituia o frână puternică a progresului. In domeniul concepţiilor asupra universului ea susţinea teoria geocentrică după care Pământul este fix şi în jurul său, pe nişte cercuri, se rotesc atât stelele, cât şi Soarele şi planetele.

Această teorie concorda cu afirmaţiile bibliei şi se bucura de sprijinul autorităţii lui Aristot, ale cărui idei fuseseră desvoltate în secolul II de către Ptolomeu în cartea sa « Almagesta ». Cum observaţiile asupra mişcării planetelor nu verificau teoria lui Aristot, după care acestea descriau orbite circulare având ca centru Pământul, Ptolomeu a mers mai departe afirmând că planetele descriu cercuri, ale căror centre se mişcă la rândul lor pe alte cercuri în jurul Pământului.

Primele se numeau epicicle, iar celelalte excentrice. In decursul a 14 veacuri de existenţă a sistemului lui Ptolomeu, la fiecare necorespondenţă între observaţii şi calcule, adepţii săi mai adăugau câte un cerc în ipotezele lor.

Până la urmă s'a ajuns la situaţia ca pentru explicarea mişcării planetelor să fie nevoe de peste 60 cercuri. Nemulţumirile printre astronomi începuseră să se ivească. Pe la 1250, Regele Castiliei Alfons care se ocupa cu astronomia şi căruia i se datorează cunoscutele tabele planetare din evul mediu, exasperat de numărul epiciclelor şi a excentricelor a afirmat că dacă dumnezeu l-ar fi întrebat

și pe el când a făcut lumea, i-ar fi dat sfatul să alcătuiască mai simplu mișcarea planetelor.

Un sistem greoi și complicat ca acesta nu mai putea satisface cerințele astronomiei în epoca marilor navigatori și a cuceririlor geografice.

Dar răsturnarea sistemului lui Ptolomeu și demonstrarea sistemului heliocentric, după care Pământul și planetele se mișcă în jurul Soarelui presupuneau o luptă îndârjită a științei cu suprema, autoritate a bisericii. Vorbind despre caracteristicile științei, I. V. Stalin spune: « Știința tocmai deaceea se numește știință, pentrucă ea nu recunoaște fetișe, nu se teme să ridice mâna împotriva a ceeace și-a trăit traiul, împotriva a ceeace este vechi, și își apleacă urechea cu luare aminte la glasul experienței, la glasul practicei. Dacă lucrurile ar sta altfel, nu am avea deloc știință, n'am avea de pildă astronomie și ne-am pierde încă timpul cu sistemul învechit al lui Ptolomeu » . . .

Unul din cei care au dus spiritul științific la triumf în bătălia împotriva obscurantismului medieval a fost genialul Copernic. Nicolai Copernic, s'a născut la 19 Februarie 1473 în Torun, oraș comercial pe fluviul Vistula. Sute de ani regiunea în care era situat Torunul a cunoscut dominația asupritoare și expedițiile de jaf ale ordinului teutonilor. Copilul crește în cântecele și povestirile bunicii sale care vorbeau despre suferința și lupta poporului. Tatăl său, negustor cu multe relații dela Gdansk până la Cracovia, era un cunoscut membru al organizației Șopârlei, îndreptată împotriva Teutonilor. Când el moare, Nicolae nu are decât 10 ani și primește ca tutore pe fratele mamei sale, canonicul Waczenrod. Om cu mare autoritate și cu studii înalte, Waczenrod era o figură centrală a rezistenței împotriva teutonilor. Unchiul său îl dă pe Copernic la o școală cu caracter deosebit care pregătea pe viitorii studenți ai universității iagelonilor din Cracovia; deaceea printre cei ce predau acolo găsim profesori cu renume ca Nicolae Vodka, dela care tânărul Copernic învață să observe și să iubească fenomenele cerești.

El pleacă apoi la universitatea iagelonilor din Cracovia, care pe acea vreme era una din cele mai importante din Europa. Ea număra 15000 studenți veniți din toate părțile. In programul ei pot fi găsite în epoca lui Copernic până la șase cursuri științifice pe semestru, spre deosebire de alte universități în care aceste preocupări nu ocupau un loc atât de important. Nenumărați profesori dela universitatea din Cracovia sunt invitați în sec. XV în Italia unde țin cursuri, dovadă prestigiul de care se bucurau.

La Cracovia întâlnește Copernic pe un alt profesor renumit, pe Voițeh Brudzevschi, care prin expunerile sale de astronomie în cadrul și în afara cursurilor, trezește în mintea lui ideia șubrezeniei sistemului lui Ptolomeu.

Cu această ideie sădită în mintea sa, Copernic pleacă în 1495 în Italia, la Bologna, unde fusese și unchiul său. Deși trebue să urmeze studiul dreptului bisericesc, Copernic se ocupă mai mult de astronomie. Venind în contact cu scrierile vechilor greci, el se documentează asupra ipotezei heliocentrice, pe care află că au susținut-o unii filosofi din antichitate ca Philolaus, Aristarh din Samos și însuși Platon la sfârșitul vieții. Aceștia așezau Soarele în centrul sistemului planetar.

Anul 1500 îl găsește pe Copernic la Roma, unde observă cu atenție o eclipsă de lună. Trecând mereu pe lângă piața Campo dei Fiore, Copernic n'avea atunci de unde să știe că exact peste 100 de ani aci se va înălța rugul lui Giordano Bruno, ars de biserică pentru vina de a fi apărat ideile spre care Copernic înclina acum.

La Bologna și Roma, Copernic se convinge tot mai mult de falsitatea sistemului lui Ptolomeu. In acelaș timp se pătrunde de spiritul umanismului Renașterii.

Se spune că el a cunoscut pe Michel Angelo celebru pictor florentin, care a asistat și la o conferință publică a lui Copernic cu privire la astronomie. Trebue să amintim că și Copernic s'a ocupat cu pictura. Ca orice reprezentant al Renașterii cunoștințele sale au fost multilaterale.

După o scurtă revenire în Polonia, în 1501, Copernic se reîntoarce în Italia, unde studiază de data aceasta medicina la universitatea din Padua și Ferrara. Cu toate acestea astronomia continuă să fie principala sa preocupare, mai ales după ce face observații cu astronomul Domenico Novarra.

La vârsta de 38 ani, Copernic se reîntoarce în Polonia. El are acum titlul de canonic, un fel de funcționar superior al autorităților religioase, care conduceau în același timp întreaga viață publică. S'a stabilit pe lângă unchiul său, episcop de Warmia, la castelul dela Litzbark. Aici, împărțindu-și preocupările între problemele de organizare, activitatea de medic și observațiile astronomice, Copernic pune bazele sistemului său. Din nopțile de cercetare a astrelor și de meditație, se naște « Micul comentar al lui Nicolai Copernic și ipoteza sa asupra mișcării cerești » conceput ca scrisoare pentru prietenii săi din Cracovia și Bologna. In « Micul comentar » Copernic expune axiomele sistemului său heliocentric în opoziție cu sistemul geocentric al lui Ptolomeu.

Peste 6 ani unchiul și protectorul Waczenrod, care avusese grijă de Copernic, moare.

Copernic pleacă în orășelul Frombork, de pe malurile Mării Baltice unde ocupă camerele unui turn pentru a putea face observațiile sale astronomice. Sistemul său prinsese formă și Copernic vroia să-l verifice în lumina observațiilor. Admițând că Pământul este mobil și că se rotește atât în jurul axei sale, cât și în jurul Soarelui, el putea explica ziua și noaptea, precum și anotimpurile. In acest fel el înțelege de ce Marte, Jupiter, Saturn par uneori mai mari, iar alteori mai mici, căci aceste planete nu se rotesc în jurul Pământului și deaceea distanța până la ele variază.

Incetul cu încetul se strângeau date și argumente care sprijineau sistemul lui Copernic. Puternicul spirit de pătrundere al genialului astronom suplinea înapoierea mijloacelor sale de observare. In camera din turnul dela Frombork, instrumentele astronomice, pe care le construise el însuși, nu erau mai evoluate decât cele folosite de Ptolomeu: niște linii și cercuri gradate. Luneta și telescopul urmau să apară deabea peste un veac.

Copernic n'a putut să închine mulți ani preocupărilor sale. Intr'o perioadă de încercări este însărcinat cu administrarea bunurilor bisericii din Oloztyn. Ordinul teutonilor atacă din nou Polonia și Copernic va lupta pentru aceiași cauză pentru care luptase întreaga sa familie. Cetatea Oloztyneste asediată de teutoni. Spiritul organizatoric al lui Copernic contribue mult la apărarea cetății.

Cu acest prilej putem să înțelegem că Copernic nu a fost un gânditor rupt de problemele practice. El inventează un sistem de aducere a apei dintr'un râu învecinat în cetatea asediată.

Nu numai de această dată, dar ani dearândul Copernic a pus munca și energia sa în slujba luptei patriotice împotriva invadatorilor.

Pentru meritele sale el primește dela regele Sigismund cel Bătrân, rangul de împuternicit al regatului în provincia Warmia, pe care-l exercită aproape doi ani. Se păstrează lucrarea sa « despre baterea monezilor », inspirată din treburile economice și administrative, pe care a citit-o în fața seimului în 1522 și care a fost prețuită și citată de economiștii veacurilor următoare.

Cu toate aceste răspunderi pe care nu le-a părăsit complect decât la vârsta de 65 ani, la tratatul său « Despre mișcările de revoluție ale corpurilor cerești », paginile se adăugau an cu an. Opera se compunea din 6 părți care cuprindeau: argumentele pentru nefixitatea pământului și deosebirea dintre punctul de vedere geocentric și cel heliocentric, stabilirea poziției planetelor, schemele geometrice ale mișcării planetelor, teoria mișcării lunii și a planetelor și dimensiunea orbitelor planetare.

Această monumentală lucrare avea să sdrobească definitiv sistemul lui Ptolomeu și pe susținătorii săi. Totuși Copernic nu se grăbea să tipărească opera sa. El își dădea seama că are de înfruntat inerția astronomilor și mai ales asprimea bisericii. Cu toată rezerva sa, ideile lui Copernic încep să circule și trezesc în primul rând protestele lui Luther și Melanchton, care cer condamnarea ereticului Copernic. Din fericire pentru acesta, biserica reformată nu avea mare influență în regiunea sa, iar măsurile bisericii catolice vor întârzia. O înrâurire asupra tipăririi operei sale o are tânărul matematician Rheticus, care își câștigase de pe atunci o bună faimă. Rheticus este unul și acelaș cu profesorul chemat mai târziu de Despot Vodă la Academia Moldovenească dela Cotnar. Tânărul savant stă doi ani lângă Copernic și pe măsură ce se convinge de adevărul teoriei sale, stăruințele sale pe lângă bătrânul astronom de a-și publica cartea devin tot mai dese. El însuși ia sub îngrijirea sa tipărirea operei la Nurenberg.

Din păcate Rheticus fiind mutat la altă universitate nu poate controla tipărirea operei și dușmanii lui Copernic reușesc să introducă o falsă introducere în care atribue lui Copernic credința în valabilitatea vechiului sistem și justifică pe cel nou ca o simplă presupunere utilă pentru calcule. Dar această măsluire nu a putut induce în eroare pe cititori care au fost convinși în primul rând de conținutul operei coperniciene.

Copernic nu mai are când să protesteze. Implinise 70 ani, era obosit și bolnav. Pe patul de suferință, într'un ultim moment de cunoștință, i se arată primele corecturi ale marelui său tratat. Cu ele în mână, Copernic moare, la 24 Mai 1543.

Opera sa a dat o grea lovitură dogmatismului bisericii și superstițiilor medievale, care înăbușeau cercetarea științifică. De acum înainte știința se emancipează și se desvoltă eliberată de scolastică. Publicarea operei lui Copernic este după Engels « actul revoluționar prin care știința naturii a proclamat independența sa ».

In tot veacul al XVI-lea singura universitate din Europa care are curajul de a expune teoriile lui Copernic este cea din Cracovia. La începutul veacului următor însă ideile sale dau roade. In ciuda persecuțiilor închiziției, Giordano Bruno și Galileo Galilei duc lupta pentru răspândirea sistemului copernician.

Pe baza ideilor lui Copernic, Isaac Newton va putea înscrie prin descoperirea legii gravitației o

nouă victorie a materialismului în concepţiile despre univers.

Este interesant să constatăm că astăzi, din teoriile deslănţuite de idealismul contemporan, reprezentat de unele şcoli americane, împotriva concepţiilor materialiste, rezultă că sistemul lui Ptolomeu şi al lui Copernic ar fi la fel de justificate din punctul de vedere al calculului.

Aceste teorii au fost combătute de savanţii sovietici, care în cercetările lor continuă glorios măreaţa tradiţie a ştiinţei materialiste, la bazele căreia stă opera lui Copernic.

La propunerea Biroului Consiliului Mondial al Păcii, în 1953 partizanii păcii cinstesc memoria acestui mare fiu al poporului polonez.

Al patrulea centenar al morţii lui Copernic nu a putut fi comemorat acum 10 ani, din pricina războiului şi a ocupaţiei fasciste care-şi abătuse asuprirea şi asupra Poloniei. Acum când creşte în întreaga lume lupta pentru întărirea prieteniei între popoare şi când în patria lui Copernic cultura înfloreşte în deplină libertate, cel care după caracterizarea lui Engels a fost « un gigant al spiritului, erudiţiei şi caracterului » este omagiat cu recunoştinţă de întreaga omenire progresistă.

STRUCTURA METALICĂ

Dr. Constantin Rabega
Conferenţiar la Universitatea C. I. Parhon

I. Metalele şi aliajele au o deosebită însemnătate atât în economia naţională, cât şi în viaţa de toate zilele. In tehnică sunt folosite *metalele feroase* (fierul şi aliajele sale), *metalele neferoase uşoare* (aluminiul, magneziul şi aliajele lor) şi *metalele neferoase grele* (cuprul, plumbul şi aliajele lor).

Studiul metalelor şi aliajelor se numeşte *metalografie* sau *metalurgie fizică*. Metalografia a luat naştere în veacul al XIX-lea din activitatea practică desfăşurată în turnătoriile de oţel din Rusia şi a fost fundamentată pe principii ştiinţifice de metalurgiştii ruşi P. P. Anosov şi D. C. Cernov.

Metalografia a fost ulterior desvoltată, luând un avânt uriaş, mai ales după Marea Revoluţie din Octombrie, când a fost pusă la dispoziţia metalografilor analiza fizico-chimică, introdusă de academicianul sovietic N. S. Curnacov.

In anii Puterii Sovietice savanţii metalografi: N. S. Curnacov, A. A. Baicov, N. N. Davidencov, etc. au reuşit să crească numeroase cadre de metalografi, înfiinţând numeroase şcoli, unde s'au desvoltat cunoştinţele de metalografie. Este deajuns să arătăm că din şcoala academicianului Baicov s'au ridicat marii savanţi metalografi sovietici: N. T. Gudţov, V. N. Sfecinicov, B. V. Starc, M. P. Slavinschi, etc.

Prin rodnica lor activitate de cercetări ştiinţifice, s'au creat numeroase aliaje de calitate superioară, care au înlesnit o desvoltare nemaiîntâlnită a tehnicei în fabrici şi uzine.

Ţinând seama de însemnătatea deosebită a metalelor şi aliajelor, în articolul de faţă se va insista în general asupra structurii metalice, în lumina cunoştinţelor metalografice actuale.

Prin structură metalică se înţelege modul în care sunt orânduite particulele unui metal în reţeaua sa cristalină.

Ceeace se poate vedea cu ochiul liber din structura metalică constitue *macrostructura cristalină*. Studiul microscopic al acestei structuri ne arată unele amănunte, care scapă ochiului liber, şi care constitue *microstructura cristalină*. Insfârşit, pe cale roentgenografică, pot fi constatate componente şi mai mici, de ordinul de mărime a atomului, care reprezintă *roentgenostructura*.

Pentru a studia structura metalică este necesar să amintim mai întâi unele noţiuni fundamentale:

Se ştie că, în funcţie de coeziune, corpurile pot fi solide, lichide şi gazoase. După aspectul lor, corpurile solide pot fi clasificate în două categorii: *cristalizate* şi *amorfe*.

Lăsând deocamdată la o parte corpurile amorfe, care — după cum ne arată însuşi numele lor — n'au forme regulat geometrice, corpurile cristalizate, dimpotrivă, se înfăţişează în forme regulat geometrice, numite *cristale*. După mărimea lor, cristalele sunt de două feluri: *cristale vizibile cu ochiul liber* sau *macrocristale* (ex. clorura de sodiu, piatra vânătă, etc.) şi *cristale invizibile cu ochiul liber* sau *microcristale* (ex. metalele, marmora, etc.).

In cristale, particulele componente (atomi, ioni, molecule) sunt aşezate într'un anumit fel şi de aceea libertatea acestor particule este oarecum îngrădită,

reducându-se în esență la o mișcare vibratorie în jurul unor anumite poziții de echilibru.

O altă trăsătură esențială a stării cristaline o constitue *anizotropia*, datorită căreia cristalul, deși omogen ca structură, are totuși însușiri diferite în funcție de anumite direcțiuni din cuprinsul său. De exemplu proprietățile electrice, mecanice, optice și termice ale aceluiași cristal, determinate dealungul axului longitudinal, sunt diferite față de cele măsurate dealungul axului transversal.

Corpurile cristaline sunt *clivabile*, adică pot fi despicate cu ușurință dealungul unor plane orientate într'un anumit sens, numite plane de *clivaj* și fiecare substanță cristalină se topește în mod brusc la o anumită temperatură constantă, care caracterizează substanța dată.

Corpurile amorfe (ex. cauciucul, sticla, smoala, rășinile, etc.) au însușiri asemănătoare cu acelea ale lichidelor, comportându-se ca niște *lichide subrăcite*; fiind alcătuite din macromolecule filiforme (molecule foarte mari, alungite), prezintă o viscozitate foarte mare și de aceea, o viteză de scurgere foarte mică.

O altă trăsătură esențială a stării amorfe o constitue izotropia, datorită căreia un corp amorf posedă aceleași valori ale însușirilor sale fizice în toate direcțiile.

Corpurile amorfe pot fi fragmentate în porțiuni, de forme cu totul neregulate, adică dau suprafețe de ruptură foarte neregulate; spre deosebire de cele cristaline care sunt clivabile.

In timp ce corpul cristalin se comportă la topire așa cum s'a menționat mai înainte, cel amorf nu trece din starea solidă în cea lichidă în mod brusc, la o anumită temperatură, ci această trecere se face treptat, pe un anumit interval de temperatură, în care substanța amorfă se înmoaie înainte de a se topi și astfel în acest stadiu poate fi ușor modelată. Pe această proprietate a substanțelor amorfe se sprijină prelucrarea sticlei și a altor substanțe din această categorie.

După cum s'a amintit mai înainte, cristalele sunt de două feluri: macrocristale și microcristale.

Structura cristalină poate fi observată cu ochiul liber numai la cristalele mari, izolate (ex. cristalele de cuarț, de sare gemă, etc.). Aceste macrocristale izolate, solitare, se mai numesc și *monocristale*. Imensa majoritate a corpurilor solide au însă, o structură microcristalină sau *policristalină*. Toate metalele au o structură policristalină.

Toate microcristalele unui metal sunt atrase între ele prin forțe moleculare, în așa fel încât conglomeratul respectiv se prezintă ca un tot unitar. Datorită faptului că microcristalele sale sunt într'o accentuată dezordine, o bară metalică în ansamblul său nu prezintă anizotropie, deși fiecare microcristal în parte este anizotrop.

Structura policristalină a unui metal poate fi observată numai dacă se studiază suprafața sa șlefuită; în acest caz, putem zări cristale chiar cu ochiul liber (macrocristale) sau numai cu ajutorul microscopului (microcristale).

Monocristalele diferitelor metale se pot obține prin răcirea metalului respectiv în stare topită. In timpul răcirii, în topitură, iau naștere mai multe *centre de cristalizare*; în aceste centre apar cristale care se desvoltă cu viteze diferite și contribue astfel la formarea structurii policristaline.

Pentru a obține un monocristal, trebue neapărat să favorizăm numai desvoltarea unui singur centru de cristalizare. Aceasta se poate realiza însămânțând în metalul topit un cristal din același metal, care va îndeplini rolul de centru de cristalizare; pentru a obține un monocristal cât mai mare, este necesar ca procesul cristalizării să se efectueze treptat, prin răcirea înceată a topiturii, iar aceasta să rămână în nemișcare. In acest mod, pe fețele cristalului însămânțat se depune în mod uniform metalul, obținându-se un monocristal de aproape 20 cm lungime.

In vederea unui studiu sistematic, formele cristaline au fost clasificate după elementele de simetrie pe care le conțin. Se cunosc 32 de clase de cristalizare, orânduite în 7 sisteme cristaline. Studierea formei geometrice a cristalelor constitue obiectul cristalografiei.

Simetria cristalină a fost studiată de cristalograful sovietic E. S. Feodorov, care a scos la iveală strânsa corelație între simetria cristalină a substanțelor și structura lor chimică, punând bazele analizei cristalochimice.

S'a amintit mai înainte că în cristale, particulele componente (atomi, ioni, molecule) sunt orânduite într'un anumit fel. Această orânduire spațială poartă numele de *rețea cristalină*. Pentru a determina o rețea cristalină oarecare, este deajuns să cunoaștem numai structura unei mici porțiuni a rețelei, care poate fi multiplicată prin repetare în cele trei direcțiuni ale spațiului, clădind astfel întregul cristal. Această porțiune din rețeaua cristalină poartă numele de *celulă cristalină elementară* sau *paralelipiped cristalin elementar*. Paralelipipedul cristalin este determinat dacă sunt cunoscute dimensiunile a, b, c, ale celor trei muchii ale sale, unghiurile dintre muchii, numărul, poziția și felul particulelor (atomi, ioni, molecule) care se află în cuprinsul său (fig. 1). Astfel de cunoștințe cu privire la rețelele cristaline se pot dobândi

prin cercetarea cristalelor cu ajutorul razelor X (Roentgen).

Se știe că *interferența* luminii se poate produce fie prin refracția, fie prin reflexia luminii. De exemplu, lumina fiind refractată printr'o placă de sticlă pe suprafața căreia au fost săpate linii apropiate unele de altele, se obțin *franje de interferență*. Aceleași franje pot fi obținute și prin reflexia luminii care cade pe o placă metalică, pe suprafața căreia au fost gravate linii apropiate între ele. Distanța dintre aceste linii poartă numele de *constantă de rețea* (d).

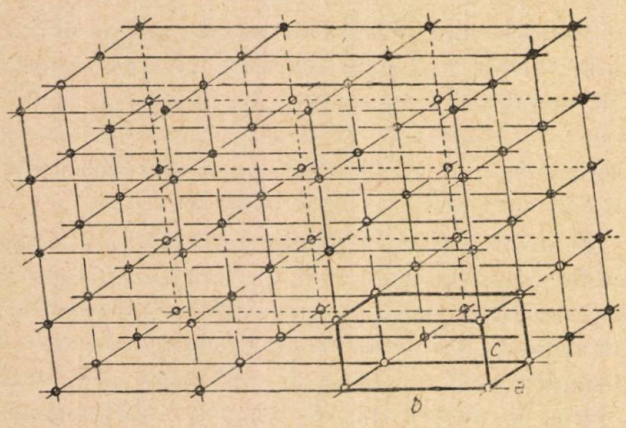


Fig. 1. — O rețea cristalină, în coordonate oblice, arbitrare. Se poate vedea o celulă elementară cu cele trei dimensiuni *a*, *b*, *c*.

In mod obișnuit se folosește un fascicol de raze monocromatice, adică de aceiași lungime de undă (λ).

Intre lungimea de undă a luminii monocromatice (λ), constanta de rețea (d) și unghiul sub care cade lumina pe suprafața rețelii (α), se află relația:

$$2d \sin\alpha = n\lambda$$

în care n este un multiplu întreg al lungimii de undă.

După ce razele X au fost descoperite (1895), s'a crezut că acestea sunt tot unde electromagnetice ca și cele luminoase, însă de o lungime de undă mult mai mică. In condițiile experimentale din acea vreme, verificarea acestei ipoteze era imposibilă, deoarece pentru *difracția* razelor X prin reflexie, trebuiau gravate pe suprafața metalică rețele mult mai apropiate decât în cazurile precedente. De abia în 1912, Laue a reușit să măsoare lungimea de undă a razelor X, folosind cristalele ca rețele de difracție și aplicând formula de mai sus:

$$\lambda = \frac{2d \sin\alpha}{n}.$$

In acest scop, Laue a lăsat să cadă pe suprafața unui cristal un fascicol îngust de raze X. Cea mai mare parte a acestor raze străbat cristalul fără a fi deviate, iar restul razelor sunt difractate și impresionează o placă fotografică, așezată dedesubtul cristalului, producându-se pe aceasta pete de intensități variabile, orânduite simetric (fig. 2).

După cum ușor se poate vedea în fig. 2, fascicolul divergent de raze X care pleacă depe suprafața anticatodului este transformat într'un fascicol îngust de raze paralele, cu ajutorul diafragmei de plumb (*b*). Razele X pătrund numai prin cele două fante ale sale, plumbul fiind opac pentru razele X.

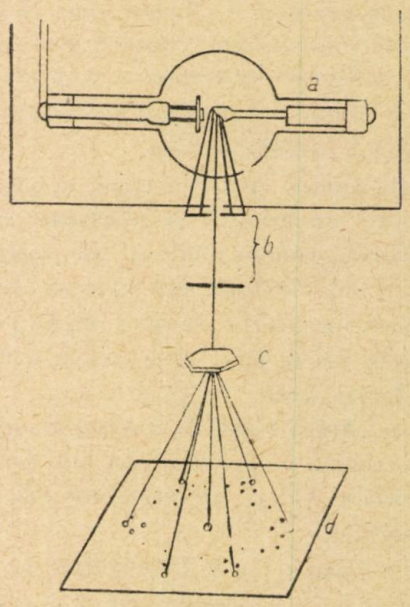


Fig. 2. — Procedeul Laue pentru difracția razelor X în cristale.

a — Generator de raze *X*; *b* — Diafragmă de plumb; *c* — cristalul; *d* — placa fotografică.

In cazul când aceste raze sunt reflectate de planurile atomice ale unei rețele metalice, difracția razelor X se face în același mod.

Pentru aceasta, să considerăm două raze X paralele R_1 și R_2, care sunt reflectate de electronii atomilor din două planuri vecine ale rețelei metalice (fig. 3).

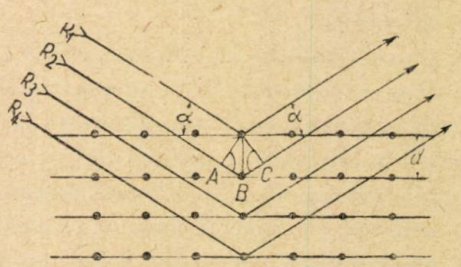


Fig. 3. — Reflectarea razelor X de către electronii din două planuri vecine ale rețelei.

După reflexiune, razele R_1 și R_2 nu mai sunt în aceiași fază, deoarece drumul razei R_2 este mai lung decât al razei R_1.

Intr'adevăr drumul razei R_2 = drumul razei $R_1 + (AB + BC)$.

Diferența de drum $(AB + BC)$ se notează prin δ:

$$AB + BC = \delta$$

Pentru a se forma un *maxim luminos*, iar pe placa fotografică o pată neagră, diferența de drum δ trebue să satisfacă condiția: $\delta = n\lambda$, în care n este un multiplu întreg al lungimii de undă. In cazul când $\delta \neq n\lambda$, cele două raze R_1 și R_2 se sting reciproc.

Insă $AB = BC = d \sin\alpha$ (în care d = constanta rețelei).

Deci $AB + BC = d \sin\alpha + d \sin\alpha = 2d \sin\alpha$ sau

$$2d \sin\alpha = n\lambda$$

De unde:

$$\lambda = \frac{2d \sin\alpha}{n}.$$

Un procedeu mult mai rapid pentru cercetarea difracției razelor X în cristale este procedeul Bragg, în care este folosit dispozitivul experimental, reprezentat schematic în fig. 4.

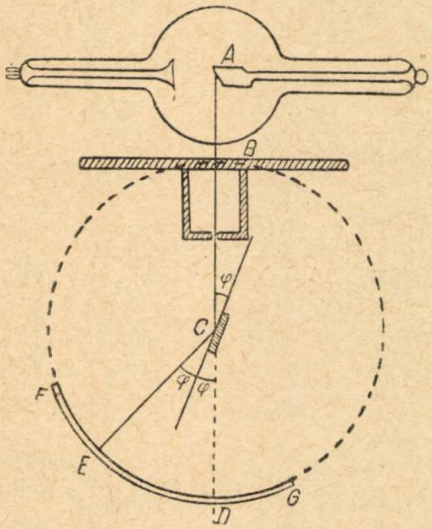


Fig. 4. — Procedeul Bragg

Fascicolul îngust de raze X monocromatice și paralele se reflectă pe suprafața unui cristal, care poate fi rotit în jurul unuia din axele sale de simetrie.

In această rotație, cristalul poate prezenta în calea razelor incidente un plan al rețelei sale, sub un unghiu de incidență φ, care satisface condiția de bază: $2d \sin\varphi = n\lambda$.

In acel moment difracția razelor X se produce, iar pe filmul fotografic circular (rolfilm) G, D, E, F, apare o imagine în E.

Cu ajutorul acestor procedee s'a stabilit roentgenostructura multor cristale.

Pe baza rezultatelor experimentale obținute, putem distinge patru tipuri fundamentale de rețele cristaline, reprezentate schematic în fig. 5.

a) *Rețeaua atomică* este alcătuită din atomi uniți între ei prin covalențe sau legături covalente.

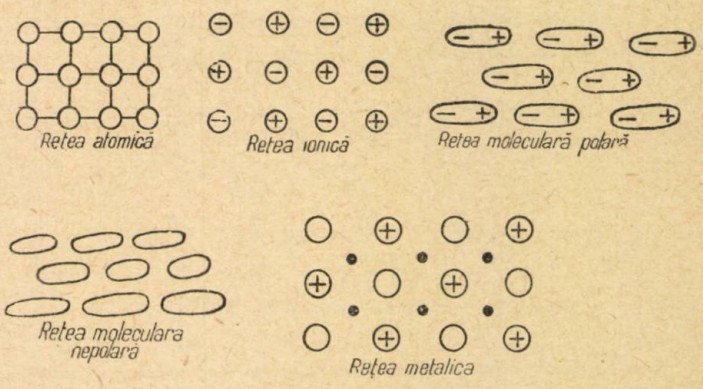


Fig. 5. — Schema rețelelor cristaline.

Să vedem, pe scurt, ce se înțelege prin legătură covalentă. Pentru aceasta, să presupunem că doi atomi de hidrogen se combină între ei.

Atomul de hidrogen este alcătuit dintr'un proton și un electron, care se învârtește în jurul protonului, atomul fiind neutru din punct de vedere electric (fig. 6).

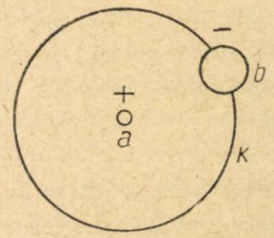


Fig. 6. — Schema atomului de hidrogen
a = protonul; b = electronul; k = stratul electronic.

Atomul de hidrogen tinde să-și completeze la doi numărul de electroni de pe stratul k, căpătând astfel o configurație electronică stabilă numită dublet, identică cu aceia a heliului, care este gazul zerovalent cel mai apropiat ca structură de hidrogen.

Pentru realizarea acestei configurații este necesar ca atomul de hidrogen să capteze un electron din afară. Electronul care trebue captat trebue însă, să aibă un spin antiparalel față de acela al atomului de hidrogen [1]).

[1]) Se numește spin mișcarea de rotație a electronului în jurul propriului său ax, asemănătoare cu mișcarea diurnă a planetelor. Când doi electroni se rotesc în jurul axului lor în același sens, zicem că au același spin sau spin paralelel ($\uparrow\uparrow$); în caz contrar au spin opus sau antiparalel ($\uparrow\downarrow$).

Presupunând că se întâlnesc în spațiu doi atomi de hidrogen, ai căror electroni au spinuri antiparalele, ei își vor pune în comun electronii lor, constituind astfel o pereche de electroni având spinuri antiparalele, un dublet, care poartă numele de covalență sau legătură covalentă.

Cei doi atomi de hidrogen astfel uniți alcătuesc împreună molecula de hidrogen (fig. 7).

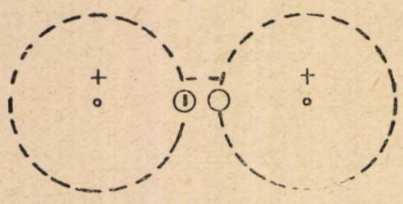


Fig. 7. — Schema moleculei de hidrogen.

Ținând seama că toate covalențele din rețeaua atomică sunt echivalente, individualitatea moleculelor din cuprinsul aceluiași cristal se pierde total și deaceea întregul cristal trebue socotit ca fiind o singură moleculă uriașă. Un exemplu tipic de rețea atomică îl constitue rețeaua diamantului. Deoarece covalențele sunt legături foarte puternice, substanțele cristalizate în rețea atomică se caracterizează prin temperaturi de topire relativ înalte și prin duritate relativ mare.

b) *Rețeaua ionică* este alcătuită din ioni care se atrag între ei prin forțe electrostatice de tip coulombian, numite *electrovalențe*. Să vedem, pe scurt, ce se înțelege prin electrovalență. Presupunem că atomul unui metal alcalin, de exemplu un atom de sodiu (*Na*), reacționează cu un atom al unui halogen, de exemplu, cu un atom de fluor (*F*).

Reacția de combinare este reprezentată schematic în fig. 8. Atomul de sodiu are pe ultimul său strat un singur electron, în timp ce atomul de fluor are pe ultimul său strat 7 electroni. Ambii atomi tind să capete o configurație electronică stabilă, care este aceea a neonului, gazul zerovalent cel mai apropiat ca structură.

Pierzând electronul său de pe stratul *M*, atomul de sodiu se transformă în ionul de sodiu monovalent, iar atomul de fluor, captând electronul dela sodiu, se transformă în ionul de fluor monovalent.

Intre ionul de sodiu electropozitiv și cel de fluor electronegativ, se stabilește o atracție electrostatică de tip coulombian, numită electrovalență.

Datorită echivalenței perfecte a tuturor electrovalențelor din cuprinsul aceluiaș cristal, moleculele își pierd individualitatea lor și deaceea nu mai pot fi riguros delimitate. Cristalul în întregime reprezintă o singură moleculă uriașă, ca și în cazul substanțelor cristaline atomice. Un exemplu tipic de rețea ionică îl constitue rețeaua clorurii de sodiu.

c) *Rețeaua moleculară* poate fi polară sau nepolară, după cum este alcătuită din molecule polare sau nepolare, care se atrag între ele prin forțe slabe Van der Waals.

Moleculele își mențin individualitatea lor în rețeaua cristalină și deaceea oricare dintre acestea poate fi socotită ca element primar al structurii.

Deoarece forțele van der Waals sunt relativ slabe, substanțele cristalizate în rețea moleculară se caracterizează prin temperaturi de topire joase și duritate mică.

d) *Rețeaua metalică* se deosebește esențial de toate celelalte rețele menționate până acum. Ea este alcătuită din atomi, ioni pozitivi și electroni liberi. Prezența acestor electroni liberi se explică prin ionizarea unora dintre atomii metalului. Masa și sarcina electronului fiind foarte mici, ne dăm seama dece electronii pot să se deplaseze ușor în cuprinsul rețelei metalice. Deoarece componentele

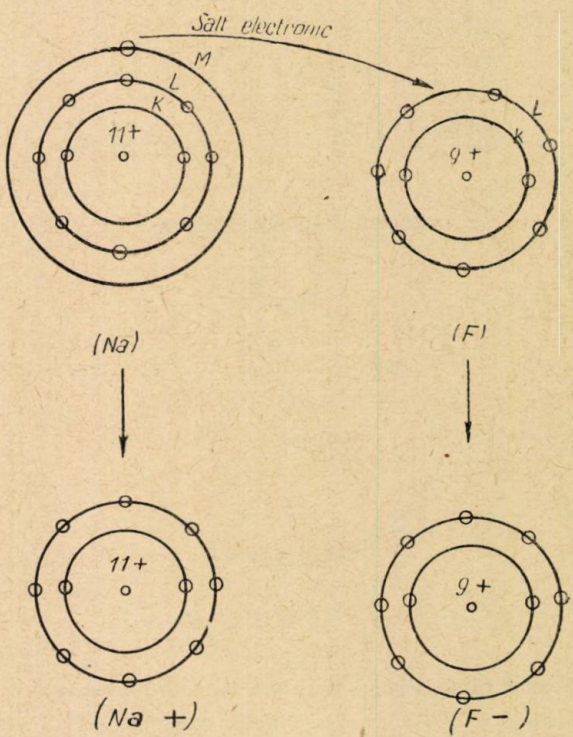


Fig. 8. — Schema formării moleculei de fluorură de sodiu.

rețelei metalice nu se leagă între ele, cristalul în întregime reprezintă o singură moleculă uriașă, ca și cristalele atomice și ionice.

Prezența electronilor liberi în rețelele metalice ne explică existența unor însușiri comune tuturor metalelor. In funcție de acești electroni liberi, ne putem da seama dece toate metalele sunt opace, au luciu metalic și sunt bune conducătoare de căldură și de electricitate.

În opoziție cu substanțele cristaline de tip atomic sau ionic care sunt fragile, adică se sparg în urma deformărilor mecanice, metalele tipice au proprietatea de a se deforma pe cale mecanică, ceeace îngăduie prelucrarea lor.

Cauzele acestor comportări deosebite pot fi ușor explicate, examinând schema deplasării straturilor în diferite rețele cristaline (fig. 9).

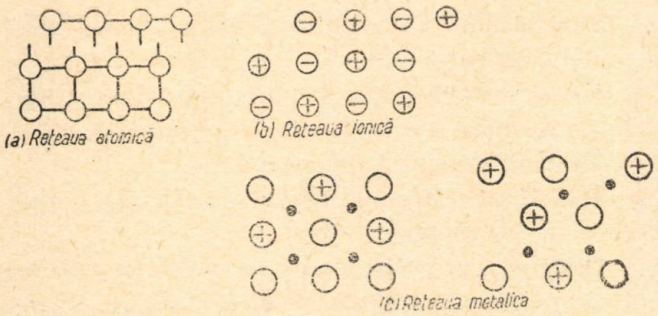


Fig. 9. — Schema deplasării straturilor în diferite rețele.

Prin deplasarea stratului superficial al unei rețele atomice, covalențele se rup și ca atare legătura sa cu straturile celelalte dispare. In mod analog, în urma deplasării stratului superficial al unei rețele ionice, ionii își schimbă poziția spațială în așa fel încât, în loc să se mai atragă între ei (ioni de sarcini opuse), se resping (ioni de aceiași sarcină).

In rețeaua metalică, ținând seama de posibilitatea redistribuirii electronilor, legătura dintre straturi se menține oricum s'ar deplasa straturile unul față de altul.

După cum vedem, însușirile generale ale metalelor sunt reflectate de electronii liberi din rețelele metalice. Cu cât concentrația acestor electroni este mai mare, cu atât însușirile metalice sunt mai accentuate. Pe lângă însușiri generale, metalele au însă și însușiri particulare, proprii fiecărui metal în parte. Acestea oglindesc însușirile atomilor și ionilor pozitivi din rețelele metalice respective. In lumina acestor fapte ne dăm seama de ce duritatea și temperaturile de topire ale metalelor sunt atât de diferite. De exemplu, în timp ce sodiul este moale ca ceara și se topește pe la 100°C, cromul este cel mai dur dintre toate metalele și se topește pe la 1800°C.

Toate forțele atractive din rețeaua metalică pot fi înglobate în așa numita *legătură metalică*. Ea reflectă coexistența covalențelor (între atomi) și a forțelor coulombiene (între ioni și electronii liberi). Această legătură se manifestă când metalul se află în stare solidă sau lichidă (topită) și dispare în starea de vapori.

Rețeaua metalică poate fi socotită ca o rețea intermediară, între rețelele atomice și cele ionice.

Prezența electronilor liberi din această rețea poate fi pusă în evidență prin mai multe mijloace. De exemplu, prin încălzirea unui metal la incandescență, acesta emite electroni, care ionizează aerul; catodul metalic, la o tensiune corespunzătoare, emite electroni sub formă de raze catodice. In mod asemănător, un fascicol de raze ultraviolete, căzând pe suprafața unui metal fotosensibil (ex. metale alcaline), de pe suprafața acestuia se desprind fotoelectroni, care alcătuesc curentul fotoelectronic.

Concepția despre existența unor electroni liberi în metale a constituit teoria electronică a metalelor. In prima sa formă, această teorie admitea că electronii liberi dintr'o rețea metalică se comportă ca moleculele unui gaz. Acești electroni liberi alcătuesc «gazul electronic» și atracția care se stabilește între ei și ionii metalului, determină coeziunea rețelei metalice.

Această concepție despre existența electronilor liberi în metale explică legile lui Ohm și Joule-Lenz.

Insă, mai târziu s'au ivit unele nepotriviri între concepțiile teoretice și rezultatele experimentale, mai ales în privința căldurilor specifice la metale.

Intr'adevăr, dacă se admite existența electronilor liberi care se deplasează în metal și posedă energie, în clipa când metalul este încălzit, ar trebui să se mărească și energia cinetică a acestor electroni. Ca atare, căldura specifică a unui metal, în care numărul electronilor liberi din unitatea de volum este egal cu acela al atomilor săi (de ex. un metal monovalent), ar trebui să fie determinată nu numai de atomi, ci și de acești electroni: Jumătate din căldura specifică a metalului să fie determinată de atomi, iar cealaltă jumătate, de electronii liberi.

In realitate însă, expereința a dovedit că în problema căldurii specifice la metale, electronii nu au nici o influență, deoarece căldura lor specifică este determinată aproape numai de energia atomilor.

Acest impas al teoriei cinetice a «gazului electronic» a fost înlăturat cu ajutorul mecanicei cuantice.

In lumina noilor concepții, într'un metal există un număr limitat de nivele de energie care pot fi ocupate de electroni, iar electronii nu sunt complect liberi în rețeaua metalică, în sensul teoriei cinetice a gazelor. Libertatea electronilor «liberi» din rețeaua metalică poate fi comparată cu aceea a nucilor dintr'un sac, care este oarecum o libertate limitată.

Așa dar, în lumina concepțiilor actuale nu mai poate fi vorba de «gazul electronic», adică de electroni complect liberi care să se comporte în rețeaua metalică întocmai ca moleculele unui gaz.

Numărul acestor electroni pe unitatea de volum se poate calcula cu ajutorul formulei:

$$n_0 \cong \frac{\delta}{\mu} N$$

în care n_0 = numărul electronilor «liberi» pe unitatea de volum
δ = densitatea metalului
μ = 1 mol. de metal
N = numărul lui Avogadro $(6{,}02 \cdot 10^{23})$.

In cazul unui metal monovalent (de ex. argintul), numărul electronilor «liberi» din unitatea de volum este egal cu acela al atomilor de metal.

Pentru a se familiariza cu formula de mai sus, cititorii sunt rugați să determine pe n_0 dintr'un cm^3 de argint și de cupru.

II. *Roentgenostructura metalelor.* Se studiază cu ajutorul razelor X.

Cele mai multe dintre metale cristalizează într'una din următoarele tipuri de rețele metalice: a) *rețea cubică compactă*, b) *rețea hexagonală compactă și* c) *rețea cubică centrată intern.*

este înconjurat de 14 atomi, dintre care 8 sunt mai apropiați, iar 6 mai depărtați.

Din cele 52 de metale, cu structuri cristaline cunoscute, înfățișate în tabelul de mai jos (fig. 11), 32 cristalizează la temperatură joasă în rețele cubice sau hexagonale compacte, iar 14 în rețea cubică centrată intern.

Unele metale cristalizează în mai multe forme (polimorfism).

Sunt demne de menționat polimorfismul staniului și al fierului.

Există deasemenea și metale cu structuri cristaline anormale și din această categorie fac parte wolframul, uraniul și manganul.

III. *Microstructura metalelor* se studiază cu ajutorul microscopului.

Orice metal în stare topită începe să cristalizeze în acelaș timp în *centrele* sale de cristalizare. Microcristalele cresc treptat în aceste centre în toate direcțiile până când suprafețele lor devin tangente. Aceste microcristale se mai numesc și cristalite (fig. 12).

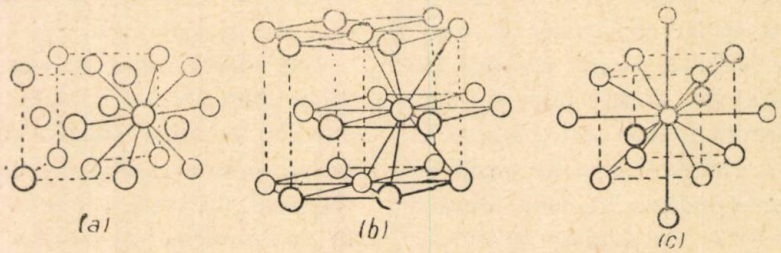


Fig. 10. — *a)* rețea cubică compactă; *b)* rețea hexagonală compactă; *c)* rețea cubică centrată intern.

In primele două forme cristaline, fiecare atom este înconjurat la distanțe egale de alți 12 atomi. In rețeaua cubică centrată intern, atomul central

Cristalitele pot fi puse în evidență astfel: se lustruește suprafața metalului și se atacă apoi cu ajutorul unui acid oarecare. Cristalitele superficiale,

Li	Be												
c	*b*												
1,58	1,12												
Na	Mg	Al											
c	*b*	*a*											
1,92	1,60	1,43											
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge
c	*a(b)*	*b(a)*	*b(c)*	*c*	*c(b)*	*s(s)*	*c(a)*	*b(a)*	*a(b)*	*a*	*b*	*s*	*s*
2,38	1,97	1,66	1,74	1,35	1,29	1,37	1,26	1,25	1,25	1,28	1,37	1,38	1,39
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn
c	*a*	*b*	*c(b)*	*c*	*c*	—	*b*	*a*	*a*	*a*	*b*	*s*	*s*
2,53	2,15	1,82	1,60	1,47	1,40	—	1,34	1,34	1,37	1 44	1,52	1,67	1,58
Cs	Ba	Lant.	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb
c	*c*	—	*b*	*c*	*c(s)*	*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	*s*	*a(b)*	*a*
2,72	2,24	—	1,59	1,47	1,41	1,37	1,35	1,36	1,39	1,44	1,55	1,71	1,75
—	Ra	Ac	Th	Pa	U	La	Ce	Pr	Nd	Er			
—	—	—	*a*	—	*a(s)*	*a(b)*	*a(b)*	*b*	*b*	*b*			
—	—	—	1,80	—	—	1,88	1,82	1,84	1,81	1,77			

Legendă: a. Structură cubică compactă; *b.* structură hexagonală compactă *c.* structură cubică centrată intern; *s.* structuri speciale deosebite de cele trei precedente. La metalele polimorfe sunt redate în paranteză structurile stabile la temperatură mai înaltă. Razele atomice, în Angstromi.

Fig. 11. — Structuri cristaline și raze atomice ale metalelor

orientate diferit, sunt dizolvate cu viteze diferite și de aceea apar sub forma unui mozaic, vizibil la microscop (fig. 13).

Astfel se studiază microstructura cristalină a metalelor, spre deosebire de roentgenostructură care se determină cu ajutorul razelor X.

Ținând seama de faptul că, deobicei, metalele se solidifică în microcristale de forme foarte variate, se poate vorbi de o *structură policristalină* a metalelor.

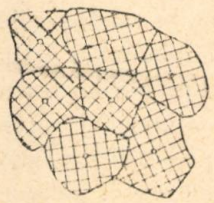


Fig. 12. — Schema formării cristalelor

Metalele numai în anumite condițiuni pot cristaliza în monocristale (cristale de un singur fel).

Monocristalele metalelor sunt mai meleabile, mai ductile, dar mai puțin rezistente la tracțiune decât conglomeratele policristaline obișnuite. Este demnă de relevat transformarea unui monocristal de cupru de forma unei vergele, într'un conglomerat policristalin obișnuit. Dacă, de exemplu, îndoim de câteva ori o vergea de cupru monocristalin, la un moment dat, se produce transformarea bruscă a structurii monocristaline în structură policristalină. Această trecere este însoțită de un sunet ușor perceptibil. In urma acestei transformări, vergeaua de cupru monocristalin își pierde maleabilitatea, dar își recapătă rezistența mecanică obișnuită a cuprului policristalin.

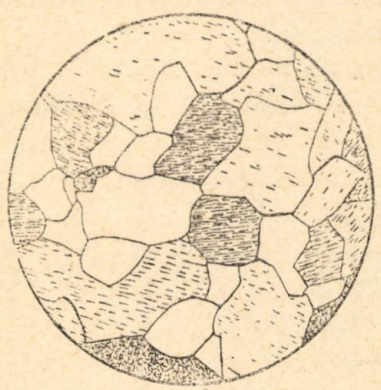


Fig. 13. — Recunoașterea cristalelor prin corodarea suprafeței unui metal.

Analizând suprafețe formate la ruperea prin tracțiune a unui monocristal, se constată că acestea nu sunt fibroase ca în cazul unui metal obișnuit, ci au un luciu perfect, deoarece ele reprezintă chiar planurile atomice paralele ale rețelei cristaline. In cazul când monocristalul este fragmentat în mai multe locuri, suprafețele rezultate vor fi paralele. Ductilitatea mare a monocristalelor este consecința existenței paralelismului pe mare întindere a acestor planuri atomice, ușor deplasabile unele față de altele (planuri de clivaj).

Monocristalul nu se poate deforma în mod uniform în toate direcțiile: este anisotrop. Insă, conglomeratele policristaline sunt quasi-isotrope, deoarece, cristalitele sunt diferit orientate, astfel că diferențele se compensează.

Această quasi-isotropie explică rezistența mecanică mult mai mare a conglomeratului policristalin decât aceea a monocristalului.

In metalurgie, specialiștii pot imprima metalelor însușirile cele mai potrivite scopului urmărit, supunând, pe de o parte metalele unor tratamente mecanice, termice sau termo-chimice (forjarea, laminarea, trefilarea, călirea, recoacerea, etc.), pe de altă parte, schimbând compoziția aliajului (deoarece numai în cazuri foarte rare se folosesc metale chimic pure).

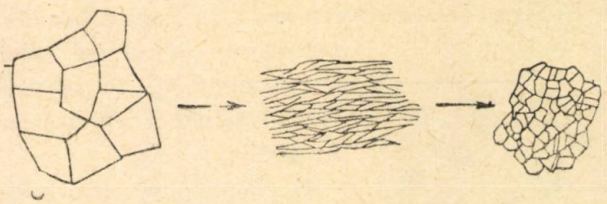


Fig. 14. — Modificarea microstructurii unui oțel prin laminare, urmată de un tratament termic

In aceste tratamente se modifică, în vederea scopului urmărit, structura policristalină, obținându-se cristalitele de orientarea și mărimea necesară. In fig. 14 sunt reprezentate schematic modificările suferite de un oțel prin laminare.

Microcristalele inițiale vor căpăta forma unor fibre orientate într'un anumit fel. Oțelul astfel tratat capătă o microstructură fibroasă, de mare rezistență la tracțiune, însă de ductibilitate mică. Aplicând acestei forme de oțel fibros un tratament termic, prin încălzirea sa un timp anumit și la o temperatură anumită, microstructura fibroasă se transformă într'o microstructură granulară fină de mai mică rezistență la rupere, dar având o ductilitate crescută.

IV. *Structura aliajelor*

Aliajele pot fi clasificate din punct de vedere structural în două categorii:

1) Aliaje omogene, alcătuite dintr'o singură fază solidă;

2) Aliaje eterogene, alcătuite din acel puțin două faze în stare solidă.

Faza solidă poate fi de două feluri:

a) compus intermetalic exprimat prin formulă chimică;

b) soluție solidă exprimată prin concentrație.

Când faza este compus intermetalic, rețeaua sa poate fi moleculară (fig. 15) sau atomică (fig. 16).

Când faza solidă este soluţie solidă, ea prezintă două aspecte:

a) Reţea de substituţie, în care atomii unui component sunt înlocuiţi prin atomii altui component.

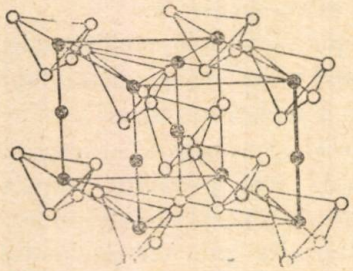


Fig. 15 — Reţea moleculară.

b) Reţea de interstiţie, în care atomii unui component pătrund în reţea printre atomii celuilalt component.

In fig. 17 este reprezentată în mod schematic repartizarea atomilor celor doi componenţi în reţelele fazelor solide ce iau naştere în aliaje.

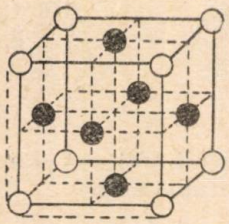


Fig. 16.– Reţea atomică

Explicaţia structurii soluţiilor solide în lumina concepţiei electronice a metalelor a fost dată în 1938 de către savantul sovietic S. T. Conobeevschi.

V. *Concluzii.*

a) Elementele cu caracter metalic reprezintă aproape 3/4 din numărul total al elementelor chimice.

b) Reţeaua metalică este o reţea intermediară între reţeaua atomică şi cea ionică.

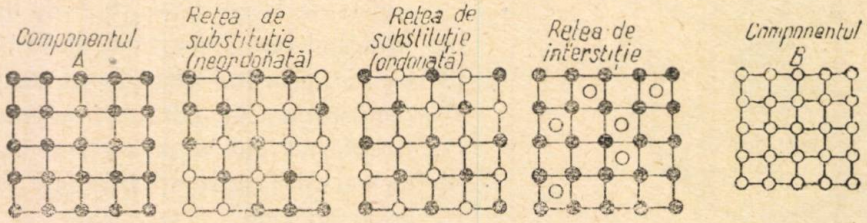


Fig. 17. — Schema repartizării atomilor în reţelele soluţiilor solide.

c) Insuşirile generale ale metalelor sunt condiţionate de prezenţa în reţelele metalice a electronilor liberi.

d) Legătura metalică se reduce în esenţă la coexistenţa covalenţelor dintre atomi şi a atracţiilor dintre ioni şi electronii liberi ai reţelelor metalice.

e) Aliajele sunt sisteme omogene sau eterogene.

f) In metalurgie se pot imprima metalelor şi aliajelor însuşirile cele mai potrivite scopului urmărit, fie prin tratamente mecanice, termice sau termochimice, fie prin schimbarea compoziţiei aliajelor.

In ţara noastră, marea desvoltare a industriei metalurgice şi siderurgice, prevăzută de primul nostru plan cincinal, necesită o pregătire temeinică a cadrelor chemate să contribue la rezolvarea problemelor legate de noi procese tehnologice, noi prototipuri de aparate şi maşini, ridicarea productivităţii muncii, etc.

In timp ce în regimurile trecute, metalele şi aliajele speciale erau importate în schimbul unor uriaşe beneficii în favoarea trusturilor şi grupurilor financiare străine, în prezent, datorită ajutorului frăţesc al Uniunii Sovietice, s'au asigurat condiţii pentru desvoltarea unei industrii metalurgice şi siderurgice proprii.

Colectivele de muncă din numeroase întreprinderi, uzine, şantiere, sunt îndrumate de oamenii de ştiinţă care activează în cadrul Institutului de Metalurgie şi Mecanică aplicată al Academiei R.P.R. Aici sunt rezolvate problemele legate de îmbunătăţirea metodelor de producţie, iar rezultatele obţinute sunt apoi răspândite printre stahanoviştii şi muncitorii fruntaşi din întreprinderi.

Discuţiile şi schimbul de experienţă între oamenii de ştiinţă şi stahanovişti în probleme ca: prelucrarea metalelor prin aşchiere rapidă, reducerea rebuturilor în turnătorie, mecanizarea proceselor de producţie în turnătorie, etc. au dus la adâncirea acestor probleme şi la perfecţionarea metodelor de muncă în producţie.

Activitatea vie pe linie ştiinţifică, teoretică şi practică, ce se desfăşoară în industria noastră metalurgică şi siderurgică, constitue un ajutor preţios pentru cei ce muncesc în industria noastră de bază şi pe marile şantiere ale socialismului, în lupta lor dârză pentru îndeplinirea în patru ani a primului nostru Cincinal.

BIBLIOGRAFIE

D. O. Slavin şi *N. N. Ostapenco*: «Tehnologia materialelor folosite în metalurgie», Editura Tehnică 1951.

REZULTATELE CONCURSURILOR DE MATEMATICI

DIN LUNA MAI 1953, ORGANIZATE DE CĂTRE SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R. ŞI FACULTĂŢILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN CENTRELE UNIVERSITARE

In cinstea celui de al III-lea Congres Mondial al Tineretului şi al celui de al IV-lea Festival Mondial al Tineretului şi Studenţilor pentru Pace şi Prietenie, care vor avea loc în lunile Iulie şi August 1953 în Bucureşti, capitala patriei noastre dragi, şi în scopul de a desvolta interesul maselor de elevi pentru ştiinţele matematice şi a-i antrena într'o pregătire mai temeinică — Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. şi Facultăţile de Matematici şi Fizică din centrele universitare au organizat anul acesta concursuri de Matematici, care s'a desfăşurat în două etape.

Concursurile din prima etapă s'au ţinut în 25 oraşe unde Societatea are filiale — precum şi în oraşele Vaslui, Huşi şi Roman, unde ele au fost organizate de Secţia de Invăţământ a Regiunii Iaşi. Inscrierile la concurs au fost voluntare. La concursurile din prima etapă au participat în total 6934 elevi şi eleve dela şcolile medii, medii tehnice şi pedagogice şi ele s'au ţinut la 26 Aprilie a.c.

Concursurile din etapa a II-a au avut loc în ziua de 17 Mai a.c. în centrele universitare Bucureşti, Cluj, Iaşi şi Timişoara, la care au luat parte numai elevii cu lucrările cele mai bune dela etapa I-a.

In seara zilei de 17 Mai a.c. au avut loc şedinţe festive în fiecare centru universitar şi s'au împărţit premii în cărţi următorilor elevi:

Regiunea Bucureşti

Premiu excepţional

Cuculescu Ion (Liceul de băieţi Nr. 5 Bucureşti) şi Iosifescu Marius (Liceul de băieţi Piteşti).

CLASA VIII-a

Premiul I

Burlacu Ion (C.S.M.E.E. Bucureşti), Glasberg Lucian (Liceul de băieţi Nr. 9 Bucureşti).

Premiul II

Cristea Ion (Liceul de băieţi Constanţa), Eremia Dan (Liceul de băieţi Nr. 3—12 Bucureşti), Şerb G. Gabriel (Liceul de băieţi Ploeşti), Stănişilă Octavian (Liceul de băieţi Nr. 10 Bucureşti).

Premiul III

Tomescu Dan (Liceul de băieţi Nr. 3 Bucureşti).

Menţiunea I-a

Popescu Gabriel (Liceul de băieţi Nicolae Bălcescu Bucureşti), Stoica Nicolae (Liceul de băieţi Nr. 4 Bucureşti).

Menţiunea II-a

Brestecico Mihai (Liceul de băieţi Nr. 3 Bucureşti), Gurăzău T. (Liceul de băieţi Nr. 6 Bucureşti), Predescu Maria (Centrul şcolar de fete Nr. 2-10-13).

CLASA IX-a

Premiul I

Lowy Dan (Liceul de băieţi Nr. 2 Bucureşti).

Premiul II

Bădescu Cornelia (centrul şcolar de fete Nr. 2-10-13), Roceric Maria (Centrul şcolar de fete Nr. 2-10-13), Vlădescu Mariana (Centrul şcolar de fete Nr. 2-10-13), Weissman Emanoil (Liceul de băieţi Nr. 2 Bucureşti).

Premiul III

Constantinescu Paul (Liceul de băieţi Buzău), Lehaci Sanda (Centrul şcolar de fete Nr. 2-10-13 Bucureşti), Kestenband Barbu (Liceul de băieţi Nr. 6 Bucureşti), Niculescu Cornelia (Centrul şcolar de fete Nr. 2-10-13 Bucureşti), Niculescu Niculae (Liceul de băieţi Nr. 5 Bucureşti), Panaitescu Alexandru (Liceul de băieţi Ploeşti).

Menţiuni

Balaur Elena (Centrul şcolar de fete 2—10-13 Bucureşti), Borşaru Ion (Liceul de băieţi Nr. 5 Bucureşti), Daneş Miron (Liceul de băieţi Nr. 9 Bucureşti), Demetrescu Dan (Liceul de băieţi Nr. 1 Bucureşti), Feinstein Ilie (Liceul de băieţi Nr. 1 Bucureşti), Gabrea Radu (Liceul de băieţi Nr. 9 Bucureşti), Ionescu Gabriel (Liceul de băieţi Nr. 7 Bucureşti), Muşat Iulian (Liceul de băieţi Nr. 1 Bucureşti), Rădulescu Dan (Liceul de băieţi Nr. 2 Bucureşti), Solomonescu Dumitru (Liceul de băieţi Nr. 1 Bucureşti).

CLASA X-a

Premiul II

Esrig Paul (Şcoala medie tehnică I. Rangheţ Bucureşti), Micu Victor (Liceul de băieţi Nr. 3

București), Popescu Dumitru (Liceul de băieți Ploești,) Vasiliu G. (Liceul de băieți Galați).

Premiul III

Landmann Alex. (Școala medie tehnică I. Ranghet București), Tăutu Dana (Liceul de fete Nr. 1 București), Teodosiu Cristian (Liceul de băieți Nr. 8 București), Torjescu Florin (Liceul de băieți Ploești).

Menţiunea I-a

Brecher Vigdold (Liceul de băieți Nr. 2 București), Cazanacli Niculae (Liceul de băieți Craiova), Constantinescu Mircea (Liceul de băieți Nr. 1 București), Dogaru T. Mihai (Liceul de băieți Ploești), Dumitrescu M. Ștefan (Liceul de băieți Nr. 5 București), Ghionca Dumitru (Liceul de băieți Brăila), Ionescu Virgil (Liceul de băieți Ploești), Licea Ioan (Liceul de băieți Galați), Mihai Iulian (Liceul de băieți Ploești), Petcu C. Victor (Liceul de băieți Nr. 1 București), Piță Constantin (Liceul de băieți Ploești), Popescu Corneliu (Școala tehnică București), Wilheim Gh. (Liceul de băieți Nr. 1 București).

Menţiunea II-a

Dumitrescu Ion (Liceul de băieți Nr. 4 București), Goruneanu Mihaela (Liceul de fete Nr. 1 București).

CLASA XI-a

Premiul I

Codreanu Irinel (Liceul de băieți Buzău), Monciulschi Petre (Liceul de băieți Nr. 1 București).

Premiul II

Vincent Andrei (Liceul de băieți Nr. 7 București), Zane Radu (Liceul de băieți Nr. 7 București).

Premiul III

Auslander Herbert (Liceul de băieți Nr. 2 București), Gheția Eugen (Liceul de băieți Nr. 5 București), Mândru Antolie (Liceul de băieți Nr. 10 București), Udrescu Valeriu (Liceul de băieți Pitești).

Menţiuni

Cârstea Lupu Tiberiu (Liceul de băieți Nr. 4 București), Caloinescu C. (Liceul de băieți Nr. 5 București), Dumitrescu Iulian (Liceul de băieți Nr. 4 București), Georgescu Ioan (Liceul de băieți Nr. 5 București), Mihăilescu Ștefan (Liceul de băieți Nr. 3 București), Popescu Mihail (Colegiul N. Bălcescu Craiova), Rotaru Constantin (Liceul de băieți Nr. 4 București), Stoenescu Șerban (Liceul de băieți Nr. 4 București), Stănescu Elena (Centrul școlar de fete Nr. 2-10-13).

ȘCOLI PEDAGOGICE

Anul I

Premiul I

Dobrotă Gabriela (Școala Pedagogică Buzău).

Premiul II

Ciuin Petre (Școala Pedagogică băieți București), Matei Aurica (Școala Pedagogică fete Pitești), Ștefan Dumitra (Școala Pedagogică de fete Nr. 1 București).

Premiul III

Rață Nicolae (Școala Pedagogică de băieți București), Stoica Matilda (Școala Pedagogică de fete Nr. 1 București).

Menţiune

Călianu Oprea (S.M.T. Galați).

Anul II

Premiul I

Ceaușu Dumitru (Școala Pedagogică de băieți București).

Premiul II

Anton Ion (Școala Pedagogică de băieți București)

Menţiune

Pavlov Fedora (Școala Pedagogică Rusă București).

Anul III

Premiul I

Cristea Mariana (Școala Pedagogică Buzău).

Premiul II

Munteanu Maria (Școala Pedagogică Nr. 1 București).

Menţiune

Panfilov Ivan (Școala Pedagogică Rusă București).

REGIUNEA IAȘI

Premiul I

Lazăr Aldo (clasa XI-a Liceul de băieți Roman).

Premiul II

Baichis Jean (clasa XI-lea Liceul de băieți Vaslui), Weisman Izu (clasa IX-a Liceul de băieți Nr. 1 Iași).

Premiul III

Alexandru Doru (clasa XI-a Liceul de băieți Vaslui), Onică Dan (clasa X-a Liceul de băieți Nr. 2 Iași), Cazachievici Gh. (clasa IX-a Liceul de băieți Suceava), Căpitan Florin (clasa IX-a Liceul de băieți Bacău, Șerbăescu Const. (clasa IX-a Liceul de băieți Nr. 2 Iași).

★

Rezultatele concursurilor dela Cluj și Timișoara se vor publica într'unul din numerele următoare.

CHESTIUNI DE CONCURS

PROBLEMELE DATE LA ETAPA A II-a A CONCURSULUI DE MATEMATICI DIN 17 MAI 1953, ORGANIZAT DE SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R. ŞI FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ A UNIVERSITĂŢII C. I. PARHON, IN REGIUNEA BUCUREŞTI

CLASA VIII-a

963. Se dă un unghi drept xOy şi pe latura Ox se ia un punct fix A.

1°. Să se determine poziţia unui punct M pe Oy aşa fel ca perpendiculara dusă din M pe MA să treacă printr'un punct B dat în plan. Discuţie după poziţia punctului B.

2°. Fie C centrul unui arc tangent în O la Oy, aşezat în partea opusă cu A faţă de O. Să se determine poziţia unui punct N pe Oy astfel ca perpendiculara dusă din N pe NA să fie tangentă la cercul (C).

* * *

964. Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$(p^2 - a^2)\ x^2 - 2pqx + q^2 - b^2 = 0$$

să se calculeze expresia:

$$E = (a^2 x_1^2 + b^2)(a^2 x_2^2 + b^2)$$

Să se arate că expresia E care depinde de a, b, p şi q este un patrat perfect.

CLASA IX-a

965. Se consideră un triunghi oarecare ABC; fie AD înălţimea din A. Înălţimea din B taie pe AD în H.

1) Să se arate că

$$\overline{DA} \cdot \overline{DH} = \overline{BD} \cdot \overline{DC} \qquad (1)$$

2) Utilizând o relaţie analoagă în figura în care s'au dus înălţimile AD şi CF, să se deducă, că cele trei înălţimi sunt concurente.

3) Constituie punctul 1) o generalizare a teoremei înălţimii într'un triunghi dreptunghic?

4) Ce poziţii ocupă punctele D şi H în cazul când B sau C este obtuz? Se poate introduce o convenţie a semnelor în baza căreia relaţia 1) e valabilă şi în semn?

5) Notând $\overline{BC} = a$, O mijlocul lui $\overline{BC}$, $\overline{DA} = h$, $\overline{OD} = x$, să se calculeze $y = \overline{DH}$ în funcţie de a, h, x. Să se deducă, că dacă B şi C rămân fixe, iar A descrie o paralelă la BC, punctul H descrie o parabolă având ca axă de simetrie perpendiculara în O pe BC.

* * *

966. Pentru a ridica nivelul de trai al oamenilor muncii, se face o reducere generală de preţuri de $x\%$. La aceeaşi dată se schimbă unui muncitor încadrarea, ridicându-i-se salariul cu $x\%$. Acum acest muncitor poate cumpăra cu salariul lui o cantitate de bunuri egală cu $1\frac{1}{2}$ din ceeace putea cumpăra înainte. Să se afle x. Generalizare.

CLASA X-a

967. Un unghi drept MON se roteşte în jurul punctului O şi taie două drepte paralele D şi D' în M şi N. Se dau distanţele $OA = a$, $OB = b$ şi se cere:

1) Să se determine $\sphericalangle OMA = \alpha$ astfel ca triunghiul OMN să fie isoscel şi să se arate cum se poate determina punctul M printr'o construcţie grafică.

2) Să se determine $\sphericalangle \alpha$ astfel ca aria triunghiului MON să fie minimă.

3) In cazul când $a = b$ să se determine unghiul α astfel ca ipotenuza MN să aibă o lungime dată l. Discuţie.

4) In ce caz $\overline{MN}$ este minim?

5) Să se construiască $\sphericalangle \alpha$ în condiţiile punctului 3.

* * *

968. Se dă ecuaţia

$$mx^2 - (m - 4)\ x + 3m - 11 = 0$$

unde m este număr întreg. Să se determine m şi să se rezolve ecuaţia ştiind că ea are o rădăcină cuprinsă între 0 şi 1.

CLASA XI-a

969. Partea superioară a unei porţi este alcătuită din şase fiare forjate care sunt dispuse astfel: trei fiare sunt laturile unui triunghiu echilateral ABC de latură $2a$, două fiare sunt arcele de cerc KM şi KL din interiorul triunghiului, având centrele respectiv în B şi C şi raza a, (K, L, M fiind mijloacele laturilor AB, AC, BC), iar un fier îl formează cercul înscris în patrulaterul mixt $ALMK$, adică tangentul laturilor AB, AC şi arcele MK şi ML.

Se cere:

1) Să se calculeze raza cercului înscris.

2) Să se construiască cercul dela punctul 1.

* * *

970. O cutie are forma unei prisme patratice: latura a şi muchia b; capacul cutiei se poate roti (fără frecare) în jurul axei balamalelor fixată pe o muchie a bazei de sus, ţinând cutia de capac şi ea fiind deschisă. Ce unghi face muchia cutiei cu verticala?

Anul I Şc li Pedagogice

971. Un vapor a mers pe un râu în sus şi în jos, parcurgând 375 km în 13 ore. Mergând în sus pe râu, în fiecare 4 ore, el a parcurs 100 km, iar în jos pe râu, în fiecare 2 ore el a parcurs 70 km. Câte ore a mers în sus pe râu şi câte ore a mers în jos. Care ar fi fost viteza vaporului dacă ar fi mers pe apă stătătoare.

* * *

972. Se dă un trapez $ABCD$ cu înălţimea de 20 m şi suprafaţa de 1800 m^2. Se cere:

1) Cele două baze ale trapezului ştiind că produsul lor este de 72 00 m^2.

2) Ştiind că latura neparalelă $\overline{AD} = 25$ m, să se afle:

a) la ce depărtare de vârful A al trapezului se vor întâlni laturile neparalele;

b) unghiul C al trapezului.

Anul II Şcoli Pedagogice

973. S'au cumpărat $4\frac{1}{4}$ kg orez şi $1\frac{1}{2}$ kg macaroane în total de lei $47\frac{17}{20}$ lei, altă dată s'au cumpărat 4 kg griş şi $4\frac{1}{2}$ kg biscuiţi cu suma de $65\frac{1}{4}$ lei.

Un kg orez este de două ori mai scump decât 1 kg de griş, iar 1 kg de macaroane costă mai puţin decât 1 kg de biscuiţi cu $4\frac{1}{10}$ lei. Cât costă câte 1 kg din fiecare.

* * *

974. Un rezervor are forma unui paralelipiped dreptunghiu.

Ştiind că: una din cele trei dimensiuni este egală cu semisiuma celorlalte două; că suma celor trei dimensiuni este 18 m, şi că suprafaţa totală este 208 m^2, să se calculeze capacitatea în hl a rezervorului.

Anul III Şcoli Pedagogice

975. O bucată de tablă de formă dreptunghiulară cu suprafaţa de 150,72 dm^2 şi perimetrul de 62,24 dm se îndoaie spre a forma un cilindru în aşa fel ca laturile mici ale dreptunghiului să coincidă. In acest cilindru se introduce cu vârful în jos un con format prin îndoirea unui sector circular cu raza de 10 dm; conul intră până la jumătate din înălţimea lui în cilindru.

Să se afle:

1) Raza şi înălţimea cilindrului, raza, generatoarea şi înălţimea conului.

2) Volumul aerului rămas în cilindru după introducerea conului.

3) Suprafaţa totală a conului.

4) Câte grade a avut sectorul de cerc din care s'a făcut conul.

* * *

976. La o fabrică lucrau bărbaţi şi femei. Numărul bărbaţilor şi numărul femeilor erau proporţionale cu 4 şi 1. Mărindu-se anual numărul muncitorilor cu 50%, peste 3 ani numărul bărbaţilor şi femeilor erau în raportul 5 : 3. Numărul femeilor a devenit egal cu 2025. Câte femei şi câţi bărbaţi au fost la început în fabrică?

PROBLEME REZOLVATE

Problema 473

Armăturile A şi B ale unui condensator C cu capacitatea de 0,1 microfarazi sunt legate de o baterie de elemente galvanice perfect izolate de pământ, cu f.e.m. $E = 20$ volţi.

Se înlătură bateria şi se leagă armăturile A şi B la armăturile A_1 şi B_1 ale unui condensator C_1 cu o capacitate de 9 ori mai mare decât a primului. Condensatorul C_1 este şi el izolat de pământ. Se cere:

1. *Sarcina primitivă Q_1 a condensatorului C.*
2. *Diferenţa de potenţial U care există între armăturile condensatorului după ce s'a stabilit legătura între C şi C_1.*
3. *Sarcinile respective ale celor 2 condensatori.*

O. Florescu

Soluţie. 1. Sarcina primitivă Q_1 este dată de relaţia:

$$Q_1 = CE$$

Dar cum $0{,}1\ \mu F = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\ F$ rezultă că

$$Q_1 = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ coulombi.}$$

2. Diferenţa de potenţial U este raportul dintre sarcina primitivă şi capacitatea totală a celor doi condensatori. Adică:

$$U = \frac{Q}{C_t}.$$

Dar:

$$C_t = \frac{CC_1}{C + C_1} = 0{,}09 \cdot 10^{-6} \text{ Farazi.}$$

Deci:

$$U = \frac{Q_0}{C} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0{,}09 \cdot 10} = 22{,}2 \text{ volți}$$

3. Avem:

$$Q_1 = C\,U = 2{,}22 \cdot 10^{-6} \text{ coulombi}$$

$$Q_2 = C_1 U = 2 \cdot 10^{-5} \text{ coulombi.}$$

Problema 504

Un condensator plan cu armăturile în suprafață de 12,65 dm², are între armături un strat de aer în grosime de 4,5 mm. Se cere: a) *Care e capacitatea condensatorului în* μF? b) *Introducându-se între armături o lamă de sticlă, a cărei grosime este 0,25 cm, se cere noua capacitate a condensatorului?* ($\varepsilon_{sticlă} = 5$) c) *Introducându-se, în locul sticlei, o lamă metalică de aceeași grosime, care e noua capacitate a condensatorului?* d) *Ce concluzie putem trage asupra constantei dielectrice a unui metal?*

Emil Leibovici

Soluție. *a)* $C = \dfrac{S}{36\pi d} 10^{-5}\,\mu F$

$$C = \frac{1 \cdot 1256}{36 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}45} 10^{-5} = 2{,}469 \cdot 10^{-4}\,\mu F$$

b) $C_1 = \dfrac{5 \cdot 1256 \cdot 10^{-5}}{36 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25} = 2{,}222 \cdot 10^{-3}\,\mu F$

c) Placa metalică fiind bună conductoare, capacitatea condensatorului devine practic nulă.

d) Putem spune deci, practic vorbind, că pentru metale constanta dielectrică este zero.

Problema 583

Fie A_1, B_1, C_1, *picioarele înălțimilor unui triunghi oarecare* ABC. *Paralela din* A_1 *la* AB *taie* AC *în* B_2, *paralela din* B_1 *la* BC *taie* AB *în* C_2 *și paralela din* C_1 *la* AC *taie* CB *în* A_2. *Să se stabilească relația*

$$\overline{AC_1} \cdot \overline{BA_1} \cdot \overline{CB_1} = \overline{AC_2} \cdot \overline{BA_2} \cdot \overline{CB_2}$$

N. Gheorghiu
student, Iași

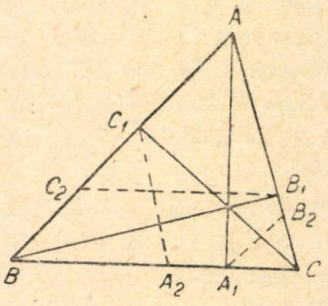
Soluție. Perechile de triunghiuri asemenea BA_2C_1 și BAC; BC_1C și ABA_1, dau proporțiile

$$\frac{BA_2}{BC} = \frac{BC_1}{AB}$$

$$\frac{BC_1}{BA_1} = \frac{BC}{AB}$$

Prin înmulțirea relațiilor de mai sus obținem

$$\frac{\overline{BA_2}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} \qquad (1)$$



Procedând analog obținem relațiile:

$$\frac{\overline{CB_2}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} \qquad (2) \qquad \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \qquad (3)$$

Inmulțind relațiile (1), (2), (3), obținem relația cerută.

Relația este adevărată și când triunghiul ABC este obtuzunghi.

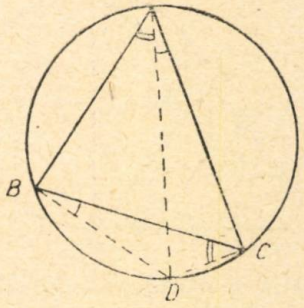
Problema 584

Intr'un triunghi oarecare ABC, *se duce diametrul* AD *al cercului circumscris, care taie* BC *în* E. *Să se arate că*

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{EC}^2 (\overline{EB}^2 - \overline{ED}^2) =$$
$$= \overline{AC}^2 \cdot \overline{EB}^2 (\overline{EC}^2 - \overline{ED}^2)$$

Florea C. Constantin
elev, Câmpina

Soluție. Triunghiurile asemenea ABE și EDC, AEC și BED ne dau:



$$\frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DC} \text{ și } \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{BD}$$

sau

$$\frac{\overline{EB}^2}{\overline{ED}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2} \qquad (1)$$

și

$$\frac{\overline{EC}^2}{\overline{ED}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2} \qquad (2)$$

Eliminând pe AD între relațiile (1) și (2) obținem relația cerută.

Problema 587

În hotărîrile Consiliului de Miniştri din U.R.S.S., privind marile construcţii ale comunismului se dau următoarele date asupra staţiunilor hidroelectrice: cea dela Cuibâşev va avea o putere de 2.000.000 kW; cea dela Stalingrad 1.700.000 kW cea dela Canalul Principal Turcmen de 100.000 kW; iar Staţiunea dela Cahovca de 250.000 kW şi cea dela Timliansk de 160.000 kW.

Să se determine ce cantitate de huilă ar fi necesară în 24 ore pentru a fi arsă în cazanele unor termocentrale de aceleaşi puteri utile, ştiind că randamentul este 25%, iar cărbunii produc 7000 kcal/kg.

F. v. Scole

Soluţie. P fiind puterea unei hidrocentrale, cantitatea de cărbuni ce trebue arsă în cazanele unei termocentrale de aceeaşi putere utilă este (1 Kw = 102 kgm, 1 kcal = 427 kgm):

$$\frac{24 \cdot 3600 \cdot 102}{0{,}25 \cdot 7000 \cdot 427} P \text{ kg cărbune}$$

Inlocuind pe P cu valorile din enunţ găsim respectiv: 23586,8 t., 20049 t., 1179, 3 t., 2948,4 t şi 1895 t.

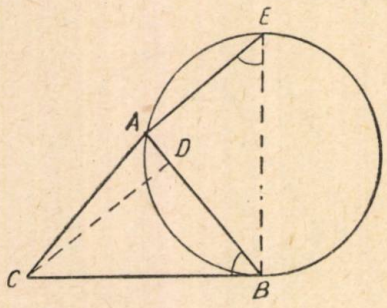
Problema 588

Un triunghi ABC are vârfurile B şi C fixe, iar vârful A variază în aşa fel încât înălţimea dusă din C este egală cu latura AB.

Se cere locul geometric al vârfului A.

Emil Morţun

Soluţie. Fie D piciorul înălţimii duse din C;



fie E intersecţia perpendicularelor ridicate în B pe BC şi în A pe AB.

Se observă că triunghiurile dreptunghice CDB şi ABE sunt egale ($CD = AB$ şi $\sphericalangle DBC = \sphericalangle AEB$, ca unghiuri cu laturile perpendiculare). Rezultă că $CB = BE$, deci E este fix.

Segmentul fix BE fiind văzut din A sub un unghi drept, locul lui A este format din două semicercuri simetrice, descrise pe BE ca diametru, deci dintr'un cerc complet.

Observare. In locul egalităţii $CD = AB$, putea fi dat un raport.

Problema 640

Să se verifice identitatea

$$\sum_1^n n(n+1)(n+2)(n+3) = 24\, C_{n+4}^5$$

Pavel P. Popescu

Soluţie. Putem scrie:

$$\sum_1^n n(n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= 1234\left(\frac{4321}{1234} + \frac{5432}{1234} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1234}\right) =$$

$$= 24\left(C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 + C_7^4 + \ldots\ldots + C_{n+3}^4\right),$$

iar în virtutea identităţii cunoscute

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + \ldots\ldots + C_{p-1}^{p-1},$$

avem

$$\sum_1^n n(n+1)(n+2)(n+3) = 24\, C_{n+4}^5$$

Generalizare. Aplicând aceeaşi metodă şi găsim

$$\sum_1^n n(n+1)(n+2)\ldots(n+m) = (m+1!\, C_{n+m+1}^{m+2}$$

Problema 650

Pe fiecare latură a triunghiului ABC şi pe prelungirile celorlalte două, se construesc patrulaterele $ABC'C''$, $BCA'A''$ şi $CAB'B''$ având

$$\overline{AC''} = \overline{BC'} = \overline{AB};\ \overline{BA''} = \overline{CA'} = \overline{BC}$$

şi

$$\overline{CB''} = \overline{AB'} = \overline{AC}.$$

Diagonalele lor se taie în punctele L, M, N. Să se demonstreze că: 1° Triunghiurile LMN şi ABC sunt egale. 2° Perpendicularele din L, M, N duse respectiv pe AB, BC, AC sunt concurente. 3° Dacă notăm cu S, S_2, S_3 şi S_1 ariile triunghiului şi patrulateralelor date, există relaţia:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc}.$$

4° In cazul când triunghiul este dreptunghic.

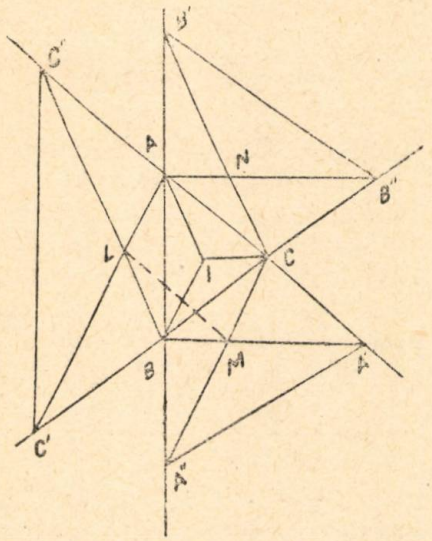
$$S_1 = S_2 + S_3$$

Gh. Bazacov, Tr. Severin

Soluţie. 1° Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Prin construcţie triunghiurile formate de o latură şi de prelungirea uneia din celelalte două sunt isoscele (de ex.: ABC'', ABC', BCA'', BCA').

Unghiurile dela bazele acestor triunghiuri sunt $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ sau $\frac{C}{2}$ după cum unghiurile exterioare acestor triunghiuri sunt A, B sau C.



Revenind la problemă, observăm că $AC' \parallel CA''$ întrucât $\sphericalangle C'AB = \sphericalangle BA''C = \frac{B}{2}$. Deasemenea $AL \parallel BI$ și $BL \parallel AI$ deoarece $\sphericalangle C'AB = \sphericalangle ABI = \frac{B}{2}$ și $\sphericalangle LBA = \sphericalangle BAI = \frac{A}{2}$. La fel se arată că $\overline{BI} \parallel \overline{MC}$ și $\overline{BM} \parallel \overline{CI}$. Rezultă că patrulaterele $LAIB$ și $BICM$ sunt paralelograme deci că $\overline{AL} = \overline{BI} = \overline{MC}$. Patrulaterul $LACM$ având două laturi egale și paralele este paralelogram și rezultă $LM = \parallel AC$. La fel se arată egalitățile $LN = \parallel BC$ și $MN = \parallel AB$.

Prin urmare triunghiurile ABC și LMN sunt egale.

2° Triunghiul LMN având laturile paralele cu ale triunghiului ABC, rezultă că perpendicularele duse din L, M, N respectiv pe AB, BC, CA sunt înălțimile triunghiului LMN și prin urmare sunt concurente.

3° Putem scrie

$$\frac{\text{aria } CC'C''}{\text{aria } ABC} = \frac{CC'' \cdot CC'}{CA \cdot CB} = \frac{(b+c)(a+c)}{ab},$$

sau

$$\frac{S + S_2}{S} = \frac{(b+c)(a+c)}{ab}.$$

Analog găsim:

$$\frac{S + S_3}{S} = \frac{(b+a)(c+a)}{bc}; \quad \frac{S + S_1}{S} = \frac{(a+b)(c+b)}{ac}$$

Prin adunarea relațiilor de mai sus găsim relația din enunț.

4°. Din relațiile scrise la 3° avem;

$$S_1 = \frac{b^2(a+b+c)}{abc} \cdot S$$

$$S_2 = \frac{c^2(a+b+c)}{abc} \cdot S; \quad S_3 = \frac{a^2(a+b+c)}{abc} \cdot S$$

Când triunghiul ABC este dreptunghic ($B = 90°$), $b^2 = a^2 + c^2$ și rezultă imediat $S_1 = S_2 + S_3$.

Problema 651

Să se verifice identitatea

$$\sin C \sin(A + B - C) - \sin A \sin B = \\ = \sin(B - C) \sin(C - A).$$

N. N. Mihăileanu

Soluție. Trasformând produsele $\sin C \cdot \sin(A + B - C)$ și $\sin(B - C) \cdot \sin(C - A)$, în sume

$$\sin C \sin(A + B - C) = \frac{1}{2}[\cos(A + B - 2C) - \\ - \cos(B + A)]$$

$$\sin(B - C \sin(C - A) = \frac{1}{2}[\cos(A + B - 2C) - \\ - \cos(A - B)]$$

identitatea se reduce la

$$\cos(B + A) + 2 \sin A \sin B = \cos(A - B),$$

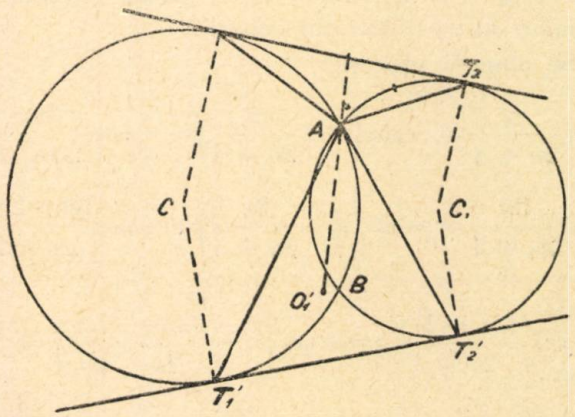
care se verifică imediat.

Problema 652

Două cercuri se intersectează în punctele A și B. Fie T_1T_2 și $T_1'T_2'$ tangentele lor comune. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor AT_1T_2, $AT_1'T_2'$ sunt tangente. Același lucru pentru cercurile circumscrise triunghiurilor BT_1T_2 și $BT_1'T_2'$.

Cezar Coșniță

Soluție. Fie O_1, O_1' respectiv centrele cercurilor AT_1T_2, $AT_1'T_2'$.



Pentru a arăta că ele sunt tangente este suficient să arătăm că punctele O_1, A, O_1' sunt coliniare.

Se știe că:

$$\sphericalangle O_1AT_1 = 90° - \sphericalangle T_1T_2A,\ \sphericalangle O_1'AT_1' = 90° - \sphericalangle T_1'T_2'A$$

Prin urmare

$$\sphericalangle O_1AO_1' = 180° - (\sphericalangle T_1T_2A + \sphericalangle T_1'T_2'A) + \sphericalangle T_1AT_1'.$$

Remarcând că $\sphericalangle T_1T_2A = \frac{1}{2}$ măs arc AT_2, că $\sphericalangle T_1'T_2'A = \frac{1}{2}$ măs arc AT_2' și că $\sphericalangle T_1CT_1' = \sphericalangle T_2C_1T_2'$ (unghiuri cu laturile paralele), deci că $\sphericalangle T_1AT_1' = \frac{1}{2}$ măs arc T_2AT_2', rezultă

$$\sphericalangle O_1AO_1' = 180°.$$

Enunțul este astfel demonstrat. O demonstrație analoagă pentru cercurile BT_1T_2 și $BT_1'T_2'$.

Problema 653

Să se arate că pentru un n *întreg și pozitiv există relațiile:*

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

Ion Zarda

Soluție. Fie S_1 și S_2, resectiv sumele din primii membri ai relațiilor din enunț.

Se observă ușor că

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{2n\pi}{2n+1}$$

$$\cos\frac{3\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{2\pi}{2n+1},$$

prin urmare $S_1 = -S_2$.

Vom căuta valoarea lui S_2. Ținând seamă de identitatea

$$\cos(a+b) = 2\cos a\cos b - \cos(a-b)\ ^{1})$$

putem scrie:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2n+1}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - 1$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2n+1}\right) = 2\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1};$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2n+1}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{4\pi}{2n+1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2n+1}\right) = 2\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}$$

Insumând avem

$$S_2 = 2S_1\cos\frac{\pi}{2n+1} - 1 - S_2 + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Ținând seamă că $\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\cos\frac{\pi}{2n+1}$ și că $S_1 = -S_2$, obținem

$$S_2 = -\frac{1}{2}\ ;\ S_1 = \frac{1}{2}.$$

Problema 654

Intr'un cerc se duce diametrul AB și raza OC perpendiculară pe acest diametru. Se ia pe cerc punctul M cuprins între A și C.

Dreapta BM întâlnește pe OC în L și pe AC în K iar raza OM taie pe AC în punctul I.

Să se determine poziția punctului M pe cerc astfel ca patrulaterul OIKL să fie inscriptibil și să se calculeze raza cercului circumscris patrulaterului.

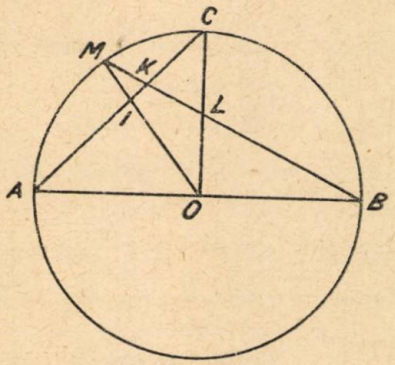
I. Sager

---

[1]) Sau de formula lui *Simpson*

$$\cos(m+1)a = 2\cos ma\cos a - \cos(m-1)a$$

Soluție. Pentru ca patrulaterul să fie inscriptibil este necesar și suficient ca $\sphericalangle CKL$ să fie egal



cu $\sphericalangle MOC$. Insă

$$\sphericalangle CKL = \frac{\text{măs } \overset{\frown}{AM} + \text{măs } \overset{\frown}{BC}}{2}$$

$$\sphericalangle MOC = \text{măs } \overset{\frown}{MC} = 90^\circ - \text{măs } \overset{\frown}{AM}$$

Prin urmare trebue să avem

$$\frac{1}{2}\ \text{măs } \overset{\frown}{AM} + 45^\circ = 90^\circ - \text{măs } \overset{\frown}{AM},$$

de unde

$$\overset{\frown}{AM} = 30^\circ.$$

In triunghiul AKB avem $\sphericalangle CAO = 45^\circ$, $\sphericalangle ABM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM} = 15^\circ$, $\sphericalangle AKB = 120^\circ$. Prin urmare

$$\overline{BK} = \frac{2R \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{6}\,R}{3}$$

Cunoscând BK putem calcula OK în triunghiul OBK:

$$\overline{OK}^2 = R^2 + \frac{24}{9}R^2 - 2\frac{2\sqrt{6}\,R}{3}R\cos 15^\circ$$

$$\overline{OK}^2 = \frac{R\sqrt{15 - 6\sqrt{3}}}{3}$$

Raza r a cercului circumscris patrulaterului $OIKL$ este deci

$$r = \frac{\overline{OK}}{2\sin OLK} = \frac{\overline{OK}}{2\sin 57^\circ}$$

$$r = \frac{R\sqrt{48 - 27\sqrt{3}}}{3}$$

$$r \approx 0{,}37\ R.$$

Problema 655

Fie H ortocentrul triunghiului ABC. O paralelă la BC taie laturile AB, AC în Q și P iar înălțimile AH, BH, CH, în S, N, M. Să se verifice că

$$\overline{SP} \cdot \overline{SN} = \overline{SQ} \cdot \overline{SM}.$$

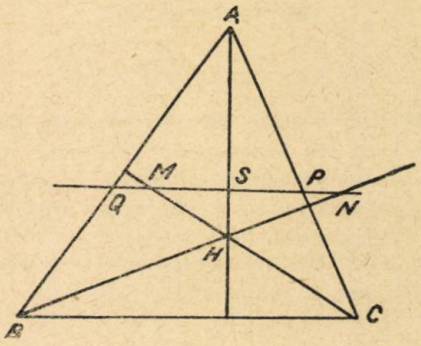
Petre Stanciu

Soluție. Triunghiurile dreptunghice MSH și ASQ având laturile perpendiculare sunt asemenea. Putem scrie:

$$\frac{\overline{SH}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SA}}$$

Din asemănarea triunghiurilor SNH și ASP, obținem

$$\frac{\overline{SH}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{AS}}.$$



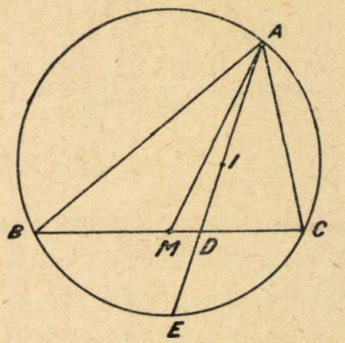
Prin împărțirea relațiilor scrise mai sus obținem relația cerută.

Problema 657

Să se construiască un triunghi ABC, cunoscând lungimea medianei și bisectoarei aceluiași vârf și poziția centrului cercului înscris, pe bisectoarea dată.

Emil Secoșan

Soluție. Fie ABC triunghiul presupus construit. Fie M mijlocul lui BC, D și E respectiv punctele în care bisectoarea unghiului A taie BC și cercul circumscris triunghiului.



Scriind că triunghiurile ECD și EAC sunt asemenea obținem $\overline{ED} \cdot \overline{EA} = \overline{EC}^2$. Insă $\overline{EC} = \overline{EI}$ (vezi *R.M.F.* Nr. 8, anul I pag. 17) și deci:

$$\overline{EI}^2 = (\overline{EI} - \overline{ID})(\overline{EI} + \overline{IA}),$$

de unde

$$\overline{EI} = \frac{\overline{ID} \cdot \overline{IA}}{\overline{IA} - \overline{ID}}.$$

Intrucât $\overline{AI}$ și $\overline{ID}$ sunt cunoscute, putem construi $\overline{EI}$ și deci poziția lui E este cunoscută. Putem construi apoi punctul M, el aflându-se la intersecția cercului $A(\overline{AM})$ cu semicercul descris pe DE ca diametrul (unghiul EMC este drept).

Ducând din A tangentele la cercul cu centrul în I și tangent dreptei MD, ele vor intersecta MD în punctele B și C, celelalte două vârfuri ale triunghiului.

Problema este posibilă când

$$\overline{AD} < \overline{AM} < \overline{AE}$$

sau

$$l_a < m_a < l_a + \overline{EI} - \overline{ID}.$$

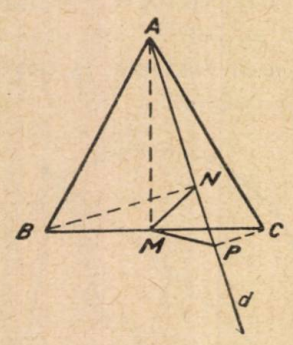
Observare. Locul punctelor din care un segment de dreapta se vede sub un unghi constant fiind format din două arce de cerc simetrice în raport cu segmentul, al doilea loc geometric al lui M este un cerc complet de diametru DE, care poate fi tăiat de cercul $A(\overline{AM})$ în două puncte: M și M' Deci problema poate avea două soluții. Triunghiurile sunt simetrice față de AD.

Problema 658

Fie un triunghi echilateral ABC și M mijlocul laturii BC. Se proiectează B și C în N și P pe o dreaptă oarecare ce trece prin A. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

Gh. I. Bercea
elev, Oravița

Soluție. Ducem înălțimea AM. Se observă ușor că patrulaterele $ANMB$ și $AMPC$ sunt inscriptibile.



Prin urmare putem scrie $\sphericalangle MNP = \sphericalangle ABC = 60°$ și $\sphericalangle MPN = \sphericalangle ACB = 60°$. Având două unghiuri de 60°, triunghiul MNP este echilateral.

Observații. 1°. Proprietatea este adevărată oricare ar fi poziția dreptei d. 2°. Triunghiul MNP are un minim egal cu 0 când d se confundă cu AM și un maxim egal cu suprafața triunghiului ABC când $d \perp AM$.

Problema 659

Să se arate că dacă într'un triunghi ABC avem relația $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3$, *atunci avem și* $2 + \cos^2 A = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$.

Emeric Deutsch

Soluție. Relația $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3$ se poate scrie

$$\sin B \sin C = 3 \cos B \cos C$$

sau

$$2 \cos B \cos C = \sin B \sin C - \cos B \cos C =$$
$$= -\cos(B + C)$$
$$2 \cos B \cos C = \cos A.$$

Se înlocuiește valoarea de mai sus a lui $\cos B \cos C$ în identitatea

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

(Trigonometrie, manual unic, pag. 130, ex. 91).

Problema 661

Dacă $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma + 6°$ *atunci*

$$\cos^2(a - \alpha + 3°) + \cos^2(b - \beta + 9°) +$$
$$+ \cos^2(c - \gamma + 27°) = \frac{3}{2} +$$
$$+ 2 \sin(78° + \alpha + \beta + a - b) \sin(54° +$$
$$+ \beta + \gamma - b - c) \sin(60° + \gamma + \alpha - c - a).$$

Ioan Gligor

Soluție. Considerăm identitatea:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

adevărată pentru $A + B + C = 180°$. Inlocuind

$$\sin 2A = \cos(90° - 2A) = 2 \cos^2(45 - A) - 1,$$
$$\sin 2B = 2 \cos^2(45° - B) - 1,$$
$$\sin 2C = \cos^2(45° - C) - 1,$$

obținem identitatea

$$\cos^2(45° - A) + \cos^2(45° - B) + \cos^2(45° - C) =$$
$$= \frac{3}{2} + 2 \sin A \sin B \sin C.$$

In această identitate putem pune

$$A = 54° + \beta + \gamma - b - c,$$

$B = 78° + \alpha + \beta - a - b$, $C = 60° + \gamma + \alpha - c - a$, deoarece

$$54° + \beta + \gamma - b - c + 78° + \alpha + \beta - a - b$$
$$+ 60° + \gamma + \alpha - c - a = 192° +$$
$$+ 2(\alpha + \beta + \gamma - a - b - c) = 180°.$$

Ținând seama și de ecuația de condiție obținem relația din enunț.

Problema 662

Să se construiască centrul de greutate al unui triunghi ABC, dat prin vârfurile sale, numai cu compasul.

Muedin Sureia

Soluție. Construim mijloacele segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ prin metoda indicată în R.M.F. anul 3, pag. 224. Fie M și N aceste puncte. Problema se reduce astfel la construirea punctului de intersecție a două drepte CM și BN numai cu compasul.

Pentru a rezolva această problemă este necesar să cunoaștem construcția celei de a patra proporționale a 3 lungimi date, a, b, c. Contrucția este următoarea: Trasăm două cercuri concentrice $O(a)$ și $O(c)$; luăm pe al doilea două puncte A și B astfel ca $\overline{AB} = b$, ceeace este posibil dacă $2c \geqslant b$, apoi trasăm cu o rază arbitrară m, două cercuri $A(m)$ și $B(m)$ care taie circumferința $O(a)$ în A' și B' respectiv.

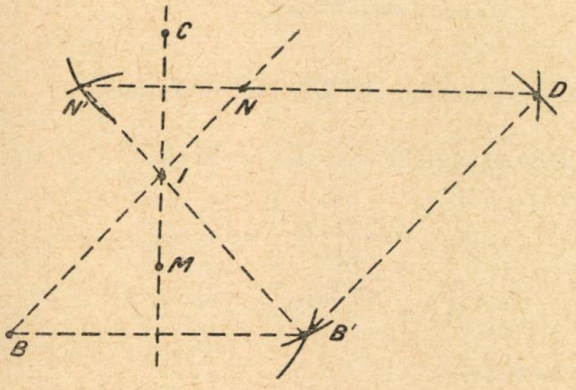


Fig. 1

Triunghiurile OAA' și OBB_1 sunt evident egale, având aceleași laturi. De aci rezultă că $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB'$. Triunghiurile AOB și $A'BO'$, isoscele și având acelaș unghi la vârf sunt asemenea, deci

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{OA'} : \overline{OA} \quad \text{sau} \quad \overline{A'B'} : b = a : c$$

$\overline{A'B'}$ este deci a patra proporțională căutată.

Dacă condiția $2c \geqslant b$ nu este îndeplinită, se va căuta un întreg k, astfel ca $2kc \geqslant b$ și se va face construcția cu lungimile ka, b și kc.

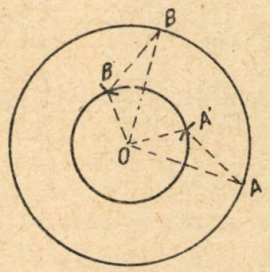


Fig. 2

Revenind la problemă, vom determina punctele $N'B'$, simetricele lui N și B în raport cu CM. Este evident că $N'B'$ și NB se taie pe CM în I. In continuare vom construi punctul D, al patrulea vârf, opus lui B, al paralelogramului $NBB'D$. Intrucât $IN \parallel B'D$, vom avea $\overline{N'I} : \overline{N'B'} = \overline{NN'} : \overline{N'D}$. Deci $\overline{N'I}$ este a patra proporțională între 3 lungimi cunoscute sau construite. Construind $\overline{N'I}$ după metoda arătată mai sus, vom găsi punctul I la intersecția cercurilor $N'(N'I)$ și $N(N'I)$. Nu vom întâmpina nicio dificultate la alegerea punctului de intersecție, el fiind de aceeași parte a lui NN' ca B și B'.

Se mai putea găsi punctul I împărțind unul din segmentele BN, CM, în trei părți egale. Această construcție este dată în cartea lui *I. I. Alexandrov* « Probleme de construcții geometrice » la pag. 170.

Problema 663

O sferă cu raza de 6 dm și cu greutatea specifică 27/32 plutește pe apă. Să se găsească înălțimea părții ce iese din apă, a acestei sfere.

L. Lopovoc (Proscurov)

Soluție. Un corp scufundat parțial într'un lichid este în echilibru când greutatea volumului de lichid deslocuit este egală cu întreaga greutate a corpului. Notând cu h înălțimea părții sferei cufundată în apă, vom avea

$$\frac{1}{3}\pi h^2 (18 - h) \times 1 = \frac{27}{32} \times \frac{4\pi \cdot 216}{3},$$

de unde

$$h^3 - 18h^2 + 729 = 0$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt

$$h_1 = 9, \quad h_{2,3} = \frac{9 \pm 9\sqrt{5}}{2}.$$

Rădăcina care convine problemei este $h_1 = 9$; h_2 este mai mare decât 12 (diametrul sferei) iar h_3 este negativ.

Inălțimea părții ce iese din apă este $12 - 9 = 3$ dm.

Problema 664

In desvoltarea lui $(x + y)^n$ după formula binomului lui Newton, termenul al doilea este egal cu 240, termenul al treilea este egal cu 720 și termenul al patrulea este egal cu 1080. Să se găsească x, y, n.

M. Balk și I. Rauhvager

Soluție. Conform enunțului avem:

$$C_n^1 x^{n-1} y = 240 \quad (1) \qquad C^2 x^{n-2} y^2 = 720 \quad (2)$$

$$C^3 x^{n-3} y^3 = 1080 \quad (3)$$

Impărțind (2) la (1) și (3) la (2) obținem

$$3 = \frac{(n-1)\,y}{2x} \quad \text{și} \quad 3 = \frac{2\,(n-2)\,y}{3x}.$$

Din ultimile două relaţii rezultă

$$\frac{n-1}{2}=\frac{2(n-2)}{3}, \quad \text{de unde } n=5.$$

Inlocuind în (1) şi ţinând seamă că $3x=2y$ obţinem: $x^5=32$, deci

$$x_1=2;\ x_{2,3,4,5}=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{-10\mp 2\sqrt{5}}\right)$$

$$y_1=3;\ y_{2,3,4,5}=\frac{3}{4}\left(-1\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{-10\mp 2\sqrt{5}}\right)$$

Problema 665

Toate feţele unui paralelipiped sunt nişte romburi egale. Unul din unghiurile diedre ascuţite este egal cu 2φ, iar latura paralelipipedului este egală cu a. Să se afle volumul paralelipipedului.

E. Streleţki (Grodno)

Soluţie. Din D' şi A coborîm perpendicularele $AM, D'M$ pe muchia $A'B'$ a paralelipipedului $ABCDA'B\,C'D'$. Ducem apoi înălţimea AN a paralelipipedului.

Conform enunţului avem $\sphericalangle AMD'=2\varphi$. Notând

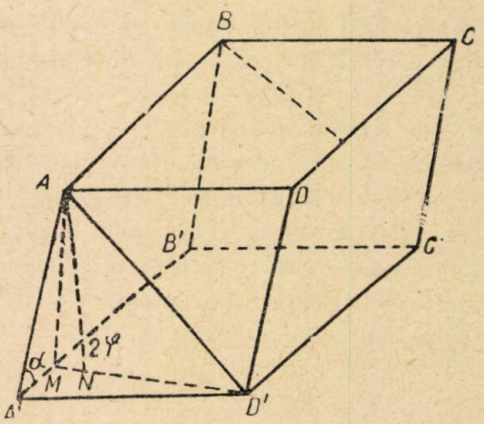
$\sphericalangle AA'B'=\sphericalangle AA'D'=\alpha$, avem $AM=a\sin\alpha$,

$AN=a\sin\alpha\sin 2\varphi$, aria $A'B'C'D'=a^2\sin\alpha$.

Deci vol. $ABCDA'B'C'D'=a^3\sin^2\alpha\sin 2\varphi$.

Rămâne să determinăm $\sin\alpha$ în funcţie de valorile date. In triunghiul AMD' avem

$$AD'=2AM\sin\varphi=2a\sin\alpha\sin\varphi,$$



iar în triunghiul $AA'D'$; $AD'=2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Prin urmare $2a\sin\alpha\sin\varphi=2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$, de unde

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\varphi$$

$$\sin^2\alpha=\frac{4\operatorname{cosec}^2\varphi-\operatorname{cosec}^4\varphi}{2}.$$

Cu aceasta

$$\text{vol } ABCD\,A'B'C'D'=\frac{4\operatorname{cosec}\varphi-\operatorname{cosec}^3\varphi}{2}\cos\varphi\cdot a^3$$

PROBLEME PROPUSE

943. Suma muchiilor laterale unei piramide regulate este egală cu perimetrul bazei. Să se găsească valoarea unghiurilor diedre formate de două feţe laterale alăturate ale piramidei.

L. Lopovoc

944. Un ciocan de fier de 1,8 kg lucrând continuu timp de 3 minute s'a încălzit cu 36°C. Ştiind că el primeşte căldura numai 40% din cea rezultată prin transformarea lucrului mecanic, să se calculeze puterea ciocanului.

* * *

945. Să se demonstreze că oricât de mare ar fi n, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$$

S. Bernstein

946. Se dă

$$\cos x+\cos y=a$$
$$\sin x+\sin y=b$$

Să se calculeze $\cos(x+y)$ şi $\sin(x+y)$.

947. Să se demonstreze că dacă A,B,C sunt unghiurile unui triunghi oarecare, există inegalităţile:

$$\sin\left(56^\circ+\frac{A}{15}\right)\sin\left(56^\circ+\frac{B}{15}\right)\sin\left(56^\circ+\frac{C}{15}\right)>$$
$$>\sin\left(54^\circ+\frac{A}{10}\right)\sin\left(54^\circ+\frac{B}{10}\right)\sin\left(54^\circ+\frac{C}{10}\right)>$$
$$>\sin\left(52^\circ+\frac{2A}{15}\right)\sin\left(52^\circ+\frac{2B}{15}\right)\sin\left(52^\circ+\frac{2C}{15}\right).$$

C. Ionescu-Ţiu

948. Să se rezolve ecuaţia

$$ax^3-4x^2+1=0$$

ştiind că o rădăcină este $\sin 18^\circ$.

* * *

949. O maşină termică funcţionând între 20°C şi 120°C cu randamentul de 0,9 dă 1,5 kW/oră. Câtă căldură se ia dela isvorul cald şi câtă căldură se cedează isvorului rece?

* * *

950. Să se arate că

$$\frac{\sin 15^\circ}{\sin 5^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 5^\circ} = 2$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = 2\sqrt{2}$$

Simon Şt. Petre

951. Să se găsească constanta de desintegrare λ a radiului, dacă perioada sa de înjumătăţire este $T = 1550$ ani.

* * *

952. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor cuprinse între vârfurile şi ortocentrul unui triunghiu oarecare sunt ortrocentrele triunghiurilor care au ca vârfuri respectiv câte unul din vârfurile triunghiului considerat şi mijloacele laturilor ce pleacă din acest unghi.

C. Ionescu-Ţiu

953. Să se găsească numerele x întregi, astfel ca suma $ab + x^2$ să fie un patrat perfect, ştiind că a şi b sunt numere prime absolute mai mari decât doi.

* * *

954. Să se calculeze volumul şi aria totală a corpului născut prin rotirea unui triunghi isoscel ABC $(AB = AC = d)$ în jurul perpendicularei în A pe latura AB unghiul A fiind ascuţit.

Anatolie Mândru
elev, Bucureşti

955. Se dă funcţia $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ şi dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$bx^2 + (c - a)\,x - b = 0,$$

să se arate că:

$$f(x_1) + f(x_2) = a + c \text{ şi } f(x_1)\,f(x_2) = ac - b^2.$$

Gh. D. Simionescu

956. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$y^4 + 2xy^2 + x^2 - 10y^2 + 1 = 0$$

Marius Iosifescu
elev, Piteşti

957. Fie A şi A' două puncte pe cercurile de bază ale unui cilindru drept, astfel încât AA' intersectează axa cilindrului. Cunoscându-se suprafaţa totală S a cilindrului şi lungimea segmentului AA', să se calculeze raza şi înălţimea cilindrului. Discuţie.

Mircea D. Constantinescu
elev, Bucureşti

958 Să se calculeze tensiunea U, exprimată în volţi, aplicată unui tub Roentgen, dacă în spectrul continuu emis de acest tub nu există radiaţii cu lungimi de undă mai mici de 0,206 Å.

* * *

959. Dacă M este un punct mobil pe arcul AB al cercului circumscris patratului $ABCD$, să se arate că:

$$\overline{MD} \cdot \overline{MC} = \overline{MD} \cdot \overline{MA} + \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC}.$$

N. Păun
student, Bucureşti

960. Se dau într'un plan două drepte D şi D'. Să se aşeze un cerc (C), de rază dată R, cu centrul pe dreapta D şi un al doilea cerc (C'), de rază dată R, cu centrul pe dreapta D' astfel încât:

a) Cercurile (C) şi (C') să fie tangente (interior sau exterior).

b) tangenta lor comună să abiă o direcţie dată (Δ).

Gh. D. Simionescu

961. Considerăm triunghiul oarecare ABC înscris în cercul (O). Notăm cu D' intersecţia diametrului AD cu latura BC şi cu A' piciorul înălţimii din A. Fie P şi Q simetricele lui A' respectiv faţă de AB şi AC, iar M şi N mijloacele lui $A'P$ şi $A'Q$. Dreptele PB şi QC intersectează cercul (O) în punctele M' şi N', iar dreapta PQ taie respectiv pe AB şi AC în punctele C' şi B'. Să se demonstreze că:

a) B' şi C' sunt picioarele celorlalte două înălţimi.

b) Dreptele AD, BP şi CQ sunt concurente într'un punct P'.

c) Punctele $M'D'N'$ sunt colineare.

d) Punctul D este intersecţia bisectoarelor triunghiului $M'N'P'$.

e) Există relaţia:

$$\overline{AB'} \cdot \overline{M'A} + \overline{AC'} \cdot \overline{A'N} = \overline{AA'} \cdot \overline{B'C'}.$$

Mihail I. Popescu

962 In cercul circumscris unui triunghiu ABC, o coardă MN paralelă cu latura BC, taie laturile AB şi AC în D şi E. Să se arate că:

$$\overline{MD} \cdot \overline{BN} \cdot \overline{AE} = \overline{AD} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{ME} \quad \text{şi}$$

$$\overline{NE} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{ND} \cdot \overline{BM}.$$

D. C. Panu

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E. 315. U.R.S.S. ocupă primul loc în lume în ceeace privește cantitatea zăcămintelor de turbă, având 25% din rezervele mondiale. Extragerea turbei din partea europeană a Uniunii Sovietice este de circa 27 miliarde tone anual. La ce cantitate de cărbuni cu puterea calorifică de 7000 calorii mari corespunde această cantitate de turbă?

* * *

E. 316. Trei persoane pornesc pe același drum. Prima persoană parcurge $\frac{20}{63}$ din drum și $\frac{2}{7}$ dintr'un km., cea de a doua persoană parcurge $\frac{7}{16}$ din restul drumului și $\frac{3}{4}$ dintr'un km; iar ultima persoană a parcurs 6 km. Se cere cât a parcurs prima și a doua persoană.

N. Giurea
student, Orașul Stalin

E. 317. Câte calorii încălzesc aerul unei camere dela 6° la 20°C dacă volumul camerei este de 50 m³, căldura specifică a aerului este 0,24 iar un litru de aer cântărește 1,293 grame.

* * *

E. 318. Să se așeze în ordinea mărimii lor numerele:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ ;\quad \frac{8}{13}\ \text{și}\ \frac{5}{8}$$

* * *

E. 319. Să se demonstreze că oriunde ar fi așezat un punct C, avem inegalitățile

$$|\overline{AC}-\overline{BC}| \leqslant 2\overline{CM} \leqslant \overline{AC}+\overline{BC}$$

unde M este miljocul unui segment oarecare AB.

Să se arate în ce cazuri este valabil semnul egal.

C. I. Ț.

E. 320. Să se calculeze cu câte grade se vor încălzi 800 grame apă dacă scufundăm în această apă 600 grame de aramă care se răcește de la 90° până la 24°C.

* * *

E. 321. Intr'un triunghiu echilateral ABC ducem înălțimea AH și prelungim pe BC cu o lungime $BM = BH$. Fie N mijlocul lui AB. Dreapta MN taie pe AH în P. Să se demonstreze că dreapta CP este perpendiculară pe AM.

C. Dragomir
elev, Pitești

E. 322. Pentru încălzirea unui laborator bine aerisit se cer la fiecare oră câte 1000 calorii mari. Câtă apă trebue să treacă într'o oră prin radiatoarele caloriferului dacă apa intră în ele la 80°C și iese la 72°C.

* * *

E. 323. In triunghiul echilateral ABC se prelungesc în același sens laturile $AB = BC_1$, $BC = CA_1$ și $CA = AB_1$. Să se arate de câte ori este mai mare suprafața triunghiului $A_1B_1C_1$ decât suprafața triunghiului dat ABC.

S. V. Ionescu
elev, Pitești

E. 324. In triunghiul oarecare ABC se duce bisectoarea AD, iar din punctul D ducem perpendicularele DM și DN respectiv pe AB și AC.

Să se demonstreze că triunghiul AMN este isoscel și că AD este perpendiculară pe MN.

Brezeanu Ioanin
elev, Târgoviște

POȘTA REDACȚIEI

HAMER LADISLAU, Timișoara. Răspunsul la scrisoarea dvs. îl găsiți citind articolele: « Facultățile de Matematică și Fizică » din Nr. 4 R.M.F. și « Despre profesia de matematician » din Nr. 5 R.M.F.

NIC. STOICA, prof. supl. Suplocul de Bărcău — Reg. Oradea. Un abonament pe un an la Revista Matematică și Fizică costă 10 lei. Reclamați cazul dvs. Centrului de Difuzare a Presei.

C. BERDAN. Pe măsura posibilităților, Revista Matematică și Fizică va publica articole despre oamenii de știință progresiști. In numărul 7 R.M.F. 1953 găsiți un articol despre Nicolae Copernic.

ISTUDOR STAN, învățător, comuna Nalbaut, Reg. Galați. Problema propusă de dvs. este neterminată. Noi vă sfătuim să o refaceți, completând-o cu datele necesare. Trimiteți apoi problema refăcută. R. M. F. o va publica.

ALEXANDRINA OCTAVIA VIȘA, cl. XI-a A, Timișoara. In cadrul schimbului de experiență dintre cercuri pe care R.M.F. îl va organiza curând, se va ține seama și de experiența cercului pe care l-ați frecventat.

BUTUȘINA ION, Școala tehnică de drumuri, București. Rezultatele la care ați ajuns căutând anumite prescurtări de calcul, sunt cunoscute. Noi nu le putem publica, dar vă sfătuim să persistați, învățând mereu noi cunoștințe de matematici. Veți avea un câmp larg de studiu și cu alte posibilități.

VRABIOIU ȘTEFAN, Școala Zootehnică, Văleni de Munte. Citiți răspunsul pe care l-am dat tov. Butușină.

PÂRVULEȚU DANIEL, Liceul mixt Calafat. Pentru colecția R.M.F. vă adresați Centrului de difuzare a Presei, București, iar pentru « Formularul Matematic » Editurii Tehnice în cazul când nu găsiți cartea la « Librăria Noastră » din localitate.

GALFI BALAZS, prof. Teaca Raionul Bistrița. Reclamați cazul dvs. direct Centrului de difuzare a Presei din București.

MOLDOVAN VASILE, învățător Dumbrăveni Raionul Sighișoara. Comandați cărțile de care aveți nevoie prin « Librăria Noastră » din Sighișoara.

DUȚA I. GHEORGHE, anul III, Sc. Pedagogică, Câmpulung-Muscel. Problemele trimise sunt bine rezolvate Continuați să țineți legătura cu R.M.F. și mai ales învățați mereu și din ce în ce mai bine.

BALABAN EMIL, Galați. Redacția a primit problemele pe care le-ați trimis. Continuați să țineți legătura cu R.M.F.

RUS ION, Ianosda Raionul Salonta. Inainte de a învăța ecuații diferențiale, trebue să vă însușiți bine cunoștințele de matematici care se predau în școala medie. Dacă posedați cunoștințe de calcul diferențial și integral, puteți învăța ecuații diferențiale din « Curs de Matematici Superioare » de Vlasov.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare din numărul 5, Mai 1953)

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. Cotorogea Dan (703×, 704×, 705×, 711×, 724), Istodor C. Nicolae (704×, 723, 743, 748, E: 216, 218, 225, 230, 239, 236, 243, 245, 251), Răduț M. Marin (213, 217, 218, 223, 236), Clasa X-a. Ariciu G. Mihai (608, 615, 621, 664, 670, 677, 724, 728, E: 216, 217, 218), Caranda N. Virgil (608, 615, 621, 670, 685, 728, E: 218, 239), Filimon Ștefan (504, 514, 543, 548, 568, 590, 595, 609, 618, 640, 645, 647, 648, 670, 677, 686, 691, 716, 720, 722, 723, 727, 728, 740, 741 742, 745, 746, 748, E: 172, 243, 245), Gâlcă Constantin (608, 620, 633, 643, 651, 670, 685, 724, 728, E: 927, 208, 217, 239), Pârvuleț A. Constantin (504, 514, 604, 618, 630, 632, 643, 677, 685, 721, 723 724, 728), Păunescu D. Ion (543, 548, 550, 554, 568, 569, 587, 590, 591, 595, 597, 609, 610, 618, 634, 645, 647, 648, 686, 688, 693, 716, 717, 718, 720, 721, 722, 724, 727, 728, P), Pârvulescu Emil (543, 591, 597, 604, 701, 722, 744, 745, 748, P), Taloi Constantin (591, 601, 608, 621, 630, 633, 664, 670, 685, 716, 721, 723, 728, 740, 743, 744, 745, 748, E: 175, 178, 179,199, 200, 203, 207, 208, 209, 212, 213, 214, 217, 218, 220, 222), Tufan V. Constantin (504, 540, 590, 591, 609, 610, 643, 655, 658, 670, 685, 718, 720, E: 185, 193, 203, 217, 220, 223, 224, 225, 228, 230), Zorilescu M. Dan (548, 579, 591, 601, 609, 617, 618, 630, 643, 647, 648, 666, 677, 682, 685, 703×, 705×, 707×, 720, 722, 727, 734, 744, 745, 746, E: 177, 180, 203, 239), Clasa XI-a. Ionescu Carmen (691, 703×, 704×, 705, 716, 724, 745, 748), Praja D. Milly (615, 624, 630, 641, 685), Cioc C. Luci (621, 624, 630, 641, 655, 658, 687, 685), Constantinescu Lucia (615, 621, 624, 641, 685, 721), Popescu V. Constantin (554, 567, 578, 591, 603, 611, 655, 658, 670, 724), Sin C. Axenia (624, 651, 655, 659, 671, 685, 721), Surdu Emil (554, 561 611, 621, 634, 643, 655, 658, 670, 685, 687, 724, 728), Vâță Florea (581, 582, 659, 666, 671, 681, 682, 685, 691, 695, 697, 698, 701, 703×, 704, 706×), Zaharescu Marius (535, 540, 543, 548, 567, 568, 569, 574, 583, 590, 597, 598, 600, 603, 609, 611, 618, 621, 627, 629, 630, 634, 645, 648, 658, 663, 664, 666, 670, 685, 686, 687, 688, 693, 703×, 705×, 707×, 716, 717, 718, 721, 722, 724, 727, 728, 734, 740, 741, 745).

VASLUI. Clasa XI-a. Alexandru Doru (625, 630, 633, 651, 685, 716, 724), Toma Pavel (578, 608, 625, 630, 633, 724).

Până la 1 Mai 1953 s'au mai primit soluții bune la cel puțin cinci probleme din Revista Matematică și Fizică dela:

AIUD. Clasa VII-a. Ocna Mureșului. Duca Vasile (E: 223, 225, 239, 245, 247), Clasa VIII-a. Cristea Miorica (744, E: 165, 173, 236, 261).

ALEXANDRIA. Clasa VIII-a. Ceampuru I. Stelian (658, E: 206, 209, 213, 216, 228, 229, 232).

ARAD. Clasa X-a. Oniță Aurel (573, 629, 630, 632, 633, 655, 664, 748, E: 193, 197, 200, 207, 212), Frif Miron (629, 655, 658, 666, 670, 685, 718, 768, 770).

BACĂU. Clasa VIII-a. Palaghiță I. Ștefan (708*, 712*, 748, 770, E: 197, 261, 263), Simion Emil (E: 178, 192, 202, 216, 218, 236, 240, 245, 252, 257, 263), Clasa X-a. Tofan V. Ioan (576, 588, 589, 596, 607, 617, 647, 648, 670, 675, 715, 735, 736, 740, 742, 743, 744, 745, 746, 748, 751, 752, 753, 7566, 756, 757*, 759*, 761*, 762, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 775, 777, 778, P).

BAIA MARE. Clasa IX-a. Pop Gheorghe (737, 744, 745, 748, 759*, 765, 770, E: 243, 247, 248, 257).

BÂRLAD. Clasa X-a. Bichir Ilie (566, 589, 596, 700, 716, 726, 744, 769, 770, 806, P), Bichir Constantin (691, 692, 693, 707*, 724, 768, 770, 777, 780), Condrea Nelu (560, 590, 607, 608, 611, 615, 618, 620, 621, 624, 625, 629, 633, 635, 640, 641, 643, 645, 647, 649, 651, 655, 658, 659, 663, 664, 666, 670, 675, 685, 716, 718, 721, 724, 726, 736, 756, 757*, 765, 767, 768, 778, P).

Școala medie tehnică financiară. Anul II. Condrea Petru (618, 625, 629, 633, 635, 643, 647, 645, 659, 663, 664, 666, 716, 718, 721, 724, 756, 768, E: 217, 218, 243, 245).

BEIUȘ. Clasa VIII-a. Sandor Dionisie (764, 765, 767, 768, 770, 778, 786, P).

BOTOȘANI. Clasa VIII-a. Schwartz Maria (740, 743, E: 222, 230, 236), Vamanu Elena (E: 221, 228, 230, 236, 239, 240, 248, 251), Clasa IX-a. Avram Lucia (736, 762, 768, E: 260, 261), Casianov Eugenia (743, 745, 748, E: 245, 248, 251), Clasa X-a. Grosu C. Gheorghe (621, 630, 633, 644, 655, 658, 691, 703*, 745, 748, P), Clasa XI-a. Ceaușu Sofica (717, 736, 764, 768, 769, 779, E: 251), Hrecesim Alexandru (627, 630, 33, 745, 748), Codău Nicolae (670, 691, 717, 743, 744, 758, 762), Șain Sally (717, 722, 723, 724, 748),

Școala medie tehnică textile. Anul II. Bălănescu Sorin (670, 787, E: 177, 180, 217, 228), Bugan Ecaterina (669, 670, E: 180, 208, 257), Crețu Iulian (670, E: 179, 180, 217, 218), Irimia Jana (E: 179, 180, 183, 199, 213, 231, 257, 261), Iţic Leon (670, 787, E: 179, 180, 217, 218), Hecler Emil (670, E: 179, 180, 217, 218), Roller Zlata (E: 228, 243, 245, 261, 262, 263), Rozentweig Izu (739, 748, 768, 780, 783), Schwartz Clara (670, 787, E: 218, 223, 245, Schwartz Eva (669, E: 179, 199, 213, 218, 225, 231), Anul III Domb Betty (670, E: 223, 231, 243, 245, 259).

BUCUREȘTI. Liceul 1 fete. Clasa IV-a. Predoescu Marieta (E: 194, 198, 201, 202, 203, 234, 235, 240).

Liceul 1 băieți. Clasa IX-a. Astrahanețev Dimitrie (633 634, 652, 655, 658, 724, 745, 748, 770, 779, E: 195, 197, 207, 208, 209, 223, 236, 245, 248, 254), Mieiță P. Cristea (651, 658, 670, 748, 768, E: 207, 209, 213, 236),

Liceul băieți. Clasa VII-a. Duduică Radu (743, E: 192, 245, 251, 257, 261)

Centrul școlar 2, 10, 13 fete. Clasa IX-a. Gongea Valentina (655, 658, 728, 729, E: 207).

Liceul 3 băieți. Clasa X-a. Radu G. Mircea (633, 665, 670, 673, 685, 744, 748, 766, 767, E: 217, 262), Radu I. Dumitru (613, 655, 658, 665, 670, 696, 721, E: 218, 223, 226 239).

Liceul 4 băieți. Clasa XI-a. Radcenco T. Vsevolod (588, 591, 608, 618, 621, 633, 691).

Școala elementară Nr. 4 băieți. Clasa VII-a. Schileru I. Dinu (252, 257, 259, 260, 263).

Liceul 5 băieți. Clasa XI-a. Anton Vasile (643, 645, 651, 655, 658, 666, 667, 669, 670, 671, 675, 677, 678, 683, 685, 687, 693, 715, 716, 717, 718, 720, 721, 724, 726, 727, 728, 737, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 748, 751, 753, 754, 757, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 772, 773, 774, 775 776, 777, 779, 780, 782, 783).

Liceul 6 băieți. Clasa IX-a. Kestenband Barbu (531, 540, 666, 680, 727, 764, 768, 770, 772, 775, 783, E: 160, 257, 258, 260, 261, 262, 263, P), Clasa XI-a. Ștefănescu N. Nicolae (635, 659, 721, 728, 742, 767, 768, 792, E: 203, 204, 207, 208, 209, 226, 232, 253, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264).

Liceul 7 băieți. Clasa IX-a. Stoleru George (722, 724, 739, 745, 770, 787, 792, E: 194, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 208, 209, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 245, 252, 259, 260, 263, 266, 267, 270, 271, 275, P).

Liceul 8 băieți. Clasa IX-a. Marinaș C. Nicolae (708, 726, 748, E: 233, 236, 239), Școala elementară Nr. 9 băieți, Clasa IV-a. Adam Dragoș (E: 206, 207, 257, 260, 268).

Liceul 10 băieți «Aurel Vlaicu». Clasa VIII-a. Movanu Radu (E: 239, 243, 244, 245, 247), Stănășilă Octavian (765, E: 182, 187, 252, 254, 255, 258, 259), Sandu G. Ioan (718, 748, 765, E: 176, 182, 187, 191, 197, 204, 208, 219, 251, 252, 254, 255, 258, 259, 260 261, 263), Vidlescu Vasile (E: 258, 259, 260, 261, 263), Clasa IX-a. Andreescu Gh. Radu (611, 737, 745, 770, 776, 787, 792, 800, E: 257, 261, 263). Câmpu Eugen (683, 684, 690, 736, 737, 743, 744, 745, 746, 748, 749, 750, 751, 752, 755, 758*, 759), Clasa X-a. Andreescu Gh. Mircea (662, 683, 693, 709*, 724, 727, 737, 751, 753, 768, 774, 775, 776, 778, 780, 787, 788, 792, 793, 797), Clasa XI-a. Ionescu Ion (765, 767, 768, 770, 777, E: 258), Pașcu D. Constantin (716, 720, 728, 762*, E: 235, 236, 243, 251, 269, 275), Petre I. Mihai (770, 780, 785, 800, 804, E: 56, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 266, 268, 270, 272, 273, 274). Șincan Corneliu (581, 600, 612, 622, 665, 725, 734, 736, 762*, 764, 766, 777, 780, 785, 787, 797, 295, 800, 801, 804, 805, P).

Școala medie tehnică de măsurători terestre. Anul II D. Moga Emil (770, E: 226, 245, 248, 256, 260).

Școala de 7 ani Chitila. Clasa VI-a. Chiru Constantin E: 150, 156, 165, 166, 175, 178, 184, 186), Dinu P. Coralia (E: 151, 156, 166, 184, 186).

BUZĂU. Clasa IX-a. Cucu Dan (601, 604, 744, 745, 765, 768, 770, 800). Clasa X-a. Pavel G. Constantin (590, 597, 604, 607, 612, 621, 622, 630, 665, 673 691, 694, 702, 717, 722, 728, 765, 767, 768, 770, 778), Golianu Petru (636, 693, 764, 765, 767, 768, 779).

CĂLĂRAȘI. Clasa VIII-a. Ionescu Șerban (770, 771, 783, E: 255, 257, 261, 262, 263), Clasa IX-a. Mazilu Constantin (748, 783, E: 251, 256, 260, 261, 264), Clasa X-a. Rădulescu Ion (634, 643, 649, 734, 743, 765, 774, 778, 780, E: 195, 228, 270), Clasa XI-a. Parotă Niculae (758*, 765, 768, 770, 780), Stoian Ioan (718, 748, 765, 768, 780), Teodorescu Alexandru (534, 543, 585, 587, 588, 590, 598, 609, 610, 614, 643, 647, 658, 718, 720, 721, 757, 766, 767).

CÂMPINA. Școala medie tehnică de petrol Nr. 2. Anul IV. Banghea Oprea (533, 743, 751, 765 770, 775, 777, 778, 779, 782), Moldan Tănase (611, 621, 658, 670, 724, 743, 770, 739, E: 192, 200, 207, 208, 218, 236, 263), Pârciu Mircea (533, 552, 593, 770, 775, 777, 778, 779, P), Clasa XI-a. Neagu Vasile (608, 611, 729, 767, 768, 770).

CÂMPULUNG MUȘCEL. Școala medie tehnică de cărbuni. Anul II. Savin D. (514, 521, 526, 549, 615, 787), Școala pedagogică. Anul III. Duță I. Gheorghe (615, 643, 666, 685, 765, 767, E: 185, 186, 198, 202, 206, 214, 260), Clasa IX-a liceu: Mănescu C. Mircea (630, 643, 644, 654, 655, 659, 663, 666, 676, 678, 682, 685, 718, 722, 724, 726, 730, 731, 737, 740, 745, 748, 751, 764, 765, 770, 776, 779), Clasa XI-a. Nichifor Gh. Gheorghe (653 673, 675, 676, 678, 681, 682, 685, 691, 693, 695, 698, 701, 703*, 704), 705* 706*, 707*, 709*, 710*, 711,* 712*, 713*, 714*, 716, 717, 718, 720, 721, 724, 726, 728, 733, 736, 743, 744, 745, 748, 751, 756, 757, 758*, 759*, 760*, 762*, 765, 766, 767, 770, 775, 776, 777, 778, 779, 782).

CÂMPULUNG-SUCEAVA. Școala medie de exploatarea lemnului. Anul I. Rebenciuc Teodor (591, 744, 770, E: 261, 266, 270, 274), Anul II. Strugariu Dumitru (591, 600, 621, 625, E: 225, 228), Ungureanu Ștefan (546, 548, 560, 562, 622, 631, 654).

CARANSEBEȘ. Clasa VI-a. Muck Margareta (E: 165, 171, 175, 203, 213, 225, 239, 245), Școala medie tehnică silvică. Anul III. Loziciu I. Ilie (621, 627, 629, 655, 683, 685, E: 226, 227, 228, 230, 233, 236, 237, 238, 239, 240, 242).

CARACAL. Clasa XI-a. Predețeanu Nicolae (604, 625, 658, 765, 768, E: 210, 211, 222, 242, 244, 255, 266), Școala medie tehnică de statistică. Anul III. Ion Vasile (765, 768, E: 240, 252, 253, 259, 260), Clasa XI-a liceu: Economu C. Apostol (521, 585, 589, 595, 608, 609, 610, 617, 625, 658, 659, 682, 687, 705,* 709*, 710, 723, 728, 733, 740, 741, 741, 742, 746, 764, 765, 767, 768, 770, 792, E: 206, 210, 215, 216, 217, 218, 222, 225, 227, 238, 251, 268, P).

CLUJ. Clasa IX-a. Constantinescu Florin (532, 552, 560, 582, 583, 584, 593, 597, 601, 603, 607, 608), Clasa XI-a. Gr cu Dan (532, 562, 581, 583, 592, 610, 625, 642, 648, 681, 687, 717, 741, 744, 746, 752, 756, 757, 759*, 760*, 761*, 762, 770, 771, 772, 775, 777, 779, 780, P).

CONSTANȚA. Școala hidrotehnică. Anul I. Constantinescu I. Savu (E: 218, 243, 252, 254, 257, 259, 261, 263), Anul II. Băcioiu Nicolae (E: 203, 204, 206, 209, 234, 236, 260, 263, 266), Cherea M. Mitică (630, 663, 730, 749, 765,

E: 225, 234, 240, 258, 263), Dulică Mihai (716, 748, 765, 766, 768, 769, E: 233, 234, 235, 236), Ică I. Nicolae (608, 614, 615, 630, 631, 633, 655, 658, 663, 760, 685, 765, E: 165, 187, 193, 2 7, 2 8, 2 9, 216, 217, 235, 236, 24 , 245, 251, 253, 258, 261, 263), Oaie L. Laurențiu (643, 685, E: 214, 242, 243), Mitescu Constantin (647, 744, 745, 768, 776, E: 243, 245, 248, 249 25), Clasa VIII-a liceu Osman S. Saim (743, 748, E: 245, 247, 248, 251).

CORABIA. Clasa VIII-a. Caimac Antigona (774, 776, 779, 77 , E: 259), Ilinca V. Veronica (77 , 774, 776,E: 251, 259), Irimi Maria (77 , 774, 776, 779, E: 259), Marcu Filip (770, 774, 776, 779, E: 259), Nistor Elena (770, 774, 776, 779, E: 259), Clasa IX-a. Badănac M. Alexandru (583, 608, 632, 634, 723, 724, 726, 747, 748, 768, 770, 779, E: 197, 200, 207, 208, 209, 213, P).

CRAIOVA. Clasa IX-a. L.b. 2. Mitrea M. Nicolae (748, E: 236, 246, 248, 251), Mitran Paraschivu (748, E: 213, 217, 218, 239), Clasa X-a. L. b. 1. Guran A. Marius (625, 727, 770, 777, E: 210, 245), Istinie C. Crăciunel (533, 685, 718, 752, E: 257, 261, 264), Clasa XI-a. Bârzu M. (615, 682, 713, 715, 770, 775, E: 241), Floarea Paula (655, 691, 757, 767, 770, E: 250, 257, 261, 263), Livescu Jean (589, 633, 643, 672, 685, 718, 765, 766, 768, 770, E: 185, 190, 192, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 212, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 223, 224, 228, 230, 231, 235, 239, 240, 243, 244, 245, 247, 248, 249, 254, 258, 261, P), Popescu I. Mihail (707*, 711*, 717, 734, 736, 739, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 755, 756, 757, 758*, 761*, 762*, 767, 768, 770, 771, 772, 773, 774, 776, 777, 778, 779, 780, 782, 783, P), Popescu Silvia (591, 654, 655, 682, 698, 717, 718, 723, 724, 743, 744, 748), Șerban Ileana (770, 757, 758*, E: 258, 263), Tiță I. Nicolae (514, 521, 533, 538, 552, 55 , 557, 560, 585, 599, 600, 602, 603, 692, 705*, 707*, 734, 761, P).

CURTEA DE ARGEȘ. Liceul mixt. Clasa VII-a. Diaconu Varonica (E: 203, 204, 207, 208, 214, 217), Teodorescu Dorin (E: 203, 204, 207, 208, 214, 223, 224, 225, 228), Vasilescu N. Nicolae (E: 203, 204, 207, 208, 214, 217, 223, 224, 225, 228), Clasa VIII-a. Moisescu N. Nicolae (632, 663, 724, 746, 744, 748, 768, 770), Clasa X-a. Dabija Mircea (643, 745, 765, 766, 767, 768, 770, 774, 787, 788), Clasa XI-a: Boncea Vasile (647, 648, 689, 692, 694, 698, 706*, 707*, 710*, 719, 743, 756, 758*, 765, 766, 767, 768, 770, 774, 777, 778, 779, 780, 787, 788, 790 792), Marinescu Titi (611, 615, 617, 620, 621, 659, 682, 683, 684, 685, 690, 691, 692, 693, 694, 698, 701, 744, 747, 748, 752, 770, 777, 778, 779, 780, 783, P), Matei T. Gheorghe 641, 647, 659, 674, 682, 683, 685, 690, 691, 692, 701, 703*, 704*, 707*, 710*, 716, 717, 718, 721, 724, 728, 740, 743 744, 745, 746, 748, 751, 754, 756, 757, 761*, 762*, 765, 766, 768, 770, 773, 774, 777, 778, 779, 780, 783,P), Miu Gh. Filipoiu (632, 643, 659, 664, 666, 681, 685, 687, 691, 716, 721, 724, 728, 740, 743, 744, 745, 746, 748, 757, 768, 770, 773, 774, 776, 777, 788, 794, 800).

DEVA. Școala pedagogică. Draica Constantin (779, 782, E: 245, 249, 259).

DOROHOI. Clasa XI-a. Munteanu Marcel (560, 623, 659, 674, 678, 686, 690, 694, 704*, 709*, 714*, 715, 716, 723, 724, 726, 733, 745, 748, 751, 763, 770, 772, 775, 776).

FĂGĂRAȘ. Școala medie de chimie. Anul III. Panait Mihai (608, 648, 764, 765, E: 182, 187, 198, 202, 203, 204, 205, 206, 243, 245, 247), Clasa XI-a: Stelea N. (625, 638, 648, 725, 737, 744, 745, 746, 765, E: 203, 204, 206, 207, 208, 209, 245), Trifu Romulus (534, 603, 604, 607, 615, 618,635, 641, 648, 663, 666, 670, 673, 675, 578, 685, 688, 690, 691, 704*, 705*, 709*, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 733, 736, 744, 745, 746, 748, 751, 757, 765, 766, 767, 768, 770, 775, 777, 778).

FOCȘANI. Clasa IX-a. Baieră Bogdan (591, 611, 632, 655, 658, 679, 748, E: 175, 203, 204, 213, 215, 216, 217, 218, 230, 236, 239, 243, 251), Donescu Dragomir (540, 543, 571, 576, 582, 583, 587, 590, 591, 597, 603, 604, 611, 613, 615, 621, 630, 632, 651, 655, 658, 670, 679, 694, 745, 748, E: 178, 179, 197, 207, 208, 216), Dumitru V. Constantin (604, 644, 652, 655, 658, 685, E: 203, 204, 207, 208, 209, 213, 216), Pandrea Nicolae (557, 584, 587, 590, 600, 604, 618, 651, 652, 659, 663, 664, 694, 699, 704*, 707*, 709*, 716, 726, 728, 729, 734, 743, 744, 745, 748, 752, 773, 776, 779), Clasa X-a. Petrovici Radu (529, 570, 587, 589, 601, 604, 605, 607, 611, 618, 625, 629, 640, 641, 645, 647, 648, 651, 658, 659, 662, 666, 670, 671, 675, 678, 679, 684, 685, 691, 701, 705*, 715, 726, E: 193, 213, 218, 216, 221, 223, 224, 225, 226, 227, 243, 245, 248,P), Școala profesională Gugești. Anul II. Ciocan Veronica (E: 234, 235, 239, 240, 243).

GALAȚI. Clasa X-a. Vasiliu George (514, 534, 548, 549, 551, 557, 559, 562, 576, 581, 583, 585, 587, 588, 589, 590, 591, 594, 595, 597, 600, 601, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 610, 613, 621).

GIURGIU. Clasa VIII-a. Cazacu H. Dumitru (739, 748, E: 187, 193, 216, 239, 243, 245, 260, 263), Daia N. Elena (658, E: 173, 182, 193, 208, 261), Bigan V.P. (E: 214, 217, 218, 220, 258), Mișcol Mircea (621, 627, 634, 643, 721, 768, E: 157, 158, 160, 177, 195, 196, 248, 255, 263), Clasa IX-a: Vidan Marius (643 685, 686, 744, 745, 765, 767, E: 211, 225, 230, 234, 235, 237, 239, 240, 242, 243, 245, 253, 257, 259, 261, P), Stanciu E. Mirel (765, 792, E: 176, 257, 254, 261, 269, 271), Clasa X-a. Bătinețu M. Dumitru (609, 618, 640, 644, 649, 651, 718, 731, 765, 768), Bigan S. (765, 766, 767, 768, 770, P), Surugiu A. Victor (627, 633, 643, 648, 666, 685, 686, 718, 721, E: 203, 208, 209), Dănilă Gheorghe (532, 560, 575, 582, 583. 597, 609, 617, 621, 648, 655, 670, 676, 699, 744, 750, 767, 770, 776, 782, E: 252, 254, 256, 257, 258, 260, 261, P), Fotă M. Stan (534, 567, 593, 617, 633, 664, 688, 717, 718, 739, 740, 741, 744, 745, 748, 749, 751, 752, 753, 756, 757, 758*, 759*, 761*, 762*, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 775, 777, 778, 780, P), Petcu Dumitru (593, 609, 645, 648, 651, 688, 692, 701, 716, 717, 720, 722, 723, 724, 726, 739, 740, 744, 745, 748, 751, 757, 758*, 759*, 765, 766, 767, 778, E: 163, 170, 239, 240, 243, 244, 249, 251, 258, 259, 260, 261, P), Velicu Mitu (514, 543, 587, 590, 612, 641, 645, 648, 665, 692, 701, 716, 718, 721, 723, 724, 726, 740, 741, 743, 745, 748, 749, 757, E: 243, 245, 248, 249), Clasa XI, Andrei Abăluță (537, 590, 591, 611, 615, 618, 621, 627, 630, 632, 633, 643, 655, 658, 691, 718, 743, 744, 748, 768, 779).

HUNEDOARA. Școala medie tehnică siderurgică. Anul IV. Cimporescu Daniel (711*, 716, 717, 755, 756, 765, 770, 775, 777, 778, 779, 780, 783, 785, 787, 791, 794, 795, 798, E: 263, 6Ș4, 265).

IAȘI. Clasa VII-a. Lupu Elena (236, 240, 243, 245, 246), Clasa VIII-a. Herșcovici Bruno (216, 217, 218, 223, 224, 226, 227, 228, 231, 232), Apostolescu A. Radu (730, 756, 765, 768, 770), Arsintescu Virgil (652, 655, 658, 666, 679, E: 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 216, 218, 220, 223, 224, 225, 255), Geambașu Lică (611, 618, 621, 655, 658, E: 179, 195, 197, 199, 203, 207, 208), Școala pedagogică. Dospinescu V. Traian (333, 225, 239, 243, 247, 259, P), Radu I. Constantin (243, 245, 247, 248, 249, 252, 257).

ORAŞUL STALIN. Clasa IX-a. Ionescu Radu (723, 724, 742, 743, 744, 745, 748, 780), Puricel V. Remus (543, 645, 663, 665, 682, 695, 698, 718, 724, 727, 736, 740, 741, 743, 744, 745, 748, 757, 765, 768, 769, 770, E: 210, 243, 247, 251, 257, 261, P), Clasa X-a. Bucă Ioan (627, 630, 633, 648, 664, 666, 670, 740, 743, 744, 745, 746, 748, 765), Bordeanu Gh. (627, 628, 633, 643, 655, 658, 663, 666, 670, 716, 718, 721, 743, 744, 748, E: 208, 251), Drăghici T. Ioan (611, 638, 658, 685, 718, 723, E: 206, 208, 220, P), Ionescu Virgil (685, 718, 721, 740, 741, 743, 744, 748, 754, 762*, E: 225, 230, 239, 243, 245, 261), Vlase Liviu (648, 655, 685, 686, 718, 720, 721, 740, 741, 746, 748, 751, E: 161, 165, 173, 191, 223, 230, 243, 245, 247, 250), Clasa XI-a. Constantinescu T. Teodor (571, 608, 621, 636, 640, 664, 675, 683, 685, 687, 716, 718, 721, 736, 748), Dumitru I. Adrian (583, 598, 600, 603, 615, 630, 632, 635, 638, 642, 643, 647, 648, 654, 658, 664, 665, 666, 670, 673, 675, 683, 685, 691, 693, 694, 695, 698, 701, 703*, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 726, 727, 733, 736, 740, 744, 745, 747, 748, 752, 753, 757, P), Weiszfeiler Edgar (548, 554, 559, 578, 632, 634, 638, 652, 654, 665, 666, 670, 673, 675, 679, 685, 687, 691, 695, 716, 717, 718, 721, 724, 736, 744, 745), Răzvan V. Stinghe (578, 604, 608, 621, 670, 716).

PIATRA NEAMŢ. Clasa X-a. Velea Reghina (703*, 704*, 705*, 707*, 748, 751, 757), Clasa XI-a. Davidescu Ilie (603, 658, 711*, 713*, 714*, 737, 742, 745, 747, 756, 758*, 759*, 760*, 762*, 777, 778, 779, 780, E: 207, 208, 216, 232, 244, 246, 251, 263, 265), Faibiş Iancu (711*, 713*, 714*, 718, 721, 737, 742, 744, 745, 747, 756, 762*, 768, 770, 777, 778, 780, 791, E: 244, 245, 246, 251, 263).

(va urma)

Evidenţiaţi

Pentru activitatea din luna Aprilie 1953 ca rezolvitori de probleme din R.M.F. se evidenţiază:

ANTON VASILE (clasa XI-a L. b. 5. Bucureşti), NICHIFOR GH. GHEORGHE (clasa XI-a, C. Lung, Muşcel), CONDREA NELU (clasa X-a, Bârlad), DUMITRU I. ADRIAN (clasa XI-a, Oraşul Stalin), MATEI T. GHEORGHE (clasa XI-a, Curtea de Argeş), TRIFU V. ROMULUS (clasa XI-a, Făgăraş), FOTĂ M. STAN (clasa X-a, Giurgiu), PETROVICI RADU (clasa X-a, Focşani), TOFAN V. IOAN (clasa X-a, Bacău), POPESCU I. MIHAIL (clasa XI-a, Craiova), PANDREA NICOLAE (clasa IX-a, Focşani), VASILIU GHEORGHE (clasa X-a, Galaţi), ECONOMU C. APOSTOL (clasa XI-a, Caracal), GRECU DAN (clasa XI-a, Cluj), MIU GH. FILIPOIU (clasa XI-a, Curtea de Argeş), MĂNESCU C. MIRCEA (clasa IX-a, C. Lung, Muscel), PETCU DUMITRU (clasa X-a, Giurgiu), DONESCU DRAGOMIR (clasa IX-a, Focşani).

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— Modul de redactare a soluţiilor s'a publicat în numerele precedente.

— Se mai primesc soluţii la problemele cu numărul de ordine 700 şi următoarele; iar pentru exerciţiile propuse pentru şcoala de şapte ani se mai primesc soluţii la E: 235 şi următoarele.

— Fiecare soluţie trebue scrisă separat şi apoi scris citeţ numele rezolvitorului, clasa şi şcoala unde urmează.

— Pentru premierea rezolvitorilor de probleme la R.M.F. pe anul 1953 se va ţine seamă de toate soluţiile primite între 1 Noembrie 1952 şi 1 Noembrie 1953 şi publicate la rubrica rezolvitorilor, de calitatea soluţiilor, modul lor de redactare şi clasa pe care o urmează rezolvitorul.

* * *

E R A T Ă. — La problema 592 pag. 96, în loc de «*convergente*» se va scrie «*divergente.*»

* * *

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru întreprinderi . . . . . Lei 60 anual

Tarif pentru muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 928 — ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Lei 1.—

E 1426/d

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

KAT

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

Országos Könyv... BUDAPEST

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

„Trăiască 23 August, măreața sărbătoare a eliberării Patriei noastre de către Glorioasa Armată Sovietică".

★ ★ ★

ANUL IV

AUGUST 1953

8

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Apelul celui de al III-lea Congres Mondial al Tineretului către tineretul lumii*	189
2.	*Principiul deplasărilor virtuale de Alexandru Stoenescu*	190
3.	*Pentru cercurile de matematici*	198
4.	*Noutăţi în ştiinţa şi tehnica sovietică*	200
5.	*Chestiuni de concurs*	201
6.	*Probleme rezolvate (601, 607, 611, 620, 682, 683, 685, 690, 691, 693, 694, 695, 696, 697, 699, 701, 707, 719)*	205
7.	*Probleme propuse (Concurs 977—1004) + (probleme 1005 — 1027)*	211
8.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E. 325—E 336)*	213
9.	*Poşta redacţiei*	214
10.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	215

8

ANUL IV AUGUST 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA; Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 8 August 1953

APELUL CELUI DE AL III-lea CONGRES MONDIAL AL TINERETULUI CĂTRE TINERETUL LUMII

TINERI ŞI TINERE !

Reprezentanţii tineretului şi ai organizaţiilor de tineret din 106 ţări care au participat la cel de al III-lea Congres Mondial al Tineretului vi se adresează vouă

Invitaţi de Federaţia Mondială a Tineretului Democrat, ne-am întrunit aci la Bucureşti, unde, în cadrul unor discuţii libere ne-am exprimat punctele noastre de vedere cu privire la problemele care frământă întreaga generaţie tânără a timpului nostru.

In ciuda varietăţii punctelor noastre de vedere şi a credinţelor noastre şi cu toate că suntem reprezentanţi ai unor organizaţii de tineret foarte diferite, dorinţele şi interesele noastre sunt aceleaşi.

Noi dorim cu toţii

ca cea mai frumosă parte a vieţii tinerilor şi tinerelor de toate naţionalităţile şi rasele să nu fie întunecată de grija şi de teama zilei de mâine;

ca fiecare tânăr să aibă de lucru şi o îndeletnicire care să-i asigure un salariu suficient pentru a duce o viaţă demnă;

ca fiecare tânăr să aibă posibilitatea de a studia şi de a se odihni, de a-şi dezvolta calităţile şi aptitudinile sale, de a-şi întări sănătatea şi vigoarea;

ca fiecare tânăr să aibă posibilitatea de a-şi întemeia un cămin şi de a trăi în pace şi fericire;

ca fiecare tânăr să aibă dreptul de a lua parte la viaţa socială şi politică a ţării sale.

Tineri, ce trebue să facem pentru a traduce în viaţă visurile noastre?

Unitate, unitate şi iarăşi unitate

Unirea frăţească şi paşnică a tinerilor din toate ţările şi din toate păturile populaţiei constitue o forţă uriaşă în lupta pentru realizarea revendicărilor şi speranţelor tinerei generaţii.

Pentru a fi buni prieteni trebue să ne cunoaştem unii pe alţii. Trebue să luptăm pentru organizarea pe scară cât mai largă de schimburi culturale şi sportive între tinerii din diferite ţări.

Trebue să înlăturăm toate piedicile şi toate uneltirile prin care duşmanii păcii încearcă să ne despartă.

Să ne unim pentru a apăra dreptul la fericire, dreptul la bucurie, să ne unim pentru a sta în calea forţelor răului

Războiul, cursa înarmărilor şi aservirea ţărilor primejduesc realizarea drepturilor tineretului în timp ce progresul omenirii face din ce în ce mai posibilă realizarea lor.

Războiul înseamnă moartea a milioane de tineri, distrugerea căminurilor, prăbuşirea speranţelor noastre.

Cursa înarmărilor înseamnă crucişătoare în loc de şcoli, fortăreţe zburătoare în loc de locuinţe, înseamnă betonul bazelor militare în locul câmpiilor înflorite.

Aservirea înseamnă jefuirea patriei, transformarea tinerilor în sclavi ai străinilor în propria lor ţară.

TINERI,

Vă chemăm să luaţi parte cu toată energia voastră la campania internaţională iniţiată de Consiliul Mondial al Păcii pentru reglementarea paşnică a conflictelor internaţionale, pentru încetarea războaielor în curs şi a acţiunilor agresive împotriva independenţei popoarelor.

Cu aceeaşi energie să demascăm pe cei care pun piedici tratativelor, întârzie realizarea înţelegerii, preferă glasul tunului, glasului raţiunii.

Suntem de acord cu revendicarea ca fiecare naţiune, mare sau mică din orice parte a lumii, de orice rasă, să aibă dreptul de a-şi alege liber modul de viaţă şi să respecte la rândul său modul de viaţă pe care în mod liber şi l-au ales celelalte popoare.

Vom face tot ce ne stă în putinţă pentru ca spiritul tratativelor care a împrospătat atmosfera internaţională şi ne-a umplut inimile de speranţe, să triumfe asupra spiritului întunecat şi înnăbuşitor al recurgerii la forţă şi la război.

Tineretul din întreaga lume a aflat cu mare bucurie vestea despre încheierea armistiţiului în Coreea, care dovedeşte că este posibilă reglementarea tuturor problemelor litigioase pe cale paşnică, prin tratative.

Să ne unim pentru a putea consacra forţele noastre tinere, nobilei cauze a păcii, să luăm parte la acţiunea popoarelor pentru tratative, înţelegere şi pace.

Aceasta este lupta la care vă chemăm fraţi şi surori, prieteni şi tovarăşi.

Prin unire spre pace, Prin pace spre fericire.

Inainte tineret al lumii! Pentru Pace şi Prietenie, pentru un viitor luminos.

PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

ALEXANDRU STOENESCU

O metodă generală simplă care *poate* şi *trebue* să rezolve *orice problemă de mecanică*, fie de statică, fie de dinamică, este dată de *principiul deplasărilor virtuale*. Din practica mea pedagogică am observat însă, cu regret, că elevii şi studenţii se tem aproape întotdeauna să aplice această metodă. Cauza acestei temeri se datoreşte modului de predare al principiului deplasărilor virtuale, rupt de realitate, expus numai ca expresie matematică, fără a se lega de observaţiile simple care au condus la descoperirea principiului.

Primul cercetător care prin experienţă directă a ajuns la ideea de bază a principiului deplasărilor virtuale a fost *Stevin*. El a cercetat echilibrul static în stare de repaos al diferitelor sisteme de scripeţi.

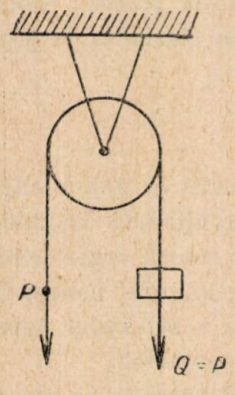


Fig. 1

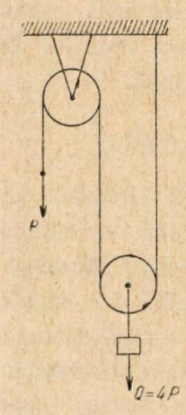


Fig. 2

Astfel pentru cazul unui singur scripete (fig. 1), el observă că pentru echilibru $P = Q$. Presupunând că P coboară cu o distanţă h, Q se va urca cu o distanţă $h_1 = h$. Rezultă deci:

$$Ph = Qh_1 \quad \text{sau} \quad Ph - Qh_1 = 0 \qquad (1)$$

Dar Ph reprezintă *lucrul mecanic* efectuat de forţa P, iar $-Qh_1$ *lucrul mecanic* efectuat de forţa Q (semnul — provine din faptul că deplasarea în cazul forţei Q este de sens contrar cu forţa).

Relaţia (1) reprezintă deci: *suma lucrurilor mecanice ale forţelor exterioare este egală cu zero.*

Această enunţare prezintă după cum vom vedea chiar *principiul deplasărilor virtuale.*

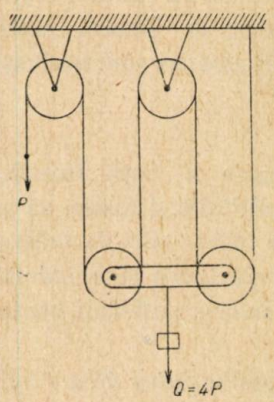


Fig. 3

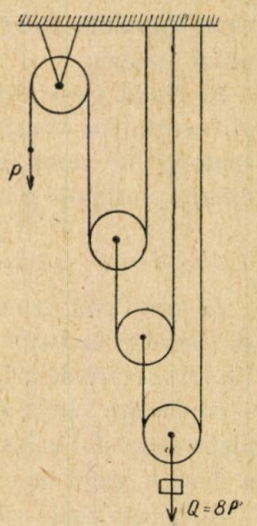


Fig. 4

Dar să revenim la experienţele lui *Stevin*.

Pentru cazul dat de fig. 2, Stevin constată că pentru echilibru trebue să avem $Q = 2P$ în schimb presupunând că P coboară cu o distanţă h, Q urcă numai cu $h_1 = \frac{h}{2}$. Avem deci:

$$Ph = Q\frac{h}{2} \quad \text{sau} \quad Ph - Qh_1 = 0.$$

Pentru cazurile date de fig. 3 şi 4 avem respectiv:

$$Q = 4P \;\; ; \;\; h_1 = \frac{h}{4}$$

$$Q = 8P \;\; ; \;\; h_1 = \frac{h}{8}$$

și deci în toate cazurile regăsim relația (1):

$$Ph - Qh_1 = 0$$

adică *suma lucrurilor mecanice ale forțelor exterioare egală cu zero.*

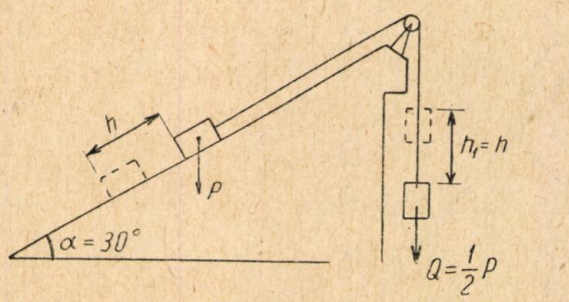


Fig. 5

După *Stevin*, *Galileu* experimentând echilibrul pe un plan înclinat cu 30° pe orizontală al sistemului dat de fig. 5 constată că echilibrul dintre forțele P și Q are loc pentru $Q = \frac{1}{2}P$. Presupunând că P coboară cu distanța h pe planul înclinat, Q se ridică pe verticală cu $h_1 = h$.

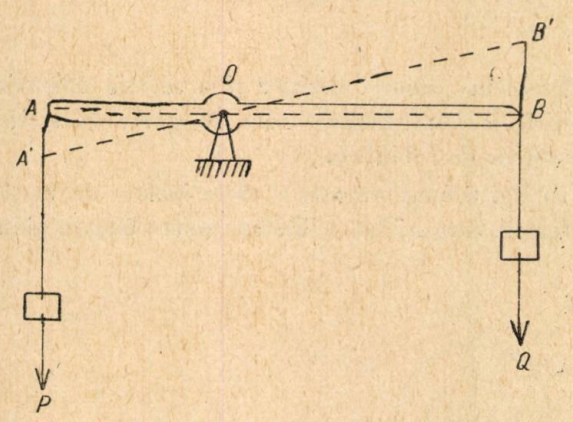


Fig. 6

Dar lucrul mecanic efectuat de P este $Ph\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ adică $Ph\sin 30° = \frac{Ph}{2}$, iar lucrul mecanic efectuat de Q este $-Qh_1 = -Qh$. Se observă ușor că:

$$P\frac{h}{2} - Qh = 0$$

adică aceeași *condiție ca suma lucrurilor mecanice să fie nulă.*

Să considerăm acum pârghia AOB, mobilă în jurul axei fixe O și supusă la greutățile P și Q.

Pentru echilibru trebue să avem:

$$P \cdot AO = Q \cdot BO.$$

Această relație se poate obține ușor în modul următor: Să presupunem că rotim pârghia AOB în jurul lui O cu un unghiu foarte mic prin care A ajunge în A' iar B în B'.

Lucrul mecanic al forței P corespunzător acestei mișcări este $P \cdot AA'$ iar al forței Q este $-Q \cdot BB'$. Scriind că suma acestor lucruri mecanice este nulă, obținem:

$$P \cdot AA' - Q \cdot BB' = 0 \qquad (2)$$

Dar din triunghiurile asemenea AOA' și BOB' avem:

$$\frac{AO}{AA'} = \frac{BO}{BB'}.$$

Inlocuind în (2) segmentele AA' și BB' prin proporționalele lor AO și BO obținem

$$P \cdot AO = Q \cdot BO$$

adică relația căutată.

Pe baza celor arătate mai sus am putea să trecem la studiul unui caz mai interesant și anume la studiul echilibrului mașinii simple de ridicat, dată de fig. 7, în care forțele exterioare sunt P și Q, iar O_1, O_2 și O_3 trei perechi de roți solidare între ele și putându-se roti în jurul centrelor lor respective.

Razele acestor roți sunt corespunzător: r_1, R_1; r_2, R_2; r_3, R_3.

Ne propunem să găsim relația dintre P și Q pentru a avea echilibru.

Să presupunem că P coboară cu o distanță h iar Q urcă pe planul înclinat cu o distanță h_1. Aplicând principiul deplasărilor virtuale trebue să avem:

$$Ph - Qh_1 \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

Rămâne să stabilim acum relația dintre h și h_1. Fie θ_1, θ_2 și θ_3 unghiurile cu care se vor roti roțile O_1, O_2 și O_3 în timpul deplasării lui P cu h.

Avem:

$h = R_1\theta_1$ (deoarece greutatea P coboară cât se desfășoară firul 1 depe roata mare O_1);

$r_1\theta_1 = R_2\theta_2$ (deoarece înfășurarea firului 2 pe roata mică O_1 este egală cu desfășurarea aceluiași fir depe roata mare O_2);

$r_2\theta_2 = R_3\theta_3$ (deoarece înfășurarea firului 3 pe roata mică O_2 este egală cu desfășurarea aceluiași fir depe roata mare O_3);

$r_3\theta_3 = h_1$ (deoarece înfășurarea firului 4 pe roata mică O_3 este egală cu urcarea pe planul înclinat a greutății Q).

Rezultă:

$$h_1 = r_3\theta_3 = \frac{r_2 r_3}{R_3}\theta_2 = \frac{r_1 r_2 r_3}{R_2 R_3}\theta_1 = \frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3}h.$$

Inlocuind în (3) această valoare obținem relația de condiție căutată:

$$P = Q\frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3}\sin\alpha \qquad (4)$$

Prin urmare un muncitor numai cu o forță de 50 kgf poate ține în echilibru o greutate de 6400 kgf; acest rezultat surprinzător ne arată rolul mașinilor în industrie și pe șantiere.

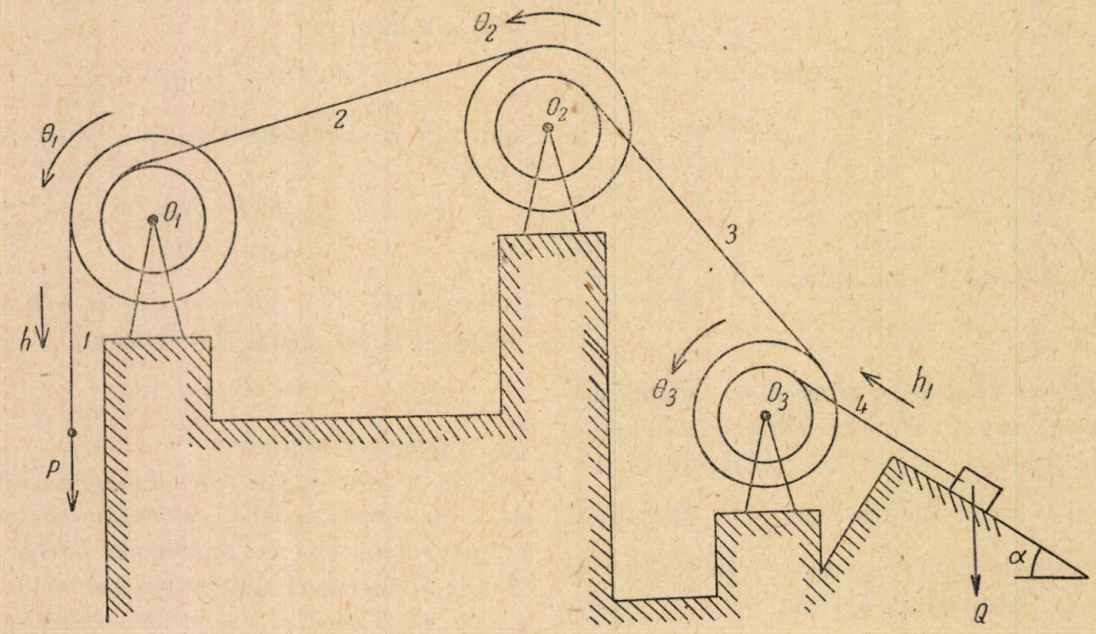


Fig. 7

Pentru a înțelege practic această problemă să presupunem că P reprezintă forța de tracțiune a unui muncitor $P = 50$ kgf. Să considerăm:

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} = \frac{r_3}{R_3} = \frac{1}{4}\,; \qquad \alpha = 30°$$

Problema admite desigur și o soluție obișnuită statică izolând fiecare corp în parte și scriind condițiile de echilibru.

In fig. 8 sunt arătate piesele izolate de mașini și forțele care își fac echilibru pentru fiecare piesă.

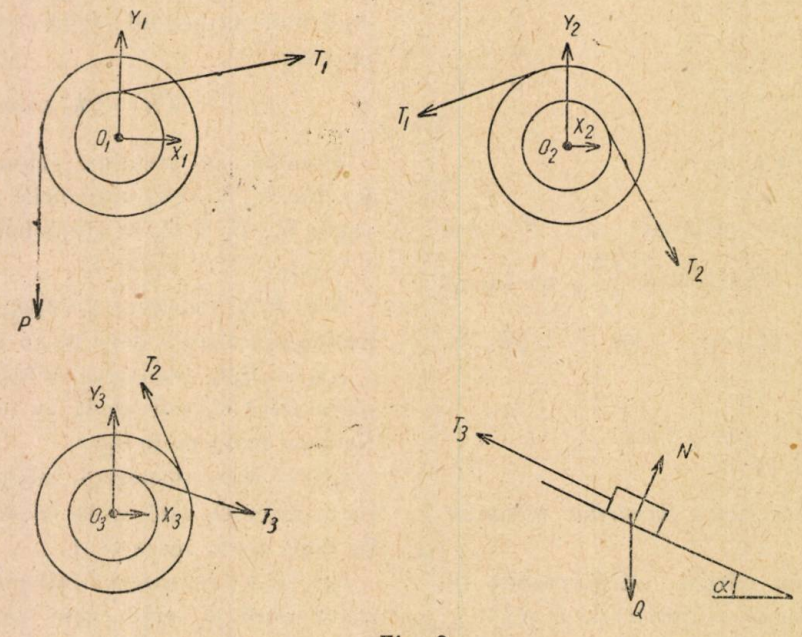


Fig. 8

Rezultă din (4)

$$Q = 6400 \text{ kgf.}$$

Aplicând teorema momentelor în raport cu centrele O_1, O_2 și O_3 obținem:

$$PR_1 = T_1 r_1; \quad T_1 R_2 = T_2 r_2; \quad T_2 R_3 = R_3 r_3$$

De unde:

$$T_3 = \frac{R_3}{r_3} T_2 = \frac{R_2 R_3}{r_2 r_3} T_1 = \frac{R_1 R_2 R_3}{r_1 r_2 r_3} P.$$

Aplicând condiția de proecții pe direcția planului înclinat avem:

$$T_3 = Q \sin\alpha = \frac{R_1 R_2 R_3}{r_1 r_2 r_3} P.$$

De unde:

$$P = Q \frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3} \sin\alpha.$$

* * *

După introducerea istorică și experimentală făcută anterior să încercăm acum pe o cale cât mai simplă posibilă să demonstrăm principiul deplasărilor virtuale.

Să presupunem un punct material M în echilibru, în stare de repaos, sub acțiunea a două forțe F și F'. Pentru echilibru cele două forțe trebue să fie egale și direct opuse (fig. 9). Să presupunem

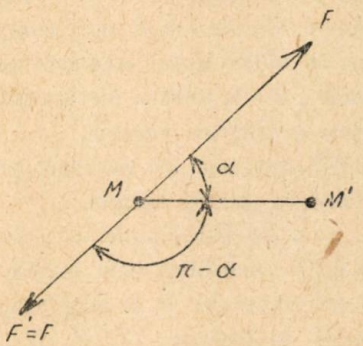


Fig. 9

că deplasăm punctul M într'o poziție absolut oarecare infinit vecină M' cu o distanță elementară MM'; această deplasare nereală (întrucât M este în repaos) se numește *deplasare virtuală* adică imaginară sau fictivă.

Spre a o deosebi de deplasările reale o vom nota cu litera δ în față, astfel:

$$MM' = \delta s$$

Mai general vom conveni a întrebuința semnul δ pentru orice mărimi virtuale.

Să scriem acum suma lucrurilor mecanice ale celor două forțe în *echilibru*, sumă pe care o vom nota cu $\delta\mathfrak{L}$ întrucât aceste lucruri mecanice sunt și ele virtuale.

Avem:

$$\delta\mathfrak{L} = F\,\delta s\cos\alpha + F'\,\delta s\cos(\pi - \alpha)$$

întrucât $F = F'$ rezultă $\delta\mathfrak{L} = 0$.

Să considerăm acum punctul M în repaos supus la un sistem de n forțe $F_1, F_2, \ldots, F_n$ în echilibru (fig. 10). Să dăm punctului M deplasarea virtuală

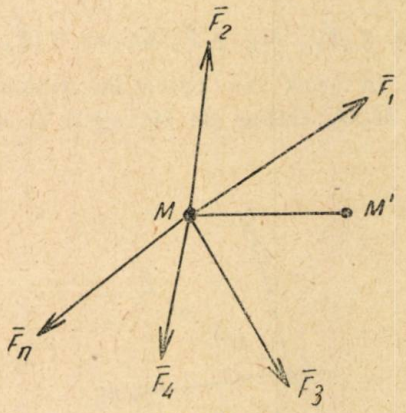


Fig. 10

arbitrară $MM' = \delta s$. Suma lucrurilor mecanice $\delta\mathfrak{L}$ ale tuturor forțelor *în echilibru* este dată de expresia:

$$\delta\mathfrak{L} = F_1\,\delta s\cos\sphericalangle(F_1, \delta s) + F_2\,\delta s\cos\sphericalangle(F_2, \delta s) + \ldots + F_n\,\delta s\cos\sphericalangle(F_n, \delta s)$$

sau prescurtat:

$$\delta\mathfrak{L} = \sum F_i\,\delta s\cos\sphericalangle(F_i, \delta s).$$

De unde:

$$\delta\mathfrak{L} = \delta s \sum F_i \cos\sphericalangle(F_i, \delta s).$$

Observăm însă că suma care înmulțește pe δs reprezintă suma proecțiilor tuturor forțelor pe direcția MM'; deoarece forțele sunt în echilibru această sumă este nulă și deci:

$$\delta\mathfrak{L} = \sum F_i\,\delta s\cos\sphericalangle(F_i, \delta s) = 0 \qquad (5)$$

Să presupunem acum două puncte M_1 și M_2 primul în echilibru sub acțiunea a n forțe $F_1, F_2, \ldots, F_n$, al doilea în echilibru sub acțiunea a m forțe $F_1', F_2', \ldots, F_m'$ (fig. 11).

Toate aceste forțe sunt exterioare sistemului format de cele două puncte cu excepția forțelor interioare F_p și F_p' care reprezintă acțiunea lor reciprocă și care sunt egale și direct opuse conform principiului acțiunii și reacțiunii.

Să dăm punctelor M_1 și M_2 respectiv deplasările virtuale $M_1M_1' = \delta s_1$ și $M_2M_2' = \delta s_2$. Aplicând fiecărui punct rezultatul obținut precedent avem:

$$\delta\mathfrak{L}_1 = \sum F_i\,\delta s_1\cos\sphericalangle(F_i, \delta s_1) = 0$$

$$\delta\mathfrak{L}_2 = \sum F_i'\,\delta s_2\cos\sphericalangle(F_i', \delta s_2) = 0$$

De unde prin adunare:

$$\delta\mathfrak{L} = \delta\mathfrak{L}_1 + \delta\mathfrak{L}_2 = \sum F_i\,\delta s_i\cos\sphericalangle(F_i, \delta s_i) = 0$$

suma întinzându-se la forțele ambelor puncte și pentru deplasările virtuale respective.

Observăm însă că în cazul când prin deplasările δs_1 și δs_2 distanța M_1M_2 dintre puncte rămâne *invariabilă* (cazul când punctele fac parte dintr'un *corp rigid*):

$$F_p \delta s_1 \cos \sphericalangle (F_p, \delta s_1) + F'_p \delta s_2 \cos \sphericalangle (F'_p, \delta s_2) = 0$$

deoarece în acest caz proecțiile deplasărilor pe direcția M_1M_2 trebue să fie egale și de semne contrare.

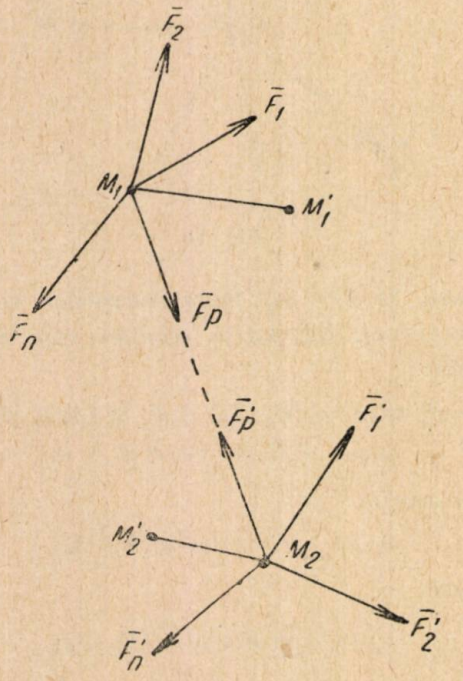


Fig. 11

Mai general, putem lua în considerare *un sistem oarecare de corpuri supus la un sistem de forțe oarecari în echilibru.*

Putem descompune aceste corpuri într'un număr mare de puncte materiale în echilibru, cărora să le dăm diferite deplasări virtuale și să le aplicăm relația (5).

Prin adunarea acestor relații obținem relația generală:

$$\delta \mathfrak{L} = \sum F_i \delta s_i \cos \sphericalangle (F_i, \delta s_i) = 0 \qquad (6)$$

adică *pentru un sistem de corpuri în echilibru suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor care își fac echilibru pentru orice fel de deplasări virtuale este egală cu zero.*

Acesta este *principiul deplasărilor virtuale.*

Și acum să analizăm forțele care își fac *echilibru*; acestea sunt *forțele exterioare date, forțele exterioare de legătură* (inclusiv *frecările*) și *forțele interioare.*

In cazul corpurilor *rigide*, am văzut că *forțele interioare nu intervin*; rămân deci forțele exterioare date care sunt *cunoscute* și forțele exterioare de legătură pe care *nu le cunoaștem.*

Dacă ceeace ne interesează în problemă sunt *condițiile de echilibru* sau *pozițiile de echilibru*, interesul nostru ar fi să găsim dintr'odată aceste condiții sau poziții. Aceasta este posibil numai în cazul când *nu avem frecări* și dacă dăm sistemului deplasări astfel încât toate legăturile sistemului cu exteriorul să se păstreze.

In adevăr în acest caz lucrul mecanic al forțelor de legătură necunoscute este nul și deci în (6) *singurele forțe care intervin sunt forțele exterioare date.*

Sunt tocmai cazurile studiate de *Stevin, Galileu*, precum și cele date în introducerea făcută.

Deplasările virtuale în care *toate legăturile* sistemului cu exteriorul *sunt păstrate* se numesc *deplasări compatibile cu legăturile.*

Dacă *sunt frecări*, chiar dând deplasări compatibile cu legăturile, forțele exterioare de legătură totuși *intervin*, nu direct, deoarece ele dau lucru mecanic nul, ci prin forțele de frecare care depind de forțele de legătură.

In cazul când ne interesează o anumită forță de legătură, considerăm că această legătură dispare și dăm sistemului deplasări compatibile cu mișcarea lui în urma lipsei legăturii considerate; în acest mod putem adesea determina forța de legătură dintr'o singură ecuație.

Să exemplificăm cele de mai sus prin studiul concret a câtorva cazuri simple.

Astfel în cazul mașinii simple dată de figura 12, forțele care își fac echilibru sunt forțele exterioare date și anume greutățile P, G și Q precum și forțele exterioare de legătură X, Y, X_1, Y_1 și N.

Presupunând frecările neglijabile și dând sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, singurele forțe care vor interveni în expresia (6) $\delta \mathfrak{L} = 0$ vor fi numai forțele exterioare date P, G și Q.

Dând forței P o deplasare virtuală δh în jos, roțile O_1 se vor roti cu unghiul $\delta\theta = \frac{\delta h}{r}$, greutatea G va coborî pe planul înclinat cu $\delta h_1 = R\,\delta\theta = \frac{R}{r}\,\delta h$, roțile O_1 se vor roti cu unghiul $\delta\theta_1 = \frac{\delta h_1}{r_1} = \frac{R}{rr_1}\,\delta h$, iar greutatea Q se va ridica cu distanța

$$\delta h_2 = R_1 \delta\theta_1 = \frac{RR_1}{rr_1}\,\delta h.$$

Aplicând principiul deplasărilor virtuale prin expresia (6):

$$\delta \mathfrak{L} = P\,\delta h + G \sin\alpha\, \delta h_1 - Q\,\delta h_2 = 0.$$

Sau:

$$P\,\delta h + G\sin\alpha\,\frac{R}{r}\,\delta h - Q\,\frac{RR_1}{rr_1}\,\delta h = 0 \qquad (7)$$

De unde:

$$P = \left(Q\,\frac{R_1}{r_1} - G\sin\alpha\right)\frac{R}{r}$$

adică condiţia de echilibru căutată.

Să căutăm să rezolvăm această problemă ţinând seama şi de frecarea de alunecare a corpului, de greutate G pe planul înclinat (coeficientul de frecare de alunecare este μ).

Expresia (7) ne dă în acest caz:

$$P = P_{\min} = \left(Q\,\frac{R_1}{r_1} - G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha\right)\frac{R}{r}$$

Pentru echilibru:

$$\left(Q\,\frac{R_1}{r_1} - G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha\right)\frac{R}{r} \leqslant P \leqslant$$

$$\leqslant \left(Q\,\frac{R_1}{r_1} - G\sin\alpha + \mu G\cos\alpha\right)\frac{R}{r}\,.$$

Să luăm acum în studiu o problemă în care se cere poziţia de echilibru al unui sistem.

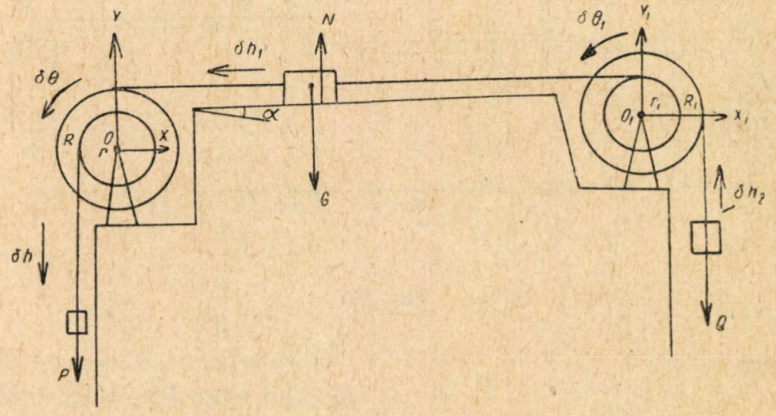


Fig. 12

In acest caz, echilibrul maşinii subsistă atâta timp cât forţa P este cuprinsă între o valoare maximă $P_{\max}$ când sistemul este gata să se pună în mişcare prin coborîrea lui P şi ridicarea lui Q şi o valoare minimă $P_{\min}$ când sistemul este gata să se pună în mişcare în sens invers prin ridicarea lui P şi coborîrea lui Q.

Când P atinge valoarea maximă $P_{\max}$, frecarea F dintre corp şi plan este îndreptată în susul planului înclinat, are valoarea $F = \mu N = \mu G\cos\alpha$ şi pentru deplasarea virtuală δh_1 produce lucrul mecanic virtual

$$-F\,\delta h_1 = -\mu G\cos\alpha\,\frac{R}{r}\,\delta h.$$

Introducând şi acest lucru mecanic în expresia (7) obţinem:

$$P = P_{\max} = \left(Q\,\frac{R_1}{r_1} - G\sin\alpha + \mu G\cos\alpha\right)\frac{R}{r}\,.$$

In cazul valorii minime a lui P, forţa de frecare F are sensul în josul planului înclinat şi pentru deplasarea virtuală δh_1 produce lucrul mecanic virtual:

$$F\,\delta h_1 = \mu G\cos\alpha\,\frac{R}{r}\,\delta h$$

Să considerăm o bară AB de lungime $2l$ şi greutate P articulată în A şi prinsă cu un fir BCD care după ce trece prin inelul C situat pe verticala lui A ($AB = AC$) prinde o greutate Q. Se cere unghiul α pentru echilibru (Buchholtz) fig. 13.

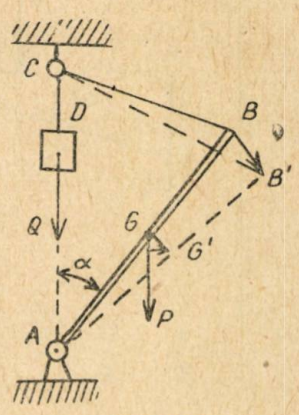


Fig. 13

Sistemul dat fiind fără frecări, singurele forţe care vor interveni în suma lucrurilor mecanice pentru o deplasare compatibilă cu legăturile sunt forţele exterioare date P şi Q.

Să presupunem că rotim bara AB cu un unghi $\delta\varphi$ în jurul lui A. Punctul G se deplasează în G' cu distanţa $GG' = l\,\delta\varphi$, iar B în B' cu distanţa $BB' = 2l\,\delta\varphi$.

Lucrul mecanic virtual al forței P este

$$P \cdot GG' \cdot \cos \sphericalangle (P, GG') = Pl \sin \alpha \, \delta\varphi.$$

Pentru a calcula lucrul mecanic al forței Q observăm că această forță se ridică cu diferența dintre lungimile CB' și CB care este:

$$\delta h = CB' - CB \cong$$

$$BB' \cdot \cos \sphericalangle (BB', CB) = 2l \cos \frac{\alpha}{2} \delta\varphi.$$

Forțele ce acționează aceste grinzi sunt cele două greutăți de 100 t și 20 t. Se cer reacțiunile în A, B, C și D.

Să calculăm reacțiunea din A; suprimăm reazemul A și dăm apoi o deplasare virtuală compatibilă cu restul legăturilor și anume ABC se poate roti în jurul lui B cu un unghiu $\delta\theta$, CD în jurul lui D cu un unghiu $\delta\theta_1$ punctul C rămânând comun ambelor grinzi (fig. 15).

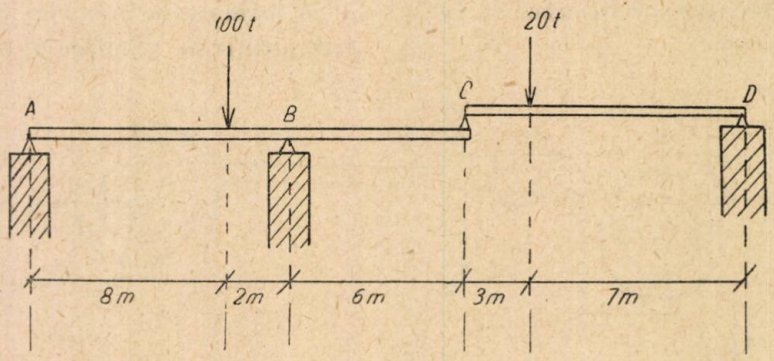


Fig. 14

Lucrul mecanic al forței Q este:

$$-Q \, \delta h = -2Ql \cos \frac{\alpha}{2} \delta\varphi.$$

Aplicând principiul deplasărilor virtuale avem:

$$Pl \sin \alpha \, \delta\varphi - 2Ql \cos \frac{\alpha}{2} \delta\varphi = 0$$

Forțele care intervin în expresia sumei lucrului mecanic sunt R_A, 100 t și 20 t și avem:

$$\delta\mathfrak{L} = -R_A \cdot AA' + 100 \, EE' - 20 \, FF' = 0$$

Dar:

$$AA' = AB \, \delta\theta = 10 \, \delta\theta; \quad EE' = EB \, \delta\theta = 2 \, \delta\theta;$$
$$FF' = F'D \, \delta\theta_1; \quad FF' = 7 \, \delta\theta_1.$$

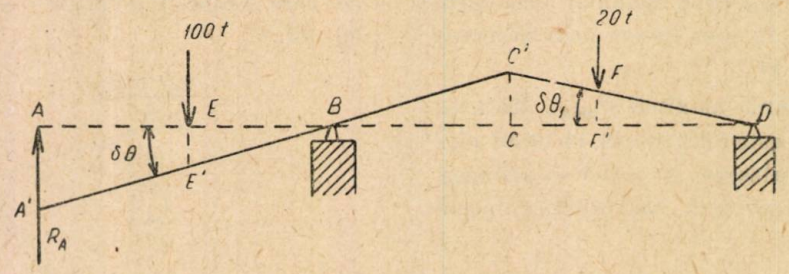


Fig. 15

De unde:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{P}$$

sau

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0, \quad \text{deci} \quad \alpha = 180°.$$

Să cercetăm și o problemă în care ceeace se cere nu sunt condițiile de echilibru sau pozițiile de echilibru, ci determinarea reacțiunilor.

Fie grinda orizontală CD rezemată în D pe un zid iar în C pe extremitatea unei alte grinzi ABC rezemate pe ziduri în A și B.

Dar:

$$CC' = BC \, \delta\theta = 6 \, \delta\theta = CD \, \delta\theta_1 = 10 \, \delta\theta_1.$$

Rezultă:

$$\delta\theta_1 = \frac{6}{10} \delta\theta = 0{,}6 \, \delta\theta.$$

Deci:

$$\delta\mathfrak{L} = -10 \, R_A \, \delta\theta + 200 \, \delta\theta - 84 \, \delta\theta = 0.$$

Rezultă: $$R_A = \frac{116}{10} = 11{,}6 \text{ tone}.$$

Pentru determinarea reacțiunii R_P din B, suprimăm reazemul B și dăm deplasarea compatibilă cu restul legăturilor arătată de fig. 16.

Forţele ce dau lucrul mecanic virtual sunt R_B, 100 t şi 20 t şi anume:

$$\delta \mathfrak{L} = +100 \cdot 8\, \delta\theta - 10\, R_B\, \delta\theta + 20 \cdot 7\, \delta\theta_1 = 0$$

Dar:

$$CC' = 16\, \delta\theta = 10\, \delta\theta_1$$

de unde:

$$\delta\theta_1 = 1{,}6\, \delta\theta.$$

Şi deci:

$$\delta \mathfrak{L} = 800\, \delta\theta - 10\, R_B\, \delta\theta + 224\, \delta\theta = 0$$

Rezultă:

$$R_B = \frac{1024}{10} = 102{,}4 \text{ tone.}$$

Să calculăm acum reacţiunea din C; vom înlătura reazemul C, grinda ABC rămâne pe loc şi numai grinda CD se poate roti în jurul lui D. Forţele ce intervin în expresia sumei lucrurilor mecanice sunt numai R_C şi 20 t (fig. 17). (In calculele precedente pentru R_A şi R_B nu a intervenit R_C întrucât în aceste cazuri R_C era forţă interioară şi lucrul său mecanic total era nul).

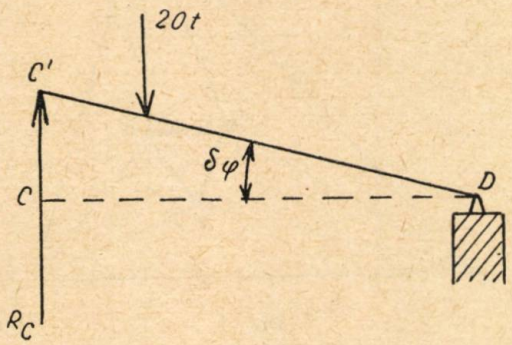


Fig. 17

Avem:

$$\delta \mathfrak{L} = +10\, R_C\, \delta\varphi - 20 \cdot 7\, \delta\varphi = 0,$$

deci $$R_C = 14 \text{ tone}$$

Insfârşit pentru R_D, se suprimă reazemul D, grinda ABC rămâne pe loc iar CD se poate roti în jurul lui C cu un unghiu $\delta\alpha$ (fig. 18). Forţele ce dau lucrul mecanic sunt R_D şi 20 t.

$$\delta \mathfrak{L} = -20 \cdot 3\, \delta\alpha + 10\, R_D\, \delta\alpha = 0$$

Rezultă

$$R_D = 6 \text{ tone}$$

Ca verificare observăm că:

$$R_A + R_B + R_C = 11{,}6 + 102{,}4 + 6{,}0 =$$
$$= 100 + 20 = 120 \text{ t}.$$

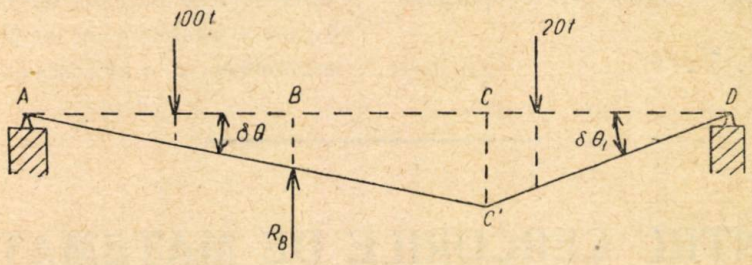


Fig. 16

Incheiem această expunere elementară a principiului deplasărilor virtuale aplicate în Statică cu o experienţă deosebit de interesantă ce poate fi explicată cu ajutorul acestui principiu.

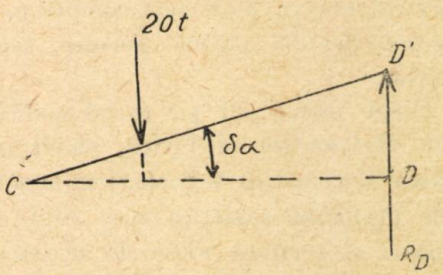


Fig. 18

Să presupunem un mecanism foarte complicat pe care nu-l cunoaştem, închis într'o cutie M (fără frecări).

Singurele elemente ce ies afară din cutie sunt pârghia AB care pune în mişcare mecanismul prin aplicarea unei forţe P şi pârghia CD care transmite o forţă Q rezistentă.

Prin experienţă directă putem măsura deplasarea DD' a forţei Q pentru o anumită deplasare mică AA' a forţei P.

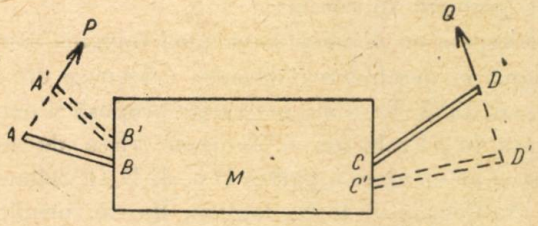


Fig. 19

Prin aplicarea principiului deplasărilor virtuale trebue să avem în cazul echilibrului:

$$\delta \mathfrak{L} = P \cdot AA' - Q \cdot DD' = 0 \quad \text{sau} \quad P = Q\, \frac{DD'}{AA'}$$

ceeace reprezintă *condiţia de echilibru* între forţele

motoare P și forța rezistentă Q (pentru deplasările mici AA' și DD' forțele P și Q s'au presupus constante și îndreptate chiar în lungul deplasărilor). Partea interesantă constă în faptul posibilității de a găsi condiția de echilibru fără a cunoaște sistemul ce leagă pârghia AB de pârghia CD.

* * *

La sfârșitul acestei expuneri, menționăm că subiectul propus este departe de a fi epuizat, am putea spune cel mult că a fost introdus elementar și numai pentru o parte din Mecanică, pentru Statică. In cazul când cititorii R M F. se vor arăta interesați de această metodă de lucru pentru rezolvarea problemelor de Mecanică, vom continua expunerea cu o altă ocazie.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

In noul an școlar își vor reîncepe activitatea și cercurile de matematici. Elevii membri ai acestor cercuri vor trebui să ridice munca la un nivel mai ridicat atât din punct de vedere organizatoric, cât mai ales în ceeace privește conținutul activității fiecărui cerc. S'au creat condiții ca cercurile de matematici să obțină succese serioase în munca lor.

Pe lângă materialul pe care-l publică lunar Revista Matematică și Fizică, elevii trebue să folosească Matematica v Școle și minunatele culegeri de probleme sovietice cum sunt de pildă: «Probleme și teoreme alese de matematici elementare» partea I-a (Aritmetica și Algebra) și partea II-a (Geometria plană) de D. O. Scliarschi; N. N. Centov și alții, ca și «Convorbirile matematice» de E. B. Dânchin și V. A. Uspenschi. Elevii au la îndemâna lor și încă multe alte colecții sovietice care constitue un izvor nesecat de cunoștințe noi.

Ne propunem să ajutăm aceste cercuri prin publicarea periodică a unor materiale extrase din aceste culegeri. Ele vor da posibilitate tinerilor să se orienteze în rezolvarea unor probleme mai grele. Elevii vor învăța noi metode de demonstrare a unor teoreme și vor avea la dispoziție material pe care-l pot prelucra în cercuri.

Incepem cu demonstrarea unei teoreme care s'a propus la deschiderea cercului orășenesc din Cluj în anul 1952. Teorema se găsește propusă și demonstrată în «Probleme și Teoreme alese de matematici elementare», partea II-a, de D. O. Scliarschi, N. N. Centov și I. N. Iaglom. Ea are următorul conținut:

«Unghiurile unui triunghiu oarecare ABC sunt împărțite în câte trei părți egale prin dreptele AY, AZ; BZ, BX; CX, CY (fig. 1). Să se demonstreze că triunghiul XYZ este echilateral».

Dăm mai întâi o demonstrație geometrică. Insemnăm unghiurile triunghiului ABC prin 3α, 3β și 3γ (fig. 2); dat fiind că $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$, urmează că

$$\alpha + \beta + \gamma = 60°.$$

Să presupunem că T este punctul de intersecție al dreptelor AY și BX. Știind că AZ și BZ sunt bisectoarele triunghiului ATB, urmează că TZ este deasemenea o bisectoare a acestui triunghiu și că:

$$\sphericalangle ATZ = \sphericalangle ZTB = \frac{\sphericalangle ATB}{2} = \frac{180° - 2\alpha - 2\beta}{2} =$$

$$= \frac{60° + 2\gamma}{2} = 30° + \gamma.$$

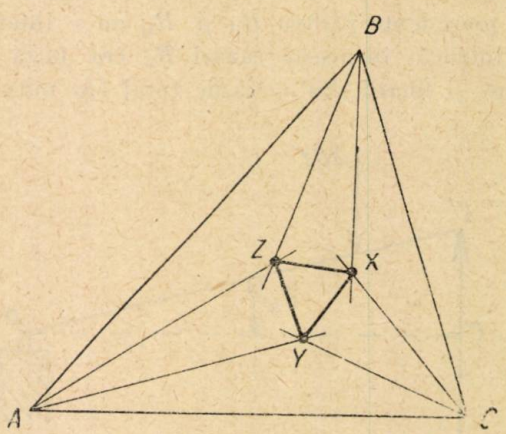


Fig. 1

Să construim un triunghi echilateral care are un vârf în punctul Z și celelalte două vârfuri pe dreptele AT și BT.

In acest scop ducem prin punctul Z două drepte înclinate cu 30° față de ZT. Să presupunem că U și V sunt punctele de intersecție ale acestor drepte cu segmentele AT și BT. Din egalitatea triunghiurilor TZU și TZV (care au unghiuri egale și o latură comună) urmează că $ZU = ZV$; prin urmare ZUV este un triunghi isoscel, care are un

unghiu egal cu 60°, deci el este un triunghi echilateral.

Să dovedim acum că triunghiul ZUV coincide cu triunghiul ZYX. In acest scop construim simetricele punctului Z față de dreptele AT și BT; obținem punctele P și Q, care pe baza egalităților

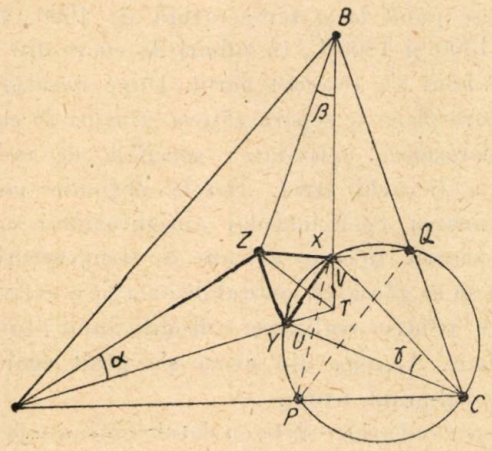


Fig. 2

$\sphericalangle ZAT = \sphericalangle CAT$ și $\sphericalangle ZBT = \sphericalangle CBT$, se află pe laturile AC și BC ale triunghiului ABC. Să calculăm unghiurile PUV și UVQ. Avem $\sphericalangle ZVU = 60°$, $\sphericalangle ZVB = 30° + (30° + \gamma) = 60° + \gamma$ (unghiul extern al triunghiului ZVT); $\sphericalangle QVB = \sphericalangle ZVB$; de aici urmează că

$$\sphericalangle QVU = 360° - 60° - 2(60° + \gamma) = 180° - 2\gamma$$

La fel se demonstrează că $\sphericalangle PUV = 180° - 2\gamma$.

Din faptul că $\sphericalangle PUV = \sphericalangle UVQ$ și $PU = ZU = ZV = QV$, urmează că patrulaterul $PUVQ$ este un trapez isoscel. Inscriem acest trapez într'un cerc. Dat fiind că unghiurile UPV și UVP se sprijină pe arce egale ale cercului (deoarece coardele UV și UP sunt egale: $UP = UZ = UV$), urmează că:

$$\sphericalangle UPV = \sphericalangle UVP = \frac{180° - \sphericalangle PUV}{2} = \frac{180° - (180° - 2\gamma)}{2} = \gamma$$

de unde urmează că $\sphericalangle PVQ = (180° - 2\gamma) - \gamma = 180° - 3\gamma$. Cunoscând că $\sphericalangle PCQ = 3\gamma$, urmează că cercul în care este înscris trapezul $PUVQ$ trece și prin punctul C. Din egalitatea arcelor PU, UV și VQ, deducem că $\sphericalangle PCU = \sphericalangle UCV = \sphericalangle VCQ = \gamma$, de unde urmează că triunghiul ZUV coincide cu triunghiul ZYX.

Și acum să demonstrăm aceeași teoremă folosind metode trigonometrice. Insemnăm din nou $\sphericalangle A = 3\alpha$, $\sphericalangle B = 3\beta$, $\sphericalangle C = 3\gamma$; $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $BZ = u$, $BX = \varrho$; iar diametrul cercului circumscris triunghiului ABC îl notăm cu d (vezi fig. 2). Pe baza teoremei sinusurilor avem:

$$a = d \sin A = d \sin 3\alpha, \quad b = d \sin 3\beta, \quad c = d \sin 3\gamma;$$

după aceeași teoremă aplicată triunghiului BXC rezultă că:

$$\varrho = \frac{a}{\sin(180° - \beta - \gamma)} \sin\gamma = \frac{d \sin 3\alpha}{\sin(120° + \alpha)} \sin\gamma = \frac{d \sin 3\alpha}{\sin(60° - \alpha)} \sin\gamma$$

(ultimul rezultat reiese din egalitățile evidente

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°, \quad \alpha + \beta + \gamma = 60°, \quad \beta + \gamma = 60° - \alpha.$$

E ușor de văzut că:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\alpha\right] =$$

$$= 4\sin\alpha(\sin^2 60° - \sin^2\alpha) =$$

$$4\sin\alpha(\sin 60° + \sin\alpha)(\sin 60° - \sin\alpha) =$$

$$= 4\sin\alpha \cdot 2\sin\frac{60° + \alpha}{2} \cdot \cos\frac{60° - \alpha}{2} \cdot 2\cos\frac{60° + \alpha}{2}$$

$$\sin\frac{60° - \alpha}{2} = 4\sin\alpha\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha).$$

Ținând seama de acestea, obținem:

$$\varrho = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin(60° + \alpha)$$

Analog se demonstrează că:

$$u = 4d\sin\alpha\sin\gamma\sin(60° + \gamma).$$

Aplicând teorema cosinusului, triunghiului BXZ, obținem:

$$\overline{XZ}^2 = u^2 + \varrho^2 - 2u\varrho\cos\beta = 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma \cdot$$
$$\cdot[\sin^2(60° + \alpha) + \sin^2(60° + \gamma) -$$
$$- 2\sin(60° + \alpha)\sin(60° + \gamma)\cos\beta].$$

Ținând seama de faptul că

$$(60° + \alpha) + (60° + \gamma) + \beta = 120° + \alpha + \beta + \gamma = 180°$$

rezultă că avem un triunghi cu unghiurile $60° + \alpha$, $60° + \gamma$ și β.

Dacă diametrul cercului circumscris a acestui triunghi este egal cu 1, atunci laturile sale sunt egale cu $\sin(60° + \alpha)$, $\sin(60° + \gamma)$, $\sin\beta$ și după teorema cosinusului obținem

$$\sin^2\beta = \sin^2(60° + \alpha) + \sin^2(60° + \gamma) -$$
$$- 2\sin(60° + \alpha)\sin(60° + \gamma)\cos\beta.$$

Folosindu-ne de această relație, găsim însfârșit următoarea expresie pentru lungimea laturii $\overline{XZ}$ a triunghiului XYZ:

$$\overline{XZ} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

La fel se demonstrează că $\overline{XY} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ și $\overline{YZ} = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; prin urmare $\overline{XY} = \overline{XZ} = \overline{YZ}$ ceeace trebuia demonstrat.

NOUTĂȚI ÎN ȘTIINȚA ȘI TEHNICA SOVIETICĂ

1. Utilizarea substanțelor artificiale radioactive la studiul proceselor ce se produc în metale și aliaje

Dacă unim între ele două bucăți de metal, de exemplu o bucată de argint și o bucată de plumb, vedem că atomii acestor metale vor trece treptat dintr'o bucată în alta. După un oarecare timp, ca o urmare a acestui fapt, în bucata de plumb vor apare atomi de argint, iar în bucata de argint — atomi de plumb. Difuziunea are loc și în cazul când ambele bucăți de metale sunt compuse din același fel de atomi, de exemplu de argint. In acest caz, atomii argintului trec dintr'o bucată în alta. Din această cauză în decursul timpului proprietățile fizice ale aliajelor se pot schimba. Un asemenea proces se caracterizează prin coeficientul difuziunii sau autodifuziunii, care arată dependența numărului de atomi difuzați față de temperatura și energia, necesară pentru trecerea atomilor. Acest coeficient este una din importantele caracteristici ale aliajelor.

In condițiuni obișnuite, difuziunea în corpurile metalice se produce extrem de lent și este însoțită de trecerea unui număr extrem de mic de atomi, din care cauză studierea ei este grea. Prin metodele obișnuite studiul autodifuziunii este imposibil, deoarece atomii aceluiași metal, care trec dintr'o bucată în alta, sunt absolut identici.

In studiul difuziunii în metale, o mare contribuție o aduc substanțele radioactive artificiale. Tot ele permit cercetarea autodifuziunii metalelor. Dacă într'o bucată de argint o cantitate oarecare de atomi este radioactivă, atunci acești atomi trecând în plumb sau într'o altă bucată de argint (care nu conține atomi radioactivi) vor transmite radioactivitatea. Determinând intensitatea acestei radioactivități, putem determina și cantitatea atomilor trecuți. Determinând intensitatea radierii bucății radioactive la diferite distanțe de suprafața de atingere cu argintul radioactiv, se poate afla coeficientul difuziunii sau autodifuziunii. Aparatele care înregistrează radiațiile radioactive pot înregistra cantitățile minime ale substanțelor radioactive. Datorită acestui fapt, metoda descrisă se bucură de o precizie extrem de mare.

Nu de mult, P. L. Gruzin a determinat coeficientul de autodifuziune a cobaltului cu ajutorul izotopului radioactiv artificial al cobaltului Co^{60}. Acest izotop descompunându-se, radiază electroni precum și raze gama cu o energie de 1,17 și 1,33 MeV. Cobaltul radioactiv se introduce într'o baie umplută cu sulfat de cobalt.

In această baie se introduc plăci din cobalt tehnic obișnuit, care prin metoda electrolizei se acoperă cu un strat de cobalt radioactiv de o grosime dela 1 până la 5μ. Pe urmă plăcile se încălzesc până la o temperatură de 1000, 1050, 1100, 1200 și 1300°C, în tuburi de cuarț din care în prealabil s'a evacuat aerul. După aceasta, de pe fiecare placă se separă câteva straturi de cobalt și se determină activitatea specifică de radiații gama a fiecărui strat. Datele obținute permit determinarea coeficientului autodifuziunii cobaltului pentru fiecare valoare a temperaturii și permit să se găsească gradul de energie a activației necesar pentru realizarea autodifuziunii atomilor de cobalt. Aceasta din urmă s'a găsit egală cu 62.000 cal-gram. atom.

Comparând aceste date cu datele obținute pentru diferitele aliaje în care baza o formează cobaltul, putem vedea influența atomilor altor elemente asupra stabilității legăturii între atomi din rețeaua cristalină a acestor aliaje. Deasemenea se pot obține date prețioase asupra legăturii autodifuziunii prin recristalizare și topire. Importanța acestor date se datorește faptului că cobaltul aparține grupului de metale feroase și are multe proprietăți comune cu fierul, materialul practic cel mai răspândit.

2. Noul tractor gazogenerator

Uzina de tractoare din Stalingrad și-a însușit din anul 1952 fabricarea unui tractor nou, GB-58, care funcționează cu ajutorul combustibilului gazogenerator.

Tractoarele gazogeneratoare fabricate anterior de uzinele de tractoare din Harkov și Celeabinsk, puteau funcționa numai cu bucăți de lemn. Tractorul GB-58 funcționează cu ajutorul lemnului de orice natură, precum și cu ajutorul brichetelor de lignit. Acest fapt extinde simțitor domeniul de utilizare a tractoarelor gazogeneratoare.

Noul tractor aparține tipului de tractoare agricole cu șenile și este destinat în primul rând culturii pământului (aratul, semănatul, grăpatul, etc.). Pe tractor este amenajat un motor în patru timpi cu gaze, în care combustibilul se aprinde cu ajutorul unei scântei electrice. Motorul cu gaze funcționează după același principiu ca și cel cu carburator, cu singura diferență că într'un motor cu carburator amestecul combustibil este format din aer și din combustibil lichid pulverizat, pe când în cel cu gaze, din aer și din gazul generator.

Puterea unui motor cu patru cilindri a tractorului GB-58, dacă funcţionează cu un carburant având umiditate normală, este de 50 CP. Durata funcţionării pentru o singură încărcătură este de 1—1,5 ore (când se folosesc bucăţele de lemn) şi 3 ore (când se folosesc bucăţi de lignit.) Tractorul GB-58 are pentru mersul înainte cinci viteze (dela 3,38 km/oră până la 7,43 km/oră) şi una pentru mersul îndărăt (2,26 km/oră). Forţele de tracţiune a tractorului în lucru pe miriște sunt următoarele: la prima transmisie 2810 kgf, la cea de a doua 2070 kgf, la a treia 1700 kgf, la a patra 1395 kgf şi la a cincea 900 kgf.

Punerea în funcţiune a tractorului se face cu ajutorul unui motor cu un cilindru în doi timpi, având o putere de 10 CP, care funcţionează cu benzină. Aprinderea gazogeneratorului şi punerea în funcţiune a motorului cu gaze durează doar 4—6 minute.

Lungimea tractorului este de 3,9 m, lăţimea de 1,87 m, înălţimea de 2,64 m. Distanţa între mijlocul şenilelor este de 1435 mm. La o greutate de 6 tone, tractorul exercită asupra solului o presiune de 0,47 kgf/cm^2.

Utilizarea tractoarelor şi automobilelor gazogeneratoare şi întrebuinţarea pentru punerea lor în funcţiune a combustibilului local, permite economisirea a mii de tone de combustibil lichid şi scuteşte transportul în plus a produselor petrolifere.

Din Fizica v Şcole Nr. 2/1953.

CHESTIUNI DE CONCURS

PROBLEME DATE LA ETAPA A II-a A CONCURSULUI DE MATEMATICI DIN 17 MAI 1953, IN REGIUNEA IAŞI

Clasa VIII-a

977. La o cantină mănâncă un număr de persoane adulte şi un număr dublu de copii. Adulţii primesc la masă $\frac{1}{5}$ de pâine iar copiii $\frac{1}{6}$ de pâine. S'a distribuit întâi un număr de pâini persoanelor adulte şi a rămas un rest din o pâine. Acest rest s'a împărţit la un număr de copii şi a rămas $\frac{1}{15}$ dintr'o pâine. Apoi s'a distribuit celorlalţi copii un număr de pâini mai mare cu o unitate decât cel de mai înainte şi din aceste pâini n'a mai rămas nici un rest. Câţi adulţi şi câţi copii erau la masă şi câtă pâine li s'a dat?

* * *

978. Fie ABC un triunghiu oarecare şi xy o paralelă la BC care întâlneşte AB în D şi AC în E. Se cere să se demonstreze că:

1) mijloacele segmentelor BD, BE, CD, CE sunt colineare;

2) punctul A are aceeaşi putere faţă de cercurile ce au ca diametre segmentele CD şi BE;

3) dacă xy variază rămânând paralelă cu BC, cercurile dela punctul 2) se taie pe o dreaptă fixă.

Clasa IX-a

979. Intr'o păşune o capră este legată de un ţăruş, cu o funie lungă de l metri. Presupunând că ea îşi găseşte astfel hrana necesară pentru o zi, să se afle cât de lungă trebue să fie funia cu care e legată capra în ziua a doua, a treia,... a $n - a$. Se presupune că iarba păscută în zilele anterioare se reface în proporţii de a% pe m^2, în fiecare zi.

* * *

980. Fie A şi B două puncte fixe prin care trec dreptele variabile AX şi BY paralele între ele. Pe AX se ia un punct C şi pe BY unul D, astfel ca aria trapezului $ABCD$ să rămână constantă.

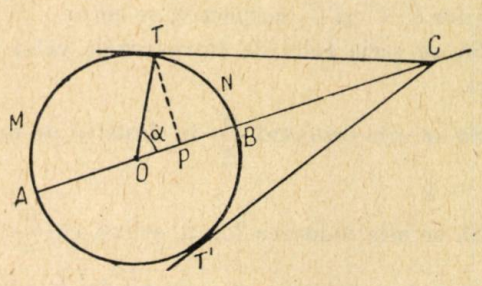
Să se demonstreze că:

1) Triunghiurile ce au baza situată pe AB şi egală cu jumătatea acestui segment şi vârfurile în mijlocul segmentului CD, sunt echivalente.

2) Mijlocul lui CD descrie o linie dreaptă a cărei poziţie să se determine.

Clasa X-a

981. Se dă un cerc cu centrul O şi raza R. Dintr'un punct variabil C de pe prelungirea diametrului



AB se duc tangentele CT şi CT' la cerc. Figura astfel formată se roteşte în jurul diametrului AB.

1. Să se determine unghiul $TOB = \alpha$, astfel ca suma volumelor născute prin rotirea segmentelor de cerc AMT și TNB să fie egală cu o fracție k din volumul sferei.

2. Să se afle maximul și minimul lui k.

3. Să se calculeze efectiv α pentru $k = \frac{5}{8}$.

4. Să se calculeze BP, astfel ca suma acelorași volume să fie de n ori volumul solidului născut prin rotirea triunghiului ATB (în jurul lui AB).

5. Intervalul de variație al lui n.

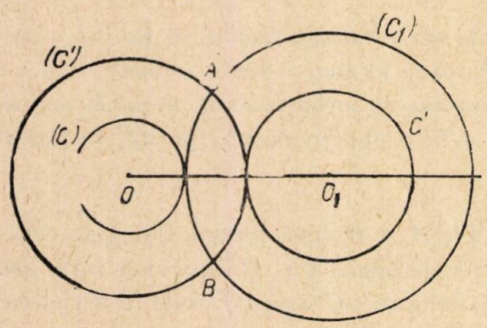
* * *

982. Soarele răsare la Iași cu 44 minute și 52 secunde mai târziu decât la Taganrog. Știind că ambele orașe au latitudinea 47°11′, să se afle distanța între ele.

983. Un schimbător de viteze este format din:

a) două roți C și C' de raze R și R' respectiv, cu centrul comun O;

b) două roți C_1 și C_1' de raze R_1 și R_1' cu centrul comun O_1.



Roțile C_1 și C_1' se rotesc solidar în jurul centrului O_1, pe când roțile C și C' se pot mișca independent una de alta. Cercurile C_1 și C' sunt ortogonale. Roțile C' și C_1' sunt tangente între ele; deasemenea roțile C și C_1. Rotația unei roți antrenează prin frecare fără alunecare rotația roții tangente ei, așa fel încât lungimile arcelor care vin în contact să fie egale. Notând:

a) $\overline{OO_1} = a$

b) w, w', w_1 vitezele unghiulare de rotație ale roților C, C' și C_1 respectiv, se cere:

1) Să se scrie relațiile între razele celor patru cercuri.

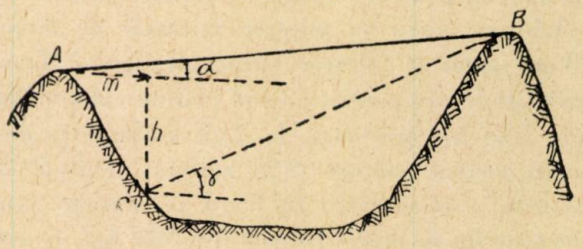
2) Să se afle raportul $\frac{w'}{w}$ în funcție de unghiul $AOO_1 = \varphi$

3) Să se afle valoarea lui φ, știind că $\frac{w'}{w} = k$.

4) Care sunt valorile extreme ale lui k și valorile corespunzătoare pentru φ, R, R', R_1 și R_1'?

* * *

984. Pentru a se instala un funicular între punctele A și B de pe crestetele unor munți, este nevoie să se cunoască distanța AB (lungimea cablului).



In acest scop topograful măsoară unghiul α al razei AB cu orizontul, în A apoi coboară în punctul C, în planul vertical prin AB și măsoară (cu ajutorul mirei și lanțului) diferența de cotă h și distanța orizontală m; însfârșit măsoară unghiul γ al razei CB cu orizontul. Cum se va calcula cu aceste date distanța AB? (Formula se va face calculabilă prin logaritmi).

ANUL I ȘCOLI PEDAGOGICE

985. Două localități A și B sunt depărtate de o cale ferată rectilinie cu 15,5 km respectiv 24,5 km., iar distanța între localități este de 41 km. La calea ferată se află gara G egal depărtată de cele două localități A și B.

1) La ce depărtare de gara G trebue construită pe calea ferată stația S de alimentare cu petrol a celor două localități, pentruca lungimea totală a celor două conducte ce pleacă dela stația S până la localitățile A și B să fie cea mai mică posibil?

2) Știind că din gara G se trimite la ora $6\frac{1}{2}$ o cisternă cu petrol cu viteza de 45 km pe oră și că pentru descărcarea petrolului în stația S sunt necesare 45 minute iar debitul conductelor este de 2,5 m pe secundă, se întreabă la ce oră va ajunge petrolul în localitățile A și B.

* * *

986. La o gară trebue să se construiască un semnal de oprire care să dea posibilitatea trenurilor ce frânează în dreptul lui, să se oprească la cel puțin 100 metri depărtare de gară.

Știind că viteza trenurilor pe acea linie este de 72 km pe oră și că după frânare trenul mai înaintează cu o mișcare întârziată cu accelerația de 1 m/s², se cere a se afla la ce distanță de gară trebue construit semnalul de oprire.

ANUL II ȘCOLI PEDAGOGICE

987. Pe un rulou de 5 cm diametru e înfășurat strâns un film de cinematograf. Grosimea peliculei e de 0,2 mm iar grosimea totală a filmului e de

25 cm. Se cere lungimea filmului și durata proiectării, știind că lungimea unei imagini este de 18 mm și proiectarea se face cu o iuțeală de 24 imagini pe secundă.

Filmul, desfășurat în cursul proiectării, se înfășoară pe un alt rulou de 8 cm diametru. Se cere grosimea filmului înfășurat pe acest rulou după 20 de minute de proiectare. Se presupune că fiecare spiră formează un cerc.

* * *

988. Un călător pleacă din localitatea A către localitatea B cu o viteză de 4 km pe oră. După ce a parcurs $1\frac{2}{3}$ km, el este întâlnit de o căruță, care pleacă din A cu un sfert de oră mai târziu; după ce călătorul a mai parcurs 13 km, el este întâlnit a doua oară de aceeași căruță, care se întoarce din localitatea B, unde a stat o jumătate de oră. Ce distanță este între localitățile A și B?

ANUL III ȘCOLI PEDAGOGICE

989. Prin comasarea terenurilor aparținând la trei comune învecinate A, B, C s'a format o gospodărie agricolă de stat de 586 ha.

Știind că înainte de comasare suprafețele cultivabile din cele trei comune erau egale, și că prin comasarea terenurilor, desființându-se haturile și transformându-se unele terenuri neproductive în terenuri cultivabile, s'a redat agriculturii:

In comuna A, $\frac{1}{25}$ din suprafața întregului teren

In comuna B, $\frac{5}{41}$ din suprafața întregului teren

In comuna C, $\frac{3}{43}$ din suprafața întregului teren

Se întreabă:

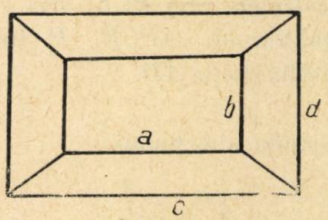
1. Câte ha s'au redat agriculturii prin înființarea gospodăriei de stat?

2. Cu cât la sută s'a mărit terenul cultivabil?

3. Gospodăria de stat semănând grâul în rânduri încrucișate după metoda colhoznicilor sovietici, producția a crescut cu 250%, obținându-se o recoltă anuală de 205,1 tone. Se întreabă care a fost producția la ha înainte de înființarea gospodăriei de stat.

* * *

990. O grămadă de nisip are forma din figură; bazele sunt dreptunghiuri de dimensiuni a, b și c, d, iar înălțimea h.



1. Ce eroare absolută se face dacă se calculează volumul grămezii cu formula (uzuală):

$$V = \frac{h}{4}(a + c)(b + d)?$$

2. Admițând că cele două dreptunghiuri de bază sunt asemenea în raportul $k < 1$, să se arate că eroarea relativă este cuprinsă între

$$\frac{1}{4}(1 - k)^3 \quad \text{și} \quad \frac{1}{4}(1 - k)^2.$$

PROBLEMELE DATE LA ETAPA II-a A CONCURSULUI DE MATEMATICI DIN 17 MAI 1953, IN REGIUNEA TIMIȘOARA

Clasa VIII-a

991. O ecuație de gradul al doilea are rădăcinile:

$$x_1 = \frac{m + 1}{2m + 3 + \sqrt{3m^2 + 10m + 8}}$$

$$x_2 = \frac{2m + 3 + \sqrt{3m^2 + 10m + 8}}{m + 1}$$

Se cere:

a) Să se formeze această ecuație.

b) Să se determine parametrul m astfel ca între rădăcinile ecuației să existe relația:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{17}{4}.$$

c) Să se cerceteze și să se explice particularitățile ecuațiilor obținute, înlocuind pe m cu valorile aflate la punctul *b)*. Să se reprezinte grafic trinoamele care formează cele două ecuații, arătându-se și aici particularitățile.

* * *

992. Intr'un triunghiu ABC având toate unghiurile ascuțite, iar înălțimea AD egală cu baza BC, se construește pe CD ca latură patratul $CDEF$ în spre interiorul triunghiului. Să se arate că:

a) Dreptele AC și BF sunt perpendiculare.

b) Triunghiurile AMF și EMC, unde M este punctul comun dreptelor EF și AC, sunt echivalente.

c) Să se stabilească relația:

$$\overline{AF}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CF}^2.$$

Clasa IX-a

993. Se consideră patratul $ABCD$ cu latura de lungime a, pe AB ca latură se construește triunghiul echilateral ABE, E fiind în exteriorul patratului și triunghiul echilateral ABF, F fiind în interiorul patratului.

a) Notând unghiul $BCE = \alpha$ și unghiul $BCF = \beta$, se cere să se calculeze $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ și să se arate că unghiul $FCD = \alpha$ și unghiul $DCE = \beta$.

b) Să se calculeze aria BCE, aria FCE și perimetrul patrulaterului $APCE$, P fiind punctul în care CF întâlnește pe AD.

* * *

994. Rădăcinile sistemului:

$$4^x = 32^{\frac{y}{7}-9}$$

$$7^{y+3-x} = \sqrt{49^{3(2x+1)}}$$

sunt valorile, în grade, a două arce $x = \widehat{AM}$ și $y = \widehat{AN}$ luate pe cercul trigonometric, dela originea A.

Din M și N se duc perpendiculare pe diametrul ce trece prin A și se prelungesc până ce întâlnesc cercul respectiv în Q și P. Se cere:

a) Perimetrul, mărimea diagonalelor și suprafața patrulaterului $MNPQ$.

b) Raportul dintre aria patrulaterului $MNPQ$ și a patrulaterului format unind mijloacele laturilor sale.

Clasa X-a

995. Pe ipotenuza unui triunghiu dreptunghic isoscel, în care $AB = AC = m$, luăm punctele D și E astfel ca $\sphericalangle BAE = 2 \sphericalangle BAD$ și notăm $\overline{BD} = x$; $\overline{DE} = y$ și $\sphericalangle BAD = \alpha$.

a) Să se arate că

$$x^3 + \left(y - m\sqrt{2}\right) x^2 + m^2 (x - y) = 0$$

b) Să se stabilească identitatea

$$x^2 (1 + \operatorname{cotg}\alpha) + y^2 (1 + \operatorname{cotg}\alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) + \\ + \left(m\sqrt{2} - x - y\right)^2 (1 + \operatorname{tg} 2\alpha) = 2m^2$$

folosind ariile triunghiurilor BAD, DAE și EAC.

c) Să se calculeze volumele corpurilor care iau naștere prin rotirea triunghiurilor BAD, DAE și AEC în jurul catetei AC.

* * *

996. Se dă ecuația

$$mx^2 - 2(m + 1)x + 8 = 0$$

unde m este un parametru variabil și se notează cu x_1 și x_2 rădăcinile ei.

a) Să se găsească valorile lui m pentru care

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} > x_1 + x_2$$

b) Să se găsească valorile lui m pentru care fiecare din rădăcinile ecuației este mai mare ca 1.

c) Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sunt

$$y_1 = \frac{2x_1 + 1}{x_1 + 2} \quad \text{și} \quad y_2 = \frac{2x_2 + 1}{x_2 + 2}.$$

Clasa XI-a

997. Intr'un cerc de rază R se duce diametrul AP, iar din A se duc coardele AB și AD, înclinate cu x grade față de diametru. Se ia pe cerc un punct C, astfel încât prelungirea lui CD să întâlnească prelungirea diametrului AP în N și să formeze un unghiu de y grade, x și y fiind soluțiile din primul cadran, ale sistemelor:

$$x + y = 75^\circ$$

$$2 \sin(x + 15^\circ) \sin y = 1$$

a) Să se arate că:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{PN}},$$

M fiind intersecția AP cu BC.

b) Să se calculeze lungimea segmentului PN.

c) Să se calculeze volumul corpului născut prin rotirea conturului $ABCN$ în jurul diametrului.

* * *

998. Se dau polinoamele.

$$P(x) = x^5 - 10x^4 + 33x^3 + mx^2 + nx + p$$

$$Q(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

Se cere:

a) Să se determine m, n, p, astfel încât $P(x)$ să se împartă exact cu $Q(x)$.

b) Dacă rădăcinile ecuației

$$f(x) = 0, \quad \text{unde} \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

sunt $\alpha_1 < \alpha_2$, să se calculeze: $\sqrt{\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 i}$, unde $i^2 = -1$.

c) Dacă rădăcinile ecuației $Q(x) = 0$, în ordine descrescătoare, sunt lungimea, lățimea și înălțimea unui paralelipiped drept, având bazele $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ și diagonala $BD_1 = \sqrt{17}$, să se afle mărimea diagonalelor bazei și suprafața patrulaterului BCD_1A_1.

Anul II Școli Pedagogice

999. Două brigăzi dela SMT Lugoj, având împreună 25 tractoriști, ară în 12 zile 2040 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 6 ha pe zi, iar din a doua 8 ha pe zi. Se cere:

a) Câți tractoriști sunt în fiecare brigadă?

b) Câtă economie au realizat cele două brigăzi, dacă prima economisește 2 litri combustibil la ha și a doua 1,5 litri la ha și dacă litrul de combustibil costă 2,20. lei?

1000. Intr'un punct T al unui cerc O se duce o tangentă. Două raze parpendiculare intersectează această tangentă în punctele A și B. Din punctele A și B se duc tangentele AC și BD la cerc. Să se arate că:

a) Punctele C și D sunt colineare cu centrul cercului O.

b) Tangentele AC și BD sunt paralele.

c) Să se calculeze aria $ABDC$ știind că raza cercului e de 3 cm și lungimea tangentei din B e de 4 cm.

Anul II Școli Pedagogice

1001. Intr'un depozit de vin se află două butoaie pline cu vin, unul având 30 litri și altul 45 litri, valoarea totală a vinului fiind 774 lei. Făcându-se o reducere de preț de 1/3 la vinul din primul butoi și de 3/14 la cel din al doilea, valoarea vinului este de 576 lei. După această reducere se face un amestec de 50 litri, care se vinde cu 384 lei. Se întreabă:

a) Cât a costat litrul, din fiecare fel de vin înainte și după reducere?

b) Cât costă litrul de amestec?

c) Ce cantitate de vin s'a luat pentru amestec din fiecare butoiu?

1002. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, sunt de 12 cm și de 6 cm, iar înălțimea lui 18 cm. Prin punctul de întâlnire al diagonalelor trunchiului se duce un plan paralel cu bazele, care împarte trunchiul în două părți. Se cere:

a) Volumul fiecărei din cele două părți?

b) Mărimea diagonalei trunchiului?

Anul III Școli Pedagogice

1003. Pentru confecționarea unor drapele sportive în vederea Festivalului, un atelier de croitorie primește 16 bucăți de pânză de aceeași lățime, având în total o lungime de 551,2 m, așa că fiecare din cele 4 bucăți de culoare verde sunt mai scurte cu câte 13,25 m și fiecare din cele 5 bucăți de culoare roșie sunt mai lungi cu câte 10,6 m decât cele 7 de culoare albastră. Se întreabă:

a) Cât de lungă e fiecare din cele 16 bucăți?

b) Câte drapele de aceeași lungime, cât mai mare posibilă, se pot face, fără ca vreunul să fie de culori diferite și câte sunt de aceeași culoare?

c) Cu cât trebue vândut un drapel, dacă metrul de pânză costă 4,65 lei, mâna de lucru 22% din valoarea pânzei, ața 0,30 lei pentru fiecare drapel iar diverse alte cheltuieli fac încă 104 lei.

1004. Locuitorii unui sat vreau să pietruiască un drum drept lung de 2136 m și lat de 4 m, răsfirând câte 600 kgr piatră pe fiecare ar. Știind că piatra e depozitată în grămezi conice cu generatoarea de 2,3 m și că lungimea cercului de bază e de 9,42 m și că 1 m^3 de piatră cântărește 2 tone, se întreabă:

a) Câte grămezi de piatră trebue să cumpere, dacă au hotărît să ia cu 5% mai mult?

b) In câte căruțe se poate transporta, dacă fiecare căruță poate duce 0,5 tone odată?

c) Cu câte zile se termină mai repede transportul, dacă în locul căruțelor, care fac 72 de transporturi pe zi, se angajează un tractor care face 10 transporturi pe zi și duce 6 tone odată.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 601

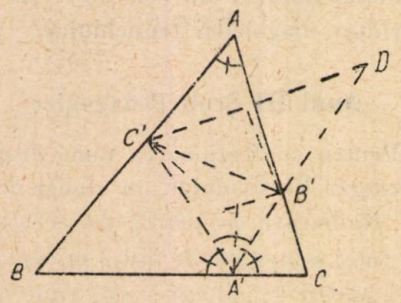
Fie $A'B'C'$ triunghiul ortic al triunghiului ABC. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând $\sphericalangle A$, latura $A'C' = l$ și suma $B'C' + A'B' = m$.

Florica Ionescu

Soluție. Avem $\sphericalangle A' = 180° - 2\sphericalangle A$, deci $\sphericalangle A'$ este cunoscut. Problema se reduce la construirea unui triunghi $A'B'C'$ în care se cunoaște $\sphericalangle A'$, $A'C' = l$ și $B'C' + A'B' = m$.

Dacă în triunghiul $A'B'C'$, presupus construit, prelungim $A'B'$ cu $B'D = B'C'$, obținem triun-

ghiul $C'A'D$, care se poate construi. Punctul B' va fi intersecția mediatoarei segmentului $C'D$ cu $A'D$. Intersecțiile perpendicularelor ridicate în A', B', C' pe bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului $A'B'C'$ sunt vârfurile triunghiului căutat ABC.



Problema este posibilă când $\sphericalangle A < 90°$ și $m > l$.

Problema 607

Să se determine suprafața fiecăruia din cele n *cercuri tangente consecutiv și înscrise într'un unghi* α, *știind că raza celui mai mic dintre cercuri este egală cu unitatea.*

B. Diubua

Soluție. Folosind principiile omotetiei se poate stabili ușor că între razele $R_1, R_2, \ldots, R_n$, ale celor n cercuri, există relațiile

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_1}{R_3} = \ldots = \frac{R_n}{R_{n-1}}$$

care ne arată că cele n raze sunt în progresie geometrică.

Pentru a răspunde problemei este suficient să calculăm R_2. Notând A, O_1, O_2 respectiv vârful unghiului și centrele primelor două cercuri, vom avea $AO_1 + O_1O_2 = AO_2$, sau

$$R_1 \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} + R_1 + R_2 = R_2 \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2},$$

de unde

$$R_2 = \frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \qquad (R_1 = 1)$$

Prin urmare, raza celui de al m-lea cerc $(m < n)$, va fi:

$$R_m = \left(\frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^{m-1};$$

iar aria sa

$$S_m = \pi \left(\frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^{2(m-1)}$$

S_m se mai poate scrie

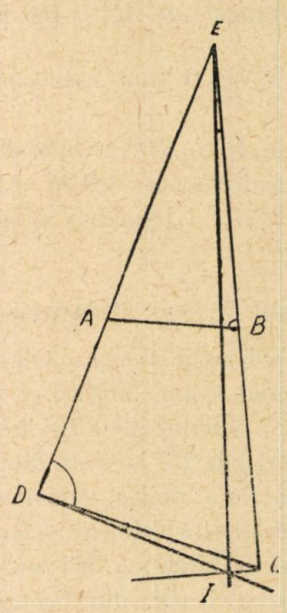
$$S_m = \pi \operatorname{tg}^4 (m-1) \left(45° + \frac{\alpha}{4} \right).$$

Problema 611

Se dă un patrulater inscriptibil $ABCD$ și se notează cu E punctul comun laturilor AD și BC. Perpendicularele în C și D respectiv pe CB și AD se taie în I. Să se arate că dreapta EI este perpendiculară pe AB.

Gh. D. Simionescu

Soluție. Patrulaterele $ABCD$ și $DECI$ fiind inscriptibile avem



$$\sphericalangle IEC = \sphericalangle IDC \text{ și } \sphericalangle ABE = \sphericalangle ADC.$$

Insă $\sphericalangle IDC + \sphericalangle ADC = 90°$,

deci $\sphericalangle IEC + \sphericalangle ABE = 90°$,

sau $EI \perp AB$

Problema 620

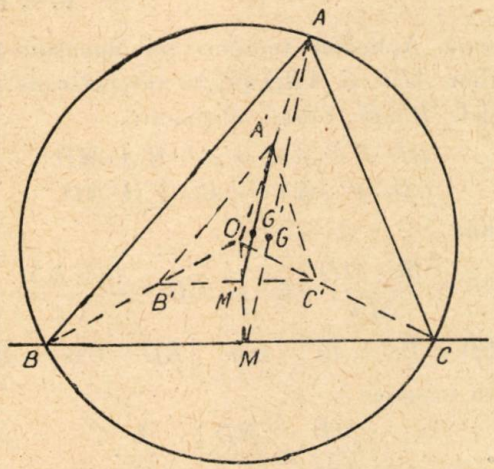
Să se construiască un triunghi, cunoscând vârful A, centrul său de greutate și centrul de greutate al triunghiului cu vârfurile în mijloacele distanțelor dintre vârfuri și centrul cercului circumscris.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, G' centrul de greutate al triunghiului

$A'B'C'$ obținut unind mijloacele razelor OA, OB, OC.

Se observă că M, mijlocul lui BC, se poate construi luând în prelungirea lui AG, $GM = \frac{1}{2} AG$.



Se mai observă deasemenea ușor că M' (OM; $B'C'$) este mijlocul lui OM și deci

$$A'M' \parallel AM \quad \text{și} \quad A'M' = \frac{1}{2} AM.$$

Prin urmare punctele A' și M' pot fi și ele construite, căci G' este cunoscut. Odată A' construit, vom putea construi punctul O, căci $AA' = A'O$.

Cercul O (OA) va tăia perpendiculara în M pe MO în punctele B și C.

Problema este întotdeauna posibilă.

Problema 682

Să se construiască un triunghi dreptunghic ABC când se cunoaște semiperimetrul p *și înălțimea dusă din unghiul drept,* h. *Discuție.*

Silișteanu A. Mihail

Soluție. Avem $2pr = ah$, de unde $a : r = 2p : h$. Vom construi deci un triunghi dreptunghic $AB'C'$ cunoscând a (luat după voie) și $r = \frac{h}{2p} a$. (Vezi soluția problemei 485 în R.M.F., 10/1952, pag. 250).

Această construcție fiind făcută, vom lua pe înălțimea triunghiului $AB'C'$ un segment egal cu h ($AD = h$) și prin D vom duce o paralelă la $B'C'$ ce taie AB', AC' respectiv în B și C.

Problema este posibilă (R.M.F. 10/1952, pag. 251) când

$$(\sqrt{2} - 1)\, a \geqslant 2r, \quad \text{sau}$$

$$(\sqrt{2} - 1)\, p \geqslant h.$$

Problema 683

Să se rezolve ecuația

$$\log_x 10 + 2 \log_{10x} 10 + 3 \log_{100x} 10 = 0$$

A. Murkluischi

Soluție. Se constată ușor că $\log_x 10 = \frac{1}{\log x}$,

$$\log_{10x} 10 = \frac{1}{1 + \log x}, \quad \log_{100x} 10 = \frac{1}{2 + \log x}$$

(Simbolul log indică logaritmii de bază 10).

Ecuația devine

$$\frac{1}{\log x} + \frac{2}{1 + \log x} + \frac{3}{2 + \log x} = 0, \quad \text{sau}$$

$$3 \log^2 x + 5 \log x + 1 = 0, \quad \text{de unde}$$

$$\log x_1 = \bar{1},76759; \quad \log x_2 = \bar{2},56574$$

$$x_1 = 0,58558 \quad \text{și} \quad x_2 = 0,03679$$

Problema 685

Zece becuri identice sunt legate în paralel într'o rețea sub o tensiune de 127 *volți. Să se afle intensitatea în circuitul principal dacă rezistența unei lămpi este de* 240 *ohmi.*

* * *

Soluție. Calculăm intensitatea curentului dintr'un singur bec, folosind formula lui Ohm pentru o porțiune de circuit:

$$I_1 = \frac{U}{R}$$

în care:

$$U = 127 \text{ volți}$$

$$R = 240 \text{ ohmi.}$$

Deci:

$$I_1 = \frac{127}{240} = 0,5292\ A.$$

După legea curenților derivați, intensitatea curentului din circuitul principal este egală cu suma intensităților curenților derivați. Cum în cazul de față toți curenții derivați au aceeași intensitate, intensitatea curentului principal este egală cu produsul dintre intensitatea dela un singur bec și numărul becurilor:

$$I = I_1 \times 10 = 0,5292\ A \times 10 = 5,3\ A.$$

Problema 690

Să se demonstreze că dacă $(p + 1)$ *este prim cu* 6, *atunci suma*

$$S = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+p)^2$$

este divizibilă cu (p + 1).

Gh. D. Simionescu

Soluție. Avem:

$$S = n^2 + n^2 + 2n + 1^2 + n^2 + 4n + 2^2 + \\ + \ldots + n^2 + 2pn + p^2 = (p+1)\,n^2 + \\ + 2n\,(1 + 2 + \ldots + p) + 1^2 + 2^2 + \ldots + p^2$$

$$S = (p+1)\,n^2 + np\,(p+1) + \frac{p\,(p+1)\,(2p+1)}{6}$$

$p + 1$ fiind prim cu 6, $p\,(2p + 1)$ se divide cu 6 (căci suma $1^2 + 2^2 + \ldots + p^2$ este un întreg), deci S se divide prin $(p + 1)$.

Problema 691

Să se determine o progresie aritmetică în care suma primilor m *termeni este* n, *iar suma următorilor* n *termeni este* m. *Caz particular*: m = 6, n = 10.

N. C. Ciomu

Soluție. Fie a și r respectiv primul termen și rația progresiei. Scriind că suma primilor m termeni este n și că suma tuturor termenilor este $m + n$ obținem sistemul

$$\frac{[2a + (m-1)\,r]\,m}{2} = n$$

$$2a + (m + n - 1)\,r = 2$$

Rezolvându-l (a se elimină imediat), găsim:

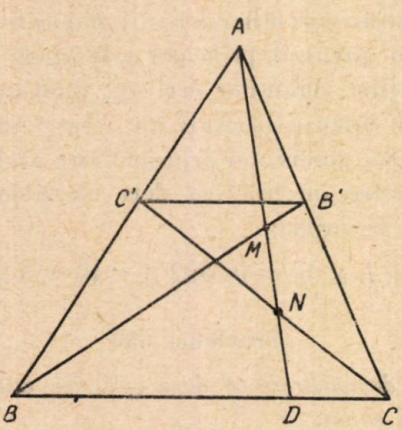
$$r = \frac{2\,(m-n)}{mn}; \quad a = \frac{n^2 + mn - m^2 + m - n}{mn}.$$

Caz particular: $r = -\frac{2}{15}$, $a = 2$, deci progresia este

$$2, \frac{28}{15}, \frac{26}{15}, \ldots$$

Problema 693

O paralelă la latura BC a unui triunghi ABC taie laturile AB, AC în C', B'. O dreaptă dusă prin



A întâlnește latura BC în D și dreptele BB', CC', în M, N. Valoarea rapoartelor egale $\frac{C'A}{C'B}$ *și* $\frac{B'A}{B'C}$ *fiind K să se arate că:*

$$\left|\frac{MD}{MA} \pm \frac{ND}{NA}\right| = \frac{1}{K},$$

după cum dreapta AD taie sau nu taie triunghiul ABC.

D. C. Panu

Soluție. Aplicând teorema lui Menelaus triunghiurilor ADC și ABD tăiate respectiv de transversalele BMB', CNC', obținem:

$$BD \cdot B'C \cdot AM = BC \cdot B'A \cdot MD$$
$$CD \cdot BC' \cdot AN = BC \cdot C'A \cdot ND,$$

de unde

$$BD = \frac{BC \cdot MD}{MA} \cdot K \quad \text{și} \quad CD = \frac{BC \cdot DN}{NA} \cdot K$$

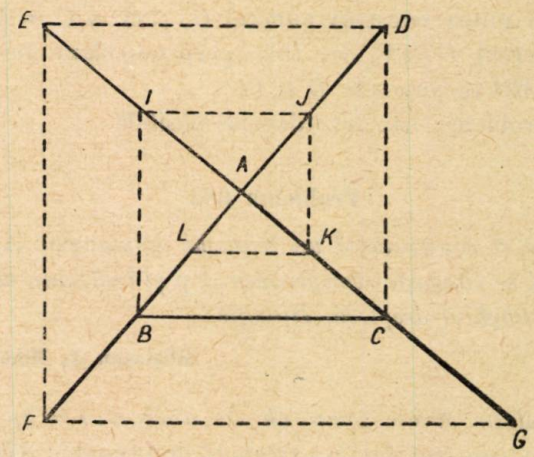
$$\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC} \quad \text{sau} \quad |\overline{BD} - \overline{CD}| = \overline{BC}.$$

Prin urmare:

$$\left|\frac{MD}{MA} \pm \frac{ND}{NA}\right| = \frac{1}{K}.$$

Problema 694

Se dă triunghiul dreptunghic ABC. Perpendiculara în C pe ipotenuza BC taie pe AB în D; perpendiculara în D pe CD taie pe AC în E; perpendiculara în E pe DE taie pe AB în F; iar perpendiculara în F pe EF taie pe AC în G.



Perpendiculara în B pe BC taie pe AC în I; perpendiculara în I pe BI taie pe AB în J; perpendiculara în J pe IJ taie pe AC în K; iar perpendiculara în K pe JK taie pe AB în L. Să se arate că: 1) Dreptele LC și BG sunt paralele 2) $\overline{BC}^2 = KL \cdot FG$ *și 3)* $\operatorname{tg}^5(ABC) = \operatorname{tg}(AGB)$.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Se observă ușor că

$$\frac{AC}{AG} = \frac{BC}{FG} = \frac{AB}{AF} = \frac{AI}{AE} = \frac{AJ}{AD} = \\ = \frac{AK}{AC} = \frac{LK}{BC} = \frac{AL}{AB}.$$

Din acest șir de rapoarte egale reținem proporțiile:

$$\frac{AC}{AG}=\frac{AL}{AB} \quad \text{și} \quad \frac{BC}{FG}=\frac{LK}{BC}.$$

Din prima rezultă $CL \parallel BG$, iar din cea de a doua: $BC^2 = LK \cdot FG$.

In triunghiurile dreptunghice BCD, CDE, DEF, EFG, avem

$$AD=\frac{AC^2}{AB}, \quad AE=\frac{AD^2}{AC}=\frac{AC^3}{AB^2},$$

$$AF=\frac{AE^2}{AD}=\frac{AC^4}{AB^3}, \quad AG=\frac{AF^2}{AE}=\frac{AC^5}{AB^4}.$$

Prin urmare:

$$\frac{AB}{AG}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^5 \quad \text{sau}$$

$$\operatorname{tg}(AGB)=\operatorname{tg}^5(ACB)$$

Problema 695

A, B, C, D fiind patru puncte așezate în ordinea dată pe o dreaptă, există relația:

$$\frac{1}{2}\sum AB\cdot AC\cdot BC = AC\cdot BD\cdot(AB+CD)$$

Onofraș Eugen

Soluție. Notăm $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$.
Cu aceste notații avem:

$$\frac{1}{2}\sum AB\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\,[ab(a+b)+$$

$$+c(a+b)(a+b+c)+a(a+b+c)(b+c)+$$

$$+bc(b+c)]=(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$\frac{1}{2}\sum AB\cdot AC\cdot BC = AC\cdot BD(AB+CD)$$

Relația rămâne valabilă oricare ar fi poziția celor patru puncte pe dreapta dată, dacă ținem seamă de sensul segmentelor.

Problema 696

Se dă un triunghi dreptunghic CAB și un punct D pe cateta AC ($b > c$). Să se construiască grafic triunghiurile care au ca înălțime cateta AC și ca mediană ipotenuza BC, ortocentrul D mișcându-se pe AC și prelungirea sa.

T. Verveagă
Bistrița

Soluție. Cunoscând mediana putem construi baricentrul G al triunghiului. Luând apoi pe DG, $GO=\frac{1}{2}DG$, găsim centrul cercului circumscris triunghiului căutat.

(Punctul O se mai putea obține luând intersecția lui DG cu perpendiculara în B pe AB). («Culegere de probleme de geometrie» pentru cl. VIII și IX, ex. 321).

Mai departe construcția este evidentă.

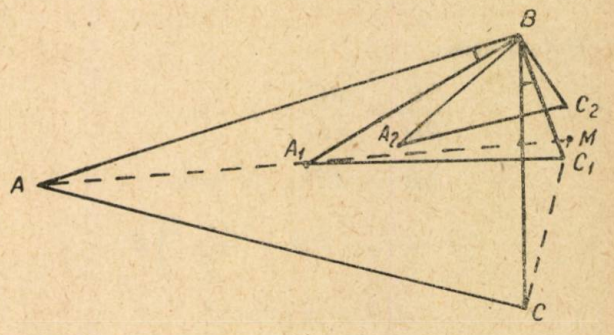
Problema 697

Trei triunghiuri isoscele asemenea ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, având respectiv $AB=AC$, $A_1B=A_1C_1$, $A_2B=A_2C_2$, au vârful B comun și o astfel de poziție încât vârfurile A_1, A_2, sunt situate în interiorul triunghiului ABC. 1°. Pentru care poziție a vârfurilor A_1A_2, cercurile circumscrise celor trei triunghiuri, sunt tangente interioare. 2°. Prelungirea lui AA_1 intersectând CC_1 în M, iar prelungirea lui AA_2 intersectând CC_2 în N, să se arate că:

$$\frac{MA}{MB+MC}=\frac{NA}{NB+NC}.$$

Matei I. Nazarie
Elev, Buc.

Soluție. 1°. Pentru ca cercurile circumscrise celor trei triunghiuri să fie tangente interioare este necesar ca centrele lor și punctul B să fie colineare.



Aceasta are loc când punctele A_1, A_2 se găsesc pe AB, triunghiurile fiind asemenea.

2°. Deoarece

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B}{BC_1} \quad \text{și} \quad \sphericalangle ABA_1 \sphericalangle CBC_1,$$

triunghiurile ABA_1 și BCC_1 sunt asemenea și deci $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BCM$. Prin urmare patrulaterul $BACM$ este inscriptibil și aplicând teorema lui Ptolomeu găsim:

$$MA \cdot BC = AB\,(BM + MC).$$

Analog obținem

$$NA \cdot BC = AB\,(BN + NC)$$

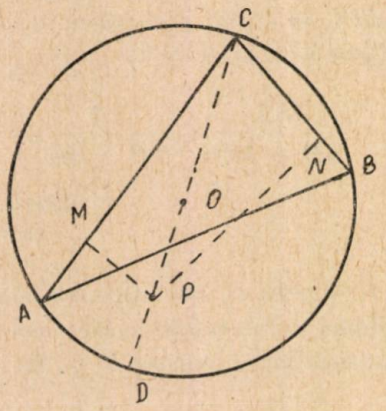
Prin împărțire găsim relația cerută.

Problema 699

Intr'un cerc O (R) e înscris triunghiul ABC, în care AB e fixă iar C descrie cercul. Se împart laturile AC și BC în p părți egale. Fie M și N punctele corespunzătoare primei diviziuni astfel ca $AM = \frac{AC}{p}$ și $BN = \frac{BC}{p}$. Din M și N se duc perpendiculare pe AC și BC respectiv, care se întâlnesc în P. Se cere locul lui P, când C descrie cercul.

N. Gaiu

Soluție. Ducem diametrul COD. Este evident că P se află pe CD.



Putem scrie

$$\frac{CD}{PD} = \frac{AC}{AM} = p. \quad \text{sau}$$

$$2R = pPD, \quad \text{de unde}$$

$$OP = R - PD = \left(\frac{p-2}{p}\right)R$$

$$OP = \text{constant}.$$

Deci P descrie cercul $O\left(\frac{p-2}{p},\ R\right)$.

Problema 701

Fie d_a, d_b, d_c distanțele centrului cercului circumscris unui triunghi oarecare ABC până la laturile triunghiului. Să se arate că avem:

$$d_a + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = d_b + \frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = d_c + \frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Simon Șt. Petre

Soluție. Ținând seamă că

$$d_a = R\cos A \quad , \quad a = 2R\sin A, \text{ avem:}$$

$$d_a + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = R\left(\cos A + \sin A\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) =$$

$$= R\,\frac{\cos\left(A - \frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}} = R.$$

Analog arătăm că

$$d_b + \frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = d_c + \frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = R.$$

Observare. Se știe că $d_a + d_b + d_c = R + r$. Din problemă rezultă că

$$d_a + d_b + d_c + \frac{1}{2}\sum a\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 3R,$$

deci

$$2R = \frac{1}{2}\sum a\operatorname{tg}\frac{A}{2} + (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

$$R = \frac{1}{4}b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) + \frac{1}{4}c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right).$$

Această relație ne dă:

$$\sin B\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) + \sin C\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 2$$

Prin permutări circulare se obțin încă două relații analoage.

Problema 707

Să se rezolve sistemul:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5}\ ;\quad \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5}\ ;\quad \frac{zx}{z+x} = \frac{36}{13}.$$

2. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = -3.$$

3. *Un triunghi dreptunghi are laturile în progresie aritmetică* a) *știind că ipotenuza are 10 metri să se calculeze catetele*, b) *Cele două cercuri având ca dia-*

metru catetele, se taie în D. Să se arate că D este piciorul înălțimii duse pe ipotenuză, c) *Să se calculeze volumul conului născut prin rotirea catetei mari AC, în jurul ipotenuzei,* d) *Se consideră cercul circumscris riunghiului ABC și se cere să se calculeze aria calotei sferice obținute prin rotirea arcului BMC corespunzător catetei mici.*

* * *

Soluție 1. Sistemul se poate scrie:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{5}{12}\,;\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}\,;\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{13}{36}\,.$$

Prin adunarea ecuațiilor obținem

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{19}{36}\,.$$

Din această ecuație scăzând pe fiecare din cele date obținem:

$$z=9,\quad y=6,\quad x=4.$$

2. Ecuația se poate scrie

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-$$
$$-\cos^2 x-\sin^2 x=-3,$$

sau
$$1-\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}-1=-3$$

sau $1+1-\cos^2 x=3\cos^2 x$, $\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

de unde

$$x_{1,2}=2K\pi\pm\frac{\pi}{4}\,;\quad x_{3,4}=2K\pi\pm\frac{3\pi}{4}\,,$$

sau
$$x=K\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

unde $K=(0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots)$.

3. Triunghiul având laturile în progresie aritmetică este asemenea cu triunghiul dreptunghic de laturi 3, 4, 5. Deci catetele sunt 6 m și 8 m.

b) Avem $\sphericalangle CDA=\sphericalangle CDB=90°$, deci punctele A, D, B sunt colineare și $CD\perp AB$;

c) Volumul conului este

$$V=\frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2\cdot\overline{AD}=\frac{1}{3}\left(\frac{CA\times CB}{AB}\right)^2\left(\frac{AC^2}{AB}\right)$$

$$V=49{,}152\,\pi\ \text{m}^3$$

d) Aria calotei sferice este

$$S=2\pi R\left(R-\frac{\overline{AC}}{2}\right)=2\pi\left(\frac{AB}{2}\right)\left(\frac{AB}{2}-\frac{AC}{2}\right)$$

$$S=31{,}4915\ \text{m}^2.$$

Problema 719

Care este inducția magnetică a unei bobine de 500 spire, cu secțiunea de 50 cm² și raza de 5 cm., ce se învârte cu 6000 ture pe minut și produce o f.e.m. cu o valoare efectivă de 110 volți? Presupunând că bobina este confecționată dintr'un material cu $\mu=20$, să se afle intensitatea curentului ce o străbate.

Const. Oprea
București

Soluție. Avem:

$$E=\frac{BS\omega N}{\sqrt{2}\,10^8}\ \text{volți, de unde}\ B=\frac{\sqrt{2}\,10^8 E}{S\omega N}$$

în care cunoaștem:

$E=110$ volți, $S=50$ cm², $\omega=\frac{2\pi\,6000}{60}=200\pi$

$N=500$ spire. Găsim:

$$B=987{,}9\ \text{Gauss}$$

Lungimea bobinei este $l=\frac{S}{2r}=5$ cm.

$$H=\frac{B}{\mu}=49{,}395\ \text{Oersted}.$$

PROBLEME PROPUSE

1005. Din A în B și din B în A au plecat în același timp doi drumeți. Când primul a parcurs o jumătate de drum, celui de al doilea drumeț i-au mai rămas să parcurgă 15 km. Câți kilometri îi vor rămâne să parcurgă celui de al doilea drumeț, după ce primul își va termina drumul?

F. Bartenev

1006. Triunghiul ABC este înscris într'un cerc. Notăm cu m, n, p, distanțele corespunzătoare dela un punct oarecare de pe cerc la laturile a, b, c, ale triunghiului. Să se stabilească în ce caz există relația:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}+\frac{c}{p}\,.$$

Discuție.

K. Reabenco

1007. Rezistența unui bec electric de 120 V și de 100 W este de 10 ori mai mare în stare încălzită

decât la rece. Să se afle rezistența R la rece și coeficientul termic dacă temperatura de încălzire a filamentului este de 2000 °C.

* * *

1008. Se dă cercul (O_1) și punctul fix P. O secantă variabilă ce trece prin P intersectează cercul dat în punctele A și B. Fie O_2 centrul cercului circumscris triunghiului AO_1B. Să se găsească locul geometric al ortocentrului H al triunghiului PO_1O_2.

Mihail Popescu
Elev, Craiova

1009. Un izvor de lumină având o intensitate luminoasă de 80 de candele ilumineză o suprafață plană sub un unghi de incidență de 60° dela o distanță de 2 metri. Să se calculeze iluminarea produsă în lux și phot.

* * *

1010. Un cerc, ce trece prin extremitățile diagonalei BD a unui paralelogram $ABCD$, taie laturile AB, AD respectiv în E și F. Perpendicularele duse din E pe AB și din F pe AD sunt întâlnite respectiv în P și Q de o perpendiculară oarecare pe diagonala AC. Dacă se notează cu R al patrulea vârf al paralelogramului $AQRP$, în care PQ este una din diagonale, să se arate că:

a) Diagonala AR este perpendiculară pe diagonala BD a paralelogramului dat.

b) Perpendiculara din B pe AQ și perpendiculara din D pe AP se întâlnesc pe diagonala AC.

Gh. D. Simionescu

1011. Un tub sonor închis și unul deschis funcționează simultan dând un sunet care are 5 bătăi pe secundă. Tubul deschis are 30 cm lungime. Se cere lungimea tubului închis.

* * *

1012. Paralelele duse prin vârfurile B și C la înălțimea AD a triunghiului oarecare ABC, întâlnesc laturile AC și AB respectiv în P și Q. Dreptele AB și DP se întâlnesc în E iar dreptele AC și DQ în F. Să se arate că:

a) Dreptele BF și CE sunt concurente într'un punct M situat la jumătatea înălțimii AD.

b) Înălțimea AD este bisectoarea unghiului PDQ.

Emil Secoșan

1013. Dacă a, b, c, îndeplinesc condițiile:

$$a+b+c=\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant b\leqslant\frac{\pi}{2}$$

și

$$0\leqslant c\leqslant\frac{\pi}{2},$$

să se demonstreze că:

$$\sqrt{\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b+5}+\sqrt{\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c+5}+$$
$$+\sqrt{\operatorname{tg}c\operatorname{tg}a+5}\leqslant 4\sqrt{3}.$$

I. Izosumov (Astrahan)

1014. Prin punctul A de intersecție a două cercuri O și O_1 care taie linia centrelor respectiv în B,C și B_1, C_1 se duc dreptele AB_1 și AC care taie cercurile în N și M. Să se arate că

$$\overline{AB}\cdot\overline{CM}=\overline{AC_1}\cdot\overline{B_1N}.$$

N. Păun
Student, București

1015. Cunoscând accelerația gravitației la suprafața Pământului $g=981$ cm/s^2, raza Pământului $R=6370$ km, să se determine accelerația gravitației la 30 km deasupra Pământului. Cunoscând raza orbitei Pământului $R_1=150\cdot10^6$ km, raza Soarelui $R_2=6\cdot10^5$ km, și perioada de revoluție T = 1 an a Pământului în jurul Soarelui, se cere să se calculeze accelerația în cădere liberă a corpurilor pe Soare.

Știind că Luna efectuează o rotație complectă în jurul Pământului în 27 zile și 7 ore, se cere raza orbitei Lunii.

* * *

1016. Intr'un patrulater $ABCD$ convex înscris într'un cerc, raportul $\dfrac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$ nu depinde de raza cercului circumscris. Generalizare.

* * *

1017. Se dau două cercuri (O) și (O') cu centrele O și O', secante în punctele A și B.

Prin punctul A se duce o dreaptă Δ care taie cercurile (O) și (O') în M și M' și o dreaptă Δ', perpendiculară pe Δ, care taie aceleași cercuri în N și N'.

Notând cu ω centrul cercului NAM' și cu ω' centrul cercului MAN' se cere:

a) Să se arate că $\overline{\omega\omega'}=\overline{OO'}$;

b) locul geometric al centrelor ω și ω' când dreptele Δ, Δ' se rotesc în jurul lui A, rămânând perpendiculare;

c) locul geometric al celui de al doilea punct (P) de intersecție al cercurilor (ω) și (ω');

d) să se determine pozițiile secantelor Δ și Δ' astfel ca cercurile (ω) și (ω') să fie egale.

Gh. D. Simionescu

1018. Care este diferența lungimilor a două pendule care bat secunda, una fiind la Moscova

($g = 981{,}5$ cm/s^2) și alta la București ($g = 980{,}55$ cm/s^2).

Cu cât ar înainta sau ar întârzia fiecare pendulă în timp de 24 ore dacă lungimile pendulelor s'ar schimba între ele.

* * *

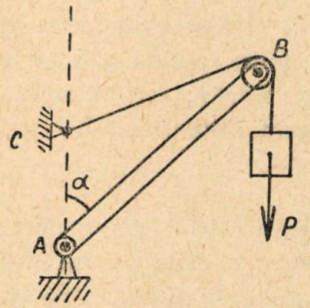
1019. Să se rezolve în numere întregi ecuația $5x^2 - 3y^2 = 2$.

Marius V. Iosifescu
Elev, Pitești

1020. Să se demonstreze că două triunghiuri care au cosinusurile unghiurilor proporționale, sunt asemenea.

* * *

1021. O bară omogenă AB de lungime $2l$ și de greutate G este articulată la capătul A iar în B are un mic scripete peste care trece un fir. Firul este prins într'un punct C situat pe verticala punctului A la înălțimea $AC = a$, iar la capătul celălalt al firului este suspendată o greutate P. Firul este flexibil și de greutate neglijabilă iar scripetele fără frecare în ax și de greutate deasemeni neglijabilă.



Să se exprime valoarea unghiului $CAB = \alpha$ în poziția de echilibru.

Cazuri particulare: 1°. $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{6}$, $\frac{G}{P} = 0; 1; 2$ și 2°. $\frac{AC}{AB} = 1$, $\frac{G}{P} = 0; 1; 2$.

C. Ionescu-Țiu

1022. Să se arate că pentru $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ există egalitatea:

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}.$$

C. Ionescu-Țiu

1023. Să se rezolve ecuația

$$16 \sin^6 x + 6 \cos 2x - 3 \cos 4x = 4{,}75.$$

R. Bernstein

1024. Fie A și A' două puncte pe cercurile de bază ale unui cilindru circular drept astfel încât AA' intersectează axa cilindrului. Cunoscându-se aria totală S a cilindrului și lungimea segmentului AA', să se calculeze raza cilindrului. Discuție. Aplicație pentru $AA' = 20$ dm și $S = 1000$ dm^3.

Mircea V. Constantinescu
Elev, București

1025. Să se verifice indentitatea:

$$\frac{\sqrt{3}(1 - \sin a) - \cos a}{\cos a - \sqrt{3} \sin a} = \frac{2 \cos a}{\cos a + \sqrt{3}(1 + \sin a)}.$$

Maria Neuman

1026. Fie M un punct în interiorul unui poligon convex $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ a cărui arie este S și în care notăm $\sphericalangle MA_iA_{i+1} = a_i$ și $\sphericalangle MA_{i+1}A_i = a_{i+1}$. Să se arate că:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\overline{A_iA_{i+1}}^2 \operatorname{tg} a_i \cdot \operatorname{tg} a_{i+1}}{\operatorname{tg} a_i + \operatorname{tg} a_{i+1}}.$$

Ion Gligor

1027. Să se arate că pentru $x > 1$, avem

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^3} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^4} + \frac{1}{1-x^8} + \ldots$$

* * *

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E. 325. O piesă de cupru cântărește 1,5 kg în vid și 1,29 kg în apă. Densitatea apei fiind considerată ca egală cu unitatea iar a cuprului 8,8, se întreabă dacă în interiorul piesei sunt cavități și se cere volumul lor.

Gheorghe Gh. Păun
Elev, Pitești

E. 326. O cantitate de 2 litri de apă la temperatura de 96°C a fost amestecată cu 500 grame zahăr cu temperatura de 20°C. Care este temperatura amestecului? Cât zahăr este necesar pentru ca temperatura finală să fie 60°C

* * *

E. 327. Să se verifice identitatea

$$\frac{a+b}{c+d}-\frac{b+d}{a+c}+\frac{a-d}{b-c}=\frac{(a+b)(b+d)(a-d)}{(c+d)(a+c)(b-c)}.$$

Gh. I. Bercea

E. 328. Bazinul Cuzneţc posedă 400 miliarde tone de cărbuni cu o putere calorică de 6800 calorii mari pentru un kilogram. Să se calculeze câţi metri cubi de apă ar putea să încălzească dela 15°C la 100°C.

* * *

E. 329. Să se calculeze înălţimea AD şi mediana AM în triunghiul ABC cunoscând laturile $AB = 5$ m, $BC = 6$ m şi $AC = 7$ m.

* * *

E. 330. Două roţi sunt angrenate: una care este fixă şi are 365 dinţi şi alta care se mişcă în jurul celei fixe şi are 30 dinţi. Inainte de a se începe mişcarea se înseamnă cu creta dinţii depe linia centrelor care sunt în contact. Se întreabă câte ture face roata mică în jurul centrului ei şi câte ture face în jurul centrului roatei mari fixe până ajunge iar ca în poziţia iniţială.

C. I. Ţ.

E. 331. Să se găsească ce căldură a cedat un primus în care au ars 150 grame de petrol pentru a încălzi 10 litri apă dela 18°C până la 80°C.

* * *

E. 332. Doi pietoni au mers pe acelaş drum în aceiaşi direcţie. Ei au plecat în acelaş timp din două puncte care se găseau la o distanţă de 240 m şi au ajuns în acelaş timp la locul de destinaţie. Să se determine lungimea drumului străbătut de fiecare pieton, ştiind că în timp ce primul pieton face 26 paşi, cel de al doilea face numai 20 paşi şi că pe distanţa de 100 metri primul pieton face 150 paşi iar al doilea 125 paşi.

* * *

E. 333. Se dau expresiile:

$$E_1=\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{+c}{1-c}+\frac{1+c}{1-c}\cdot\frac{1+a}{1-a}+1$$

$$E_2=\frac{a+1}{a-1}+\frac{b+1}{b-1}+\frac{c+1}{c-1}+\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{b+1}{b-1}\cdot\frac{c+1}{c-1}.$$

Să se arate că

$$\frac{E_1}{E_2}=1-\frac{2}{abc+1}.$$

C. I. Ţ.

E. 334. Dispunem de 1560 litri de spirt de 60° 50° şi 40°. Dacă se amestecă toată cantitatea de spirt de 60° cu un sfert din cantitatea de spirt de 50° obţinem spirt de 54°; iar dacă se amestecă spirtul rămas de 50° cu tot spirtul de 40° se obţine spirt de 48°.

Cât spirt există de 60°, de 50° şi cât de 40°?

* * *

E. 335. Să se găsească trei numere ştiind că jumătate din primul număr este egal cu treimea celui de al doilea număr sau cu pătrimea celui de al treilea număr; iar al treilea număr este mai mare decât primul cu 6,4.

* * *

E. 336. Prin vârful B al unui paralelogram $ABCD$ se duce o dreaptă care intersectează AC, AD, CD, respectiv în M, N, P. Să se arate că:

$$\overline{BM}\cdot\overline{BP}=\overline{BN}\cdot\overline{PM}.$$

Ioan Licea
Elev, Galaţi

POŞTA REDACŢIEI

ORDENTLICH ŞTEFAN — *Beiuş*. Adresaţi-vă unui tovarăş profesor de matematici din localitate şi el vă va ajuta să vă lămuriţi în problema rezolvării ecuaţiilor de gradul al treilea.

PETRU BOTIZAN — *Sighet*. S'a primit articolul d-vs.

ADAMESCU AUREL — *Călăraşi*. Multe din răspunsuri la întrebările dvs. le găsiţi în manualele de fizică pentru şcoala medie. Problemele pe care le-aţi propus vor fi cercetate şi în cazul când vor corespunde ele vor fi publicate.

VASILE GAVRILUC — *Câmpulung Moldovenesc*. Rezultatele la care aţi ajuns căutând anumite prescurtări de calcul, sunt cunoscute. Noi nu le putem publica, dar vă sfătuim să perseveraţi învăţând mereu noi cunoştinţe de matematici. Veţi avea un câmp larg de studiu şi cu alte posibilităţi.

MORARU N. CONSTANTIN — *Liceul mixt seral Ploeşti*. Aţi rezolvat bine problemele. Noi vă îndemnăm să perseveraţi şi veţi obţine rezultate bune.

BREZEANU IOANIN — *Târgovişte*. S'au primit problemele propuse de dvs.

CUCULI IOAN — *electrician Câmpina*. Problema propusă de dvs. nu este bine formulată. Vă sfătuim să vă adresaţi unui tovarăş profesor de matematici din localitate şi el vă va lămuri să îndreptaţi lipsurile. Trimiteţi-ne

cât mai multe probleme rezolvate, veţi obţine astfel deprinderi folositoare.

HODIŞ GHEORGHE — *Zalău.* Problemele pe care le propuneţi trebuesc însoţite de soluţii.

DOGARU T. MIHAI. Am primit scrisoarea dvs. Ne-a bucurat cel mai mult angajamentul pe care vi l-aţi luat de a munci cât mai bine pentru a deveni folositor construcţiei socialismului în patria noastră.

CERCUL TINERILOR FIZICIENI DELA ŞCOALA DE 7 ANI — *Certejul de Sus, Raionul Ilia.* Trebue să examinăm posibilităţile de care dispunem pentru a vă putea răspunde cu folos.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Până la 1 Iulie 1953 s'au mai primit soluţii bune la problemele arătate după fiecare rezolvitor, precum şi probleme propuse (P) *din localităţile care încep cu literele* P—Z, *dela următorii:*

PITEŞTI. Clasa VIII-a. Gulie I. Nicolae (770, E: 257, 258, 259, 261, 263, 265), Şerb G. Gabriel (658, 672, 698, 723, 724, 745, 748, 770, 779, 787, P), Clasa X-a. Dragomir Constantin (645, 715, 716, 724, 726, 728, 737, 740, 741, 744, 745, 747, 748, 749, 753, 754, 756, 757, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 782, 783, 784, 786, 787, 788, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 804, 805, 806, E: 213, 214, 217, 218, 219, 220, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 254, 255, 256, 257, 258, P), Farcaş Constantin (607, 613, 625, 648, 663, 666, 693, 704, 710, 718, 734, 737, 749, 758, 759, 760, 762, 765, 766, 768, 769, 770, 771, 775, 777, 778, 779, P), Ionescu V. Savin (631, 690, 693, 695, 698, 736, 737, 740, 741, 744, 745, 746, 747, 748, 751, 757, 764, 766, 767, 769, 770, 775, 777, 778, 779, P). Iosifescu V. Marius (616, 763—770, 772—806, P), Radu Al. Corneliu (600, 601, 603, 609, 622, 641, 645, 647, 650, 652, 654, 659, 674, 675, 680, 681, 682, 688, 734, 736, 747, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 772, 773, 776, 777, 778, 779, 780, 783, 791, 804, 805), Clasa XI-a. Marinescu C. Gheorghe (608, 642, 654, 670, 671, 673, 678, 683, 688, 692, 704, 705, 706, 707, 709, 710, 711, 713, 716, 717, 719, 720, 722, 723, 726, 727, 728, 735, 736, 737, 744, 745, 746, 748, 758, 759, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 774, 777, 778, 779, 780, 782), Păun Gh. Gheorghe (607, 644, 647, 648, 655, 657, 658, 659, 671, 676, 680, 681, 682, 685, 686, 687, 688, 689, 691, 692, 693, 694, 698, 699, 701, 703, 704, 705, 706, 707, P), Romanus Titus Costache (654, 673, 678, 688, 692, 708, 712, 719, 722, 723, 726, 727, 735, 737, 743, 744, 745, 748, 752, 753, 755, 757, 758, 759, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 777, 778, 779, 780, P), Şerban Ion (600, 604, 608, 609, 621, 623, 628, 629, 630, 633, 648, 651, 655, 658, 660, 671, 678, 689, 704, 716, 718, 719, 720, 721, 723, 724, 725, 727, 728, 740, 741, 743, 744, 748, 766, 767, 768, 770, 774, 780, P), Vasilescu Vasile (657, 711, 713, 714, 736, 737, 742, 745, 750, 755, 756, 760, 762, 766, 768, 769, 770, 771, 772, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 782, 791, 794, 806, P) Şcoala medie tehnică de mecanică. Anul I. Geamănu C. Gheorghe (E: 203, 206, 208, 209, 240, 245, 247), Marin C. Marin (615, E: 205, 210, 214, 235, 239, 240), Stănescu Gh. Ion (691, 718, 740, 748, 765, E: 224, 236, 245, 263, 268), Anul II. Anghel M. Andrei (685, 718, 769, E: 225, 230, 239, 247), Bârsan N. Dumitru (E: 208, 225, 242, 243, 247, 258, 259), Burciu Dumitru (E: 206, 235, 240, 243, 245, 247), Chisioglu Nicolae (643, 765, E: 206, 235, 240), Mihai Şt. Constantin (685, E: 223, 225, 230, 247, 248, 258), Popa I. Gheorghe (769, E: 208, 230, 247, 258), Popescu M. Virgil (223, 228, 230, 243, 245, 247, 254, 256, 258, 260), Sima F. Badea (643, 765, 776, E: 207, 217, 223, 235, 237, 258), Şerban A. Petre (633, 643, 769, E: 225, 237, 242, 243), Stănescu Virgiliu (630, 643, 757, E: 203, 204, 208, 209, 213, 230, 235, 245, 256), Ungureanu I. Marin (643, 765, E: 217, 236, 237, 247, P).

PLOEŞTI. Clasa VIII-a. Lupuţiu Ioan (611, 613, 615, 621, 632, 633, 643, 647, 655, 658, 663, 666, 670, 672, 676, 685, 688, 726, 733, 737, 742, 743, 744, 753, 765, 768, 769, 770, 779, 783, 787, 791, 795, 800, 823, 834, E: 200, 202, 217, 228, 237, 242, 243, 244, 246, 254, 255, 257, 260, 263, P), Niculescu I. Pavel (611, 613, 615, 633, 658, 662, 675, 676, 736, 783, E: 200, 207, 208, 209, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 231, 239, 257, 288), Radu Stroe (608, 617, 622, 624, 637, 641, 663, 670, 675, 677, 681, 701, 703, 705, 707, 713, 715, 728, 730, 735, 736, 745, 747, 751, 753, 758, 761, 767, 769, 775, 779, 780, 784, 787, 788, 791, 794, 795, 799, 810, 814, 823, 827, 829, 835, E: 265, 268, 270, 271, 272, 276, 277, 281, 282, 289, 284, 285, 286, P), Smărăndescu F. Dan (E: 208, 209, 214, 215, 216, 217, 218), Clasa IX-a. Horoiu Dan (603, 604, 651, 765, E: 206, 207, 208, 209, 251, 263), Pavelescu Petre (685, 716, 721, 757, 765, 787, 795), Schip Z. Hari (726, 748, E: 213, 216, 225, 230, 239, 251, 257, 261, 263, P), Stanciu N. Toma (631, 634, 662, 675, 716, 721, 726, 727, 736, 744, 748, 762, 770, 776), Teodorescu Ştefan (685, 721, 742, 745, 748, 795, 810, 813, 819, 823, 827, 834, 835). Clasa X-a. Dăscălescu Gheorghe (647, 648, 649, 61, 664, 692, 707, 715, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 726, 728, 730, 731, 736, 737, 740, 743, 744, 748, 756, 757, 767, 770, 775, 777, 780), Dumitrescu M. Stelian (680, 715, 723, 724, 762, 788, 823, 827, 835), Făgăraş P. Constantin (671, 677, 680, 713, 722, 733, 746, 780, 788, 791, 792, 794, 797, 800, 804, 805, 806, 813, 819, 822, 823, 824, 826, 831, 834, 835, 838, 839, 850, 854, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 875, 876, P), Ghiga C. Dan (608, 613, 621, 630, 633, 659, 679, 715, 716, 717, 718, 722, 723, 724, 726, 727, 728, 729, 733, 742, 743, 744, 745, 746, 748, 751, 752, 753), Mihai T. Iulian (613, 620, 633, 646, 653, 665, 693, 698, 704, 733, 734, 740, 743, 746, 752, 758, 759, 765, 767, 768, 769, 770, 771, 775, 777, 778, 779, 780, 783, 787, 788, 791, 792, 793, 794, 795, 802, 804, 805, 806, 813, 814, 816, 819, 822, 823, 824, 826, 831, 834, 835, 839, 842, 845, 850, 858, 867, 871, 782, 873, 875, P), Preda Vasile (631, 633, 640, 641, 648, 665, 670, 686, 716, 718, 719, 734, 740, 748, 751, 756, 765, 766, 768, 769, 780, 788, 813, 819, 882, 823, 824, P), Puşcaşu A. Alexandru (675, 680, 682, 683, 685, 686, 691, 694, 696, 700, 715, 716, 717, 718, 720, 721, 722, 723, 724, 726, 728, 734, 736, 742, 743), Vulpescu Dumitru (655, 663, 666, 741, 765, 766, 769, 774, 780, 788, 792, 804, 813, 822, 823, 831, 835, 839, 841, 867, 868, 870, 871, 872, 875). Clasa XI-a. Moraru Constantin (663, 664, 669, 718, 723, 724, 768), Neagu Vasile (608, 611, 767, 763, 770, 779, 786, 787, 788).

RĂDĂUȚI. Clasa X-a. Chelba Constantin (604, 608,617, 625, 641, 663, 666, 670, 673, 677, 683, 685, 688, 690, 691, 698, 716, 718, 722, 723, 724, 726, 728, 739, 743, 744, 745, 747, 748, 752, 757, 778, 787, 788, 792, 795, 800, 804, 831, P), Lazăr Dumitru (622, 625, 651, 659, 686, 687, 733, 751, 756, 761, 766, 770, 774, 783, 787, 788, 792, P).

RÂMNICUL-SĂRAT. Clasa VII-a. Vlase Constantin (E: 233, 236, 239, 240, 245, 246, 254, 259, 264, 279, 285, 289),

RÂMNICUL VÂLCEA. Clasa X-a. Goanță Gh. (745, 748, E: 245, 254, 260), Liță I. Constantin (670, 744, 768, 787, E: 217, 218), Stănescu Gh. Alexandru (630, 654, 666, 765, 767, E: 200, 218, 245). Clasa XI-a: Ionescu Emil (605, 615, 621, 633, 641, 643, 651, 655, 666, 670, 716, 721, P), Petrescu N. Nicolae (685, 718, 721, 746, 757), Stan I. Gheorghe (615, 629, 633, 643, 651, 765, 766, 767).

REȘIȚA. Clasa X-a. Popescu A. Dan (625, 633, 635, 636, 655, 661, 662, 671, 678, 683, 717, 725, 727, 736, 744, 745, 746, 748, 751, 765, 770, 775, 777, 778, 792, 794, 800, 801, 803, P).

ROMAN. Clasa VIII-a. Gavriluț P. Mihai (613, 682, 743, 748, 787, E: 213, 216, 218, 220, 222, 223, 224, 230, 242, 245, 247, 250, 252, 257, 259, 261, 263, 266, 268, 270, 274), Ioniță Valentin (834, E: 216, 217, 268, 286), Juncu Gelu (621, 770, 787, 800, E: 218, 220, 223, 224, 225, 230, 249, 260, 261, 263, 266). Clasa IX-a. Mihăilă M. Ieronim (721, 748, 757, 764, 765, 767, 819, 823, 834, 835, E: 234, 236, 237, 239, 240, 241, 242, 245, 251, 257, 260, 261, 263, 266, 268, 269, 276, 277, 281, 285, 286, 289). Clasa X-a: Mitrofan Gheorghe (643, 748, 762, 779, 794, E: 245, 250, 251, 266, 268, 270, 272). Clasa XI-a: Lazăr Aldo Ioram (600,601, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 622, 623, 624, 625, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 640, 641, 642, 643), Vulpe Ioan (603, 632, 641, 655, 683, 685, 691, 698, 699, 701, 705, 706, 707, 709, 715, 721, 728, 733, 758, 759, 760, 770, 775, 777, 778, 779, 780, 800).

ROȘIORII DE VEDE. Clasa XI-a. Miclăuș Vasile (605, 642, 734, 736, 739, 740, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 762, 764, 765, 767, 768, 770, 772, 773, 775, 777, 778, 779, 780, 783, P).

SATU MARE. Clasa VIII-a. Chilințan Octavian (762, 769, 787, E: 245, 259), Clasa XI-a. Găvruș Eugen (765, 767, 768, 770, 780, 783, E: 243, 251, 252, 254, 257, 261).

SCĂENI (Ploești). Clasa VII-a. Georgescu N. Ion (E: 223, 260, 261, 266, 268, 269).

SFT. GHEORGHE. Clasa IX-a. Zaharias Ștefan (745, 765, 784, 787, 792, E: 243, 245, 260).

SIBIU. Clasa X-a. Ganciu Maria (630, 633, 655, 670, 734, E: 245).

SIGHET. Clasa XI-a. Botizan Petru (A. Terminațiile puterilor perfecte).

SLATINA. Clasa VII-a. Nicolăescu I. Cici (E: 235, 236, 243, 248, 255, 260). Clasa VIII-a. Bușcu P. Constantin (E: 203, 223, 235, 245, 248, 259, 261), Dumitrașcu I. Ilie (E: 207, 225, 248, 259, 261), Ene F. Vasile (748, E: 245, 247, 251, 259, 268), Ursu Gh. Mihai (740, E: 248, 250, 257, 259, 261, 263, P), Clasa IX-a: Budăi Teodor (770, E: 254, 257, 258, 260, 261, 263, 264, 266, 268), Florea I. Ion (605, 611, 613, 615, 618, 630, 632, 633, 655, 658, 685, 707, 711, 745, 749, 778, 783, 787, 834, E: 207, 208, 209, 216, 221, 233, 236, 237, 239, 240, 257, 261, 263, 270, 286), Petrulian I. Ștefan (632, 666, 756, 770, E: 200, 213, 257, 261, 263), Popescu Gh. Sergiu (608, 609, 621, 635, 638, 641, 670, 683, 687, 711, 716, 717, 742, 744, 745, 767, 770, 787, 791, 792, 793, P), Popescu P. Aurelian (655, 658, E: 213, 236, 239, 243), Zamfir C. Vasile (621, 632, 765, 766, 768, 770, 779, 780, 792, E: 249, 256), Clasa X-a. Ionescu N. Ștefan (716, 717, 718, 721, 722, 723, 724, 727, 728, 734, 737, 740, 743, 744, 745, 748, 762), Zigulescu D. Marin (602, 609, 618, 670, 673, 682, 693, 695, 701, 705, 710, 719, 720, 722, 723, 727, 728, 734, 743, 748, 752, 756, 757, 759, 762, 765, 767, 768, 770, 775, 776, 777, 779, 780, 787, 788, 791, 792, 794, 797, 800, 804, 806, 813, 819, 823, 826, 834, 835). Clasa XI-a Andreiță P. Constantin (743, 765, 766, 767, 768, 770, 779, 780, 783, 787, 788, 792, 793, 797, 798), Bulduș T. J. (727, 734, 745, 748, 762, 765, 770, 780), Diaconu S. Marin (687, 718, 721, 724, 740, 766, 767, 792, E: 213). Liceul de fete Clasa IX-a: Hiera Adriana (655, 658, 679, E: 207, 208), Clasa XI-a. Constandache Rodica (709, 722, 743, 744, 745, 746, 748, 758, 759, 760, 762, 770, 778, 779, E: 236), Popescu Marcela (635, 683, 706, 758, 770, 775, 778, 779, 787, 792, 793, 799, 800, 806), Vasilescu Dorina (664, 685, 691, 705, 770, E: 221, 240, 245, 258).

SUCEAVA. Clasa IX-a. Andronic M. Constantin (723, 745, 748, E: 213, 218, 228, 230, 236, 239, 240, 245, 215), Chindruș Vasile (E: 225, 239, 254, 261, 263), Georgian Mihai (770, E: 257, 258, 263, 264, 268), Clasa XI-a: Popovici Stelian (658, 745, 748, 757, 770, 775, 778, 779), Tiperciuc Eugen (621, 625, 630, 659, 683, 745, 824, E: 200, 203, 204, 206, 207, 208, 209, 212, 213, 217, 218, 223, 225, 228, 232, 243, 245, 248, 252, 257, 272, 274, 279, 280, 286, P).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VIII-a. Brebente Cornelia (630, 643, 647, 658, 214, 216, 217, 218, P), Galațky Gh. (666, 737, 764, 765, 767, 768, 770, 787, 788, 799, 794, 813, 819, 823, 834, E: 260, 263, 265, 266, 268, 270, 276, 277, 279, 280, 281, 285, 286, 289), Onea M. Gheorghe (686, 765, E: 237, 239, 243), Oprea M. Aurelian (608, 625, 670, 698, 726, 727, 737, 745, 770, 778, 800, E: 261, 262, 263), Popescu N. Viorel (E: 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 215, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 230, 231, 232, 233, 240, 243, 245, 247, 257, 260), Stoian I. Gheorghe (641, 647, 670, 686, 704, 707, 718, 727, 764, 765, 768, 770, 778, 787, 788, 791, 813, 819, 823, 831, 834, E: 207, 258, 262, 261, 263, 265, 270, 272, 274, P), Țârlea I. Alexandru (643, 685, 724, E: 208, 215, 243, 245), Vlăsceanu I. Nicolae (E: 245, 247, 252, 257, 259, 261), Clasa IX-a. Mateescu I. Lucian (740, 747, 765, 792, E: 233, 234, 235, 236, 245, 247), Clasa X-a. Ionescu I. Ion (604, 615, 618, 621, 633, 635, 640, 641, 648, 663, 665, 666, 685, 686, 691, 716, 718, 721, 722, 723, 724, 727, 735, 739, 741, 744, 745, 746, 748, 765, 767, 768, 770, 787, 788, 792, 800, 805, 806, 813, 822, 823, 831, 835), Rădulescu Eugen (651, 685, 690, 727, 734, 742, 743, 744, 745, 748, 768, 774, 787, 800, 808), Clasa XI-a. Bălescu Gr. Eftimie (614, 617, 635, 650, 664, 671, 672, 696, 747, 749, 766, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 782, 783, 785, 791, 794, 795, 797, 798, 799, 800, 804, 814, 816, 826, 827, 834, P), Brezeanu I. Ioanin (601, 607, 609, 617, 622, 626, 627, 628, 634, 642, 645, 649, 650, 652, 668, 677, 679, 688, 690, 692, 695, 702, 704, 705, 706, 707, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 716, 717, 719, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 733, 736, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 751, 752, 753, 754, 756, 758, 762, 764, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 783, P), Dobrescu A. Marcel (629, 635, 636, 640, 694, 698, 705, 710, 713, 721, 744, 745, 751, 756, 762, 766, 770, 771, 774, 775, 777, 778, 794, 795, 799, 800, 804, 806, P), Janes G. Paul (685, 687, 698, 701, 716, 718, 722, 723, 724, 727, 728, 736, 737, 745, 748, 768,

770, 777, 778, 780, E: 227, 231), Oprea A. Constantin (624, 625, 637, 641, 642, 703, 704, 705, 706, 707, 709, 710, 713, 723, 765, 766, 767, 770, 777, 778, 779, 780), Liceul de fete clasa XI-a: Jurăscu Nadia (604, 606, 608, 624, 625, 637, 744, 766, 767, 800), Şcoala elementară de fete. Clasa VII-a. Brezeanu I. Matilda (E: 200, 207, 208, 213, 216, 221, 222, 225, 228, 236), Şcoala medie tehnică de Petrol. Anul II. Bobeică I. Dumitru (726, 757, 769, E: 209, 211), Tache C. Ştefan (639, 649, 650, 651, 655, 658, 716, 724, 730, 739, 740, 748, 749, 775, E: 209, 211, 243, 248, P), Drăgan T. Gheorghe (670, 673, 674, 676, 689, 702, 705, 706, 723, 724, 736, 739, 744, 745, 747, 748).

TÂRGU-JIU. Şcoala Pedagogică. Anul I. Dascălu Gheorghe (812, 817, 822, E: 243, 245, 277, 282, 286), Anul III. Câtu C. Nicolae (743, 764, 765, 767, 769, 823, 825, E: 206, 209, 210, 213, 215, 227, 232, 240, 243, 245, 259, 276, 277), Liceul de băieţi, Clasa IX-a. Clonda Ovidiu (745, E: 212, 213, 216, 218, 220, 221, 223, 224, 225, 228, 230, 233, 236, 239, 240, 243, 245, 248, 251, 257, 258, 260, 266, 268, 271, 286, P), Cosinschi Dragoş (743, 744, 779, E: 220, 221, 228, 230, 233, 237, 239, 242, 243, 245, 247, 251, 256, 257, 263, 264, 265, 268, 270, 272), Gornoviceanu Coriolan (743, 791, 823, 834, E: 270, 281, 286, 288), Râcă Gheorghe (602, 605, 609, 612, 617, 618, 622, 625, 630, 637, 640, 643, 650, 652, 654, 664, 665, 670, 671, 673, 675, 678, 682, 685, 693, 695, 696, 697, P), Clasa XI-a: Ionici L. Vasile (610, 658, 685, 718, 724, 743, E: 225, 236, 239, 240, 243, 251), Crăciun V. Constantin (685, E: 213, 221, 225, 230, 279, 281, 286),

TÂRGULOCNA. Clasa XI-a. Ruscinschi Alexe (643, 650, 655, 665, 670).

TÂRGUL MUREŞ. Clasa VIII-a. Iaina Adrian (615, E: 202, 203, 218, 223, 225, 234, 236, 240, 248), Matei Ioan (655, 658, 726, 794, E: 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 213, 214, 217, 218, 219, 223, 225, 226, 227, 230, 231, 232, 233, 235, 236, 239, 241, 242, 243, 245, 247, 248, 251, 258, 261, 262, 266, 269). Clasa IX-a. Antonescu Victor (747, 748, 765, 771, 774, 775, 776, 779, 780, 782, 783, 787, 823, 831, E: 200, 242, 257, 260, 261, 279, 280, 281, 286, 291, 292, 294, 296, 300, P), Goşa P. Petru (658, 723, 726, 736, 743, 744, 745, E: 207, 251), Inţă I. Ioan (743, 749, 770, 775, 777, 783, E: 257, 261), Laslo Ioan (723, 744, 745, 748, 749, 765, 768, 774, 775, 776, 777, 783), Pistănilă Emil (744, 774, 775, 776, 777, 783), Clasa X-a: Bunica M. Octavian (731, 735, 740, 742, 743, 745, 747, 751, 756, 766, 767, 768, 774, 777, 779, E: 243, 251, 252, 253, 258, 261, 263), Angheluţă Florin (604, 611, 655, 658, 691, 745, 746, 748), Hârşan Izidor (631, 633, 716, 743, 824, 826, E: 281), Matei Nicolae (602, 608, 609, 611, 615, 621, 625, 633, 647, 651, 655, 666, 669, 670, 685, 691, 716, 721, 722, 723, 726, 727, 728, 766, 768, 770, 774, 797, 779, 787, 788, E: 213, 217, 225, 226, 230, 233, 235, 239, 248, 251, 258, 261, 283), Paşcanu Eugen (618, 624, 633, 641, 666, 670, 685, 686, 721, 723, E: 203, 204, 208, 210, 213, 216, 217, 218, 221, 225, 236, 246, 258, 260, 261, P), Weszely Tiberiu (633, 735, 736, 737, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 750, 751, 752, 753, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 764, 765, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 782, 783, 784, 786, 787, 789, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 802, 804, 805, 806, 808, 810, 814, 816, 820, 823, 824, 827, P). Clasa XI-a. Pupăză Nicolae (600, 603, 604, 607, 608, 609, 611, 613, 625, 641, 655, 664, 665, 673, 679, 681, 688, 696, 699, 702, 716, 724, 743, 757, 764, 765, 767, 768, 770, 775, 777, 778, 779, 783). Şcoala medie tehnică de Comerţ. Anul I. Giurcă Carolina (E: 252, 256, 258, 260, 261), Moldovan Ion (E: 234, 239, 240, 278, 286, 292, 294).

TIMIŞOARA. Clasa VII-a: Arsenovici Tiberiu (E:205, 210, 211, 216, 223, 227, 231, 232, 252, 271), Cismariu Ionica (E: 252, 255, 257, 260, 261, 263, 266, 267, 269, 271 275, 277, 279), Clasa IX-a: Braşovan Ioan (744, 745, 757, 765, 767, 768, 770, 788, 792, 793, 813, 819, 823, 825, 835), Clasa XI-a. Comloşan Dan (633, 641, 647, 648, 651, 655, 659, 670, 675, 716, 721, 723, 724, 735, 736, 744, 748, 766, 768, 770, 775, 777, 779), Pascu Pavel (717, 718, 722, 743, 744, 745, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 773, 776, 777, 778, 779, 780, 791, P), Bucea Cornelia (630, 721, E: 209, 236, 240, 243, 245, 252, 261), Rusnac I. Leonid (632, 633, 641, 651, 655, 658, 703, 716, 728), Facultatea muncitorească. Anul I. Goleanu Ştefan (765, 768, 787, 788, 793, P), Şcoala medie C.F.R. Anul III. Fuia Hristu (765, 767, 768, 770, 778, E: 259, 260, 261), Şcoala Pedagogică. Anul II. Mettler Martin (633, E: 218, 220, 224, 245), Şcoala medie electrotehnică. Matlok Ioan (643, 647, 648, 670, 685, 765, 788, 819, 823).

TULCEA. Clasa X-a. Condrea Iacob (265, 627, 633, 635, 663, 664, 670, 716, 721, 728, 748, 751), Clasa XI-a. Casian Valentina (744, 745, 748, E: 248, 258).

TURDA. Clasa XI-a. Chira Emil (615, 621, 630, 666, 685, 718, 720, 721, 724, 748, 767, 783, E: 213, 218, 225, 230, 234, 235, 236, 237, 242, 247, 251, 255, 261, 263), Găbudean Dorin (610, 611, 629, 630, 643, 658, 686, 726, 743, 748, 765, 768, 779, 783, E: 204, 207, 209, 227, 236, 237, 239, 243, 245, 251, 255, 261, 263, 264), Folta Florian (666, 670, 685, 686, 716, 718, 720, 721, 724, 726, 744, 745, 746, 748, 765, 766, 768, 769, 770, 779, 783, E: 203, 204, 206, 209, 210, 213, 216, 217, 218, 220, 223, 224, 225, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 242, 243, 245, 249, 251, 253, 254, 255, 261, 263, 264), Ghiriş Ioan (611, 615, 630, 658, 666, 685, 718, 721, 745, 765, 767, 768, 783, E: 207, 216, 218, 234, 236, 242, 243, 251, 255, 261, 263, 264), Pascu E. Eugen (618, 621, 627, 686, 720, 723, 724, 727, 740, 742, 744, 745, 746, 748, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 779, 780, 783, E: 202, 203, 204, 206, 207, 209, 210, 211, 213, 216, 219, 232, 235, 239, 242, 243, 245, 247, P).

TURNU MĂGURELE. Clasa VIII-a: Coticeru Maria (770, E: 261, 262, 263, 268). Clasa IX-a. Constantin Ioana (658, 748, E: 209, 213, 215, 217, 218, 224, 228, 235, 243, 245), Constantinescu H. Viorel (792, 798, 831, E: 223, 225, 230, 260, 261, 263, 266, 270, 286), Dan St. Valerian (618, 716, 748, 770, 792, 798, E: 220, 225, 228, 236, 239, 245, 258, 263, 265, 270, 274), Oancea Gheorghe (601, 691, 745, 748, 756, 768, E: 218, 225, 230), Ghiţulescu N. Victor (652, 655, 658, 691, 740, 745, 748, E: 207, 208, 213, 223, 224, 239, 245, 257, 258, 259, 260, 261, 263, 265, 266, 270, 272, 274), Rey Vasile (618, 658, 716, 743, 748, 792, 822, 831, E: 208, 216, 239, 257, 260, 263, 265, 266, 268, 270), Clasa X-a. Voiculescu Stelică (629, 641, 663, 666, 683, 710, 711, 713, 718, 721, 724, 743, 745, 748, 758, 764, 770, 792, 794, 795), Clasa XI-a: Florescu I. Gabriela (659, 664, 671, 676, 748, 759), Găină F. Stelian (601, 618, 620, 675, 691, 701, 704, 705, 716, 717, 718, 721, 722, 723, 724, 727, 728, 733, 744, 745, 748, 751, 756, 757, 761, 762, 768, 770, 775, 777, 780). Absolvent Mihăescu I. Alexandru (764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 775, 777, 778, 780, 783, 784, 785, 787, 788, 791, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 805, 806, E: 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, P).

TURNUL-SEVERIN. Clasa VIII-a. Stănuleţ Mihai (655, 658, 676, 696, 699, 729, E: 203, 204, 205, 207, 208,

209, 210, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 220, 223, 224, 225, 227, 228, 230, 231, 232, 235, 239, 240), Surdulescu Radu (E: 216, 217, 218, 220, 227, 228, 232, 236), Clasa IX-a. Istrătescu V. (743, 745, 748, E: 239, 245, P), Clasa X-a, Doran Mircea (647, 664, 716, 717, 718, 721, 722, 724, 745, 748), Filimon Ştefan (613, 625, 643, 647, 666, 668, 687, 689, 719, 745, 756, 757, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 778, 787, 788, 789, 792, 793, 805, 813, 817, 819, 822, 823, 824, 835, E: 205, 206, 209, 212, 214, 215, 217, 223, 225, 226, 227, 228, 230, 232, 234, 236, 237, 252, 258, 259, 260, 272, 275, 276, 277, 279, 285, 289, P), Gâlcă Constantin (716, 719, 721, 723, 740, 748, 770, 787, 788, 813, 819, E: 210, 213, 217, 218, 222, 225, 239, 285, 289), Păunescu Ion (625, 723, 744, 748, 751, 752, 756, 765, 767, 769, 770, 775, 777, 778, 779, 784, 785, 787, 788, 791, 792, 793, 794, 813, 819, 823, 825, 835, P), Pârvulescu L. Emil (602, 609, 615, 624, 625, 613, 631, 636, 649, 651, 658, 715, 718, 723, 726, 757, 765, 766, 767, 770, 774, 775, 777, 778, 779, 780, 787, 788, 791, 793, 794, 800, 813, 822, 834, 835, E: 207, 208, 213, 216, 217, 219, 228, 231, 254, 258, 261, 262, 263, 265, 269, 281, 286, 285, P), Pârvuleţu A. Constantin (625, 716, 765, 767, 770, 787, 788, 793, 800, 813, 819, 823, 824, 834, 835, E: 207, 208, 213, 217, 218, 221, 226, 239, 261, 263, 270, 279, 285, 289), Zorilescu M. Dan (602, 613, 625, 631, 683, 715, 725, 726, 756, 758, 765, 767, 768, 774, 775, 777, 778, 779, 780, 783, 785, 787, 788, 791, 792, 793, 794, 798, 800, 806, 813, 814, 815, 819, 821, 822, 825, 834, E: 262, 263, 265, 270, 272, 285, 286, 289, P), Clasa XI-a. Surdu Emil (608, 647, 716, 718, 721, 723, 740, 744, 751, 775, 777, 778, 779, 787, P).

VASLUI. Clasa VII elementară. Şcoala din Fâstici Cosmeşti. Busuioc Ioan (E: 228, 239, 248, 269, 263), Chiriac Gheorghe (E: 200, 207, 208, 228, 230), Iacob C. Traian (658, E: 200, 208, 239, 263), Liceul de băieţi. Clasa VIII-a. Popa St. Petru (787, 788, E: 266, 269, 274), Stănescu Viorel (E: 200, 225, 228, 230, 274), Clasa X-a, Bostan Gh. Emil (715, 716, 718, 724, 734, 748, 751, 824, E: 236, 239, 245, 248, 258, 280, 281, 286), Clasa XI-a. Baichis J. (601, 611, 658, 659, 664, 673, 693, 717, 726, 745, 770).

ZALĂU. Clasa IX-a. Hodiş Gheorghe (748, 794, 806, 826, E: 242, 245, 248, 250, 251, 266, 268, 270, 272, 275, P).

EVIDENŢIAŢI

Din lista precedentă a rezolvitorilor din localităţile care încep cu literele P—Z, se evidenţiază:

Iosifescu V. Marius (clasa X-a, Piteşti), **Brezeanu I. Ioanin** (clasa XI-a Târgovişte), **Weszely Tiberiu** (clasa X-a, Tg. Mureş), **Mihai T. Iulian** (clasa X-a, Ploeşti), **Radu Stroe** (clasa X-a, Ploeşti), **Dragomir Constantin** (clasa X-a, Piteşti), **Zigulescu D. Marin** (clasa X-a, Slatina), **Făgăraş P. Constantin** (clasa X-a, Ploeşti), **Ionescu I. Ion** (clasa X-a, Târgovişte), **Lupuţiu Ioan** (clasa VIII-a, Ploeşti), **Marinescu C. Gheorghe** (clasa XI-a Piteşti), **Chelba Constantin** (clasa X-a, Rădăuţi), **Pârvulescu L. Emil** (clasa X-a, Tr. Severin), **Filimon Ştefan** (clasa X-a, Tr. Severin), **Radu Al. Corneliu** (clasa X-a, Piteşti), **Şerban Ion** (clasa XI-a, Piteşti), **Matei Nicolae** (clasa X-a, Tg. Mureş), **Bălescu Gr. Eftimiu** (clasa XI-a, Târgovişte), **Lazăr Aldo Ioram** (clasa XI-a, Roman), **Zorilescu M. Dan** (clasa XI-a, Tr. Severin), **Costache Titus Romanus** (clasa XI-a, Piteşti), **Stănuleţ Mihai** (clasa VIII-a, Tr. Severin), **Miclăuş Vasile** (clasa XI-a, Roşiorii de Vede), **Stoian I. Gheorghe** (clasa VIII-a, Târgovişte), **Pupăză Nicolae** (clasa XI-a, Tg. Mureş), **Pascu E. Eugen** (clasa XI-a, Turda).

* * *

Notă. Lista rezolvitorilor şi evidenţiaţilor din localităţile care încep cu literile A—P va apare în numărul următor al Revistei Matematice şi Fizice.

* * *

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— Soluţia unei probleme trebue să fie clar expusă, cu explicaţiile necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire.

— Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaş foaie. Fiecare soluţie să fie precedată de numărul şi enunţul problemei; iar la sfârşitul soluţiei rezolvitorul să scrie citeţ numele, clasa şi şcoala unde urmează.

— Se mai primesc soluţii numai la problemele cu numărul de ordine 763 şi următoarele iar pentru exerciţiile elementare dela E: 252 şi următoarele adică din ultimele 6 numere din R.M.F.

— Pentru premierea rezolvitorilor de probleme din R.M.F. pe anul 1953, se va ţine seamă de toate soluţiile primite între 1 Noembrie 1952 şi 1 Noembrie 1953 şi anunţate la rubrica rezolvitorilor, de calitatea soluţiilor şi de modul lor de redactare, precum şi de clasa pe care o urmează rezolvitorul.

— Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiţi ca să înceapă a propune probleme, numai după ce au soluţionat un număr însemnat de exerciţii şi probleme.

— Probleme rezolvate, propuse, note matematice şi fizice, articole, dări de seamă asupra activităţii cercurilor de matematică şi fizică pentru elevi, cereri, sugestii şi propuneri, etc., se trimit pe adresa: Revista Matematică şi Fizică, Strada Dionisie Lupu 40, Raionul Stalin, Bucureşti.

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru întreprinderi . . . . . Lei 60 anual

Tarif pentru muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 1060 — ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Lei 1.—

E 1426/d

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

Tineri și tinere! Munciți cu tot entuziasmul și avântul vostru tineresc pentru însușirea științei, tehnicii și culturii! Sporiți prin munca voastră succesele poporului nostru în construirea socialismului!

(Din chemările de 23 August 1953 ale Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Român)

★ ★ ★

ANUL IV

SEPTEMBRIE 1953

9

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

	Pag.
1. *Inversiunea* de Conf. Univ. Elena Mavrodin ...	217
2. *Structura atomică a unei substanţe, după articolul lui A. I. Chitaigorodschi (Moscova) din Fizica în Şcoală Nr. 1/1953*	223
3. *Probleme rezolvate (605, 644, 666, 667, 668, 670, 671, 673, 674, 675, 676, 679, 721, 722, 728, 731, E: 250)*	231
4. *Probleme propuse (1028 — 1052)*	238
5. *Exerciţii propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 337 — E: 351)*	240
6. *Poşta redacţiei*	241
7. *Rubrica rezolvitorilor de probleme*	242

9

ANUL IV SEPT. 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 9 — Septembrie 1953

INVERSIUNEA

Conf. Univ. ELENA MAVRODIN

Orszégos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

1. Obiectul geometriei nu e numai studiul figurilor geometrice, căci figurile geometrice ca atare, prezintă un interes redus: abia ar constitui o schemă simplificată a corpurilor din natură. Aceste corpuri însă sunt supuse la continue schimbări: mişcări şi deformări, fenomene mecanice sau fizice, aşa că geometria, pentru a urmări realitatea, trebue să studieze nu figurile rigide, ci în relaţie unele cu altele, mişcându-se şi schimbându-şi forma.

Deplasarea unui corp e o schimbare de poziţie. Intinderea unui elastic este o schimbare de formă. Corespondenţe de acest fel între o formă iniţială şi o formă finală a unei figuri se numesc în geometrie transformări.

O transformare geometrică punctuală face să corespundă unui punct din plan (sau din spaţiu) un punct bine determinat, după o anumită lege, care constitue legea de transformare.

De pildă: luăm un punct O în plan, un raport k şi o figură F. Unim fiecare punct M al figurii F cu O, iar pe dreapta OM construim un punct M' astfel ca $\frac{OM'}{OM} = k$, punctele M', după cum se ştie alcătuesc figura F', omotetică cu F, faţă de O şi în raportul k.

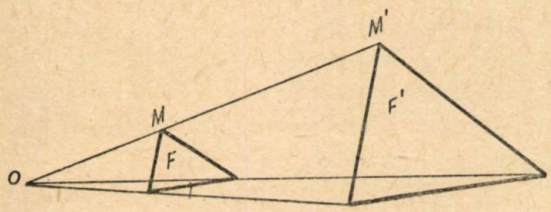


Fig. 1

Se vede deci că o transformare punctuală stabileşte o corespondenţă biunivocă între o mulţime de puncte Ω (din plan sau spaţiu) *şi o altă mulţime de puncte* Ω', *alcătuită din transformatele acestora.*

Aşa cum a fost definită omotetia se pot imagina şi defini nenumărate transformări. Unele transformări oglindesc fenomene fizice, ca de exemplu, omotetia care ilustrează fenomenul dilatării.

Se folosesc transformările geometrice pentru a descoperi proprietăţile unei figuri atunci când se cunosc anumite proprietăţi ale unei figuri geometrice corespondente.

In unele probleme mai grele de geometrie, aplicând o transformare se înlocueşte problema dată prin altă problemă, care se rezolvă mai uşor.

2. Ne propunem următoarea problemă:

Fiind dat un cerc O, să se stabilească o corespondenţă biunivocă între mulţimea punctelor interioare şi mulţimea punctelor exterioare ale acestui cerc.

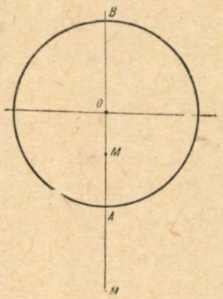


Fig. 2

Să considerăm un diametru AB al acestui cerc. Vom căuta ca oricărui punct interior segmentului AB să facem să-i corespundă un punct bine determinat situat în afara segmentului AB.

Rotind apoi segmentul AB în jurul mijlocului său O, astfel încât el să acopere tot interiorul cercului dat, vom putea realiza o corespondenţă biunivocă între mulţimea punctelor situate în interiorul cercului şi mulţimea punctelor situate în exteriorul cercului de diametru AB.

Corespondenţa aceasta, după cum am văzut se reduce la corespondeţa între mulţimea punctelor situate în interiorul şi exteriorul segmentului AB pe care o vom realiza considerând punctele M şi M' care împart segmentul AB într'un raport k luat în valoare absolută.

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{M'A}{M'B} = k \qquad (1)$$

Relaţia (1) defineşte două puncte M, M' conjugate armonic în raport cu extremităţile segmentului AB; ele sunt situate de aceeaşi parte a mijlocului O a segmentului AB.

Cum punctele A, B şi M, M' se separă rezultă că am realizat o corespondenţă între mulţimea

punctelor din exteriorul şi interiorul segmentului AB.

Ţinând seamă că segmentele sunt orientate, din figură se vede că avem:

$$MA = MO + OA; \quad M'A = M'O + OA$$
$$MB = MO + OB \quad M'B = M'O + OB$$

şi $OA = -OB$.

Inlocuind în (1) obţinem

$$\frac{MO + OA}{MO + OB} = -\frac{M'O + OA}{M'O + OB}$$

sau

$$(MO+OA)(M'O+OB)+(MO+OB)(M'O+OA) = 0$$

Desfăcând parantezele şi reducând avem:

$$OM \cdot OM' = OA^2 = OB^2 = ct \qquad (2)$$

Relaţia (2) exprimă o altă proprietate a punctelor M şi M', anume că produsul distanţelor a două puncte M şi M', conjugate armonic faţă de extremităţile unui segment AB, până la mijlocul O al acestui segment e totdeauna constant şi egal cu patratul jumătăţii segmentului.

Relaţia (2) ne defineşte o corespondenţă biunivocă între mulţimea punctelor din interiorul cercului AB şi mulţimea punctelor din exteriorul său.

In adevăr oricărui punct M din interiorul (sau exteriorul) cercului O îi corespunde un singur punct M' situat pe dreapta OM şi conjugat armonic cu extremităţile diametrului ce trece prin M.

Relaţiile stabilite între punctele M, M' sunt:

$$O;\ M;\ M' \text{ colineare} \qquad (3)$$
$$OM \cdot OM' = OA^2 = OB^2 = \text{const.}$$

(k fiind o constantă).

Aceste relaţii definesc *transformarea prin inversiune.*

Punctul M' se numeşte *inversul punctului* M.

Analizând relaţiile (3), observăm că această transformare e definită de *punctul fix* O numit *polul de inversiune* şi de *numărul real* k numit *puterea de inversiune* sau *modulul de inversiune.* Semidreapta care uneşte polul de inversiune O cu punctele M şi M' se numeşte rază de inversiune. Relaţiile (3) ne arată că două puncte inverse, unul altuia satisfac simultan la două condiţii:

a) ele sunt colineare cu polul fix O

b) produsul $OM \cdot OM'$ este constant.

Ultima relaţie din (3) ne spune că cu cât M se apropie de polul O, cu atât M' se va depărta de O. Când M coincide cu polul, distanţa OM' trebue să fie infinită. Deci inversul polului este punctul de la infinit, situat în orice direcţie (corespondenţa nu mai este deci biunivocă în cazul polului).

Vom numi inversa unei figuri faţă de un pol dat O şi cu o putere dată k figura formată de inversele punctelor acelei figuri.

3. Definiţia inversiunii se deosebeşte de definiţia omotetiei: în loc de un raport constant, e vorba de un produs constant.

Raportul de omotetie era o constantă abstractă, un număr fără dimensiuni. Constanta k numită putere de inversiune este un număr concret, are dimensiunile unei suprafeţe, căci e produs de două segmente.

Puterea de inversiune poate fi pozitivă sau negativă. In cazul când $k > 0$, punctele M şi M' sunt de aceeaşi parte a lui O, căci produsul a două segmente pe o axă, are semnul pozitiv, când segmentele sunt în acelaşi sens. In cazul când $k < 0$, segmentele OM şi OM' au sensuri contrarii, deci O se află între M şi M'.

Puterea de inversiune fiind o mărime fizică concretă, se va exprima în unităţi; vom spune, de pildă că valoarea lui k depinde de mărimea unităţii de suprafaţă aleasă.

4. Să vedem ce se întâmplă când aplicăm transformarea prin inversiune diferitelor puncte din plan.

Există puncte ale planului care să coincidă cu inversele lor? In relaţia $OM \cdot OM' = k$ ar trebui ca M' să fie identic cu M.

$$OM \cdot OM = k$$
$$OM = \sqrt{k}.$$

Se vede imediat că această expresie n'are nici un sens, când k e negativ. Prin urmare o inversiune negativă nu are nici un punct care să coincidă cu inversul său.

Pentru $k > 0$, această condiţie e îndeplinită de o infinitate de puncte: ele alcătuesc un cerc cu centrul în pol şi de rază $= \sqrt{k}$. Acest cerc se numeşte cerc de inversiune.

Cercul de inversiune este locul geometric al punctelor din plan în care fiecare punct coincide cu inversul său. Aceste puncte se numesc puncte duble ale transformării.

Dacă o figură oarecare intersectează cercul de inversiune într'un punct A, este evident că inversa ei, intersectează cercul de inversiune tot în A.

5. Putem construi inversul unui punct, când ni se dau elementele care determină inversiunea. Vom considera cazul când $k > 0$ şi în loc să se dea valoarea numerică a lui k, se dă mărimea razei cercului de inversiune, a cărei valoare este $\sqrt{k}$. Să notăm această rază cu R.

Fie M un punct exterior cercului de inversiune. Relaţia $OM \cdot OM' = R^2$ exprimă că raza cercului

de inversiune e medie proporţională între OM şi OM'.

Folosind teorema catetei se poate obţine uşor inversul M' al lui M · OM e ipotenuza unui triunghiu dreptunghic, care va avea o catetă rază în cercul de inversiune; OM' va fi proiecţia acestei catete pe ipotenuză. In acest scop din M vom

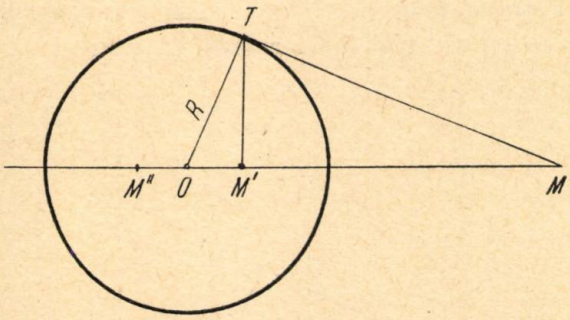


Fig. 3

duce la cercul de inversiune tangenta MT. Coborând din T o perpendiculară pe OM aflăm punctul M'.

Când M e interior cercului, avem de construit acelaş triunghi, în care ştim acum o catetă şi proiecţia ei pe ipotenuză.

Ducem perpendiculara MT pe OM şi în punctul de intersecţie a perpendicularei cu cercul de inversiune, construim tangenta la acest cerc.

Ea determină pe prelungirea lui OM, punctul M'.

Pentru construcţia inversului unui punct în inversiune negativă, va trebui să situăm segmentele OM şi OM' de o parte şi de alta a punctului O. Produsul valorilor lor absolute trebue să fie $-k$, de vreme ce k e negativ. Vom folosi teorema înălţimii şi vom construi un triunghi MTM' dreptunghic în T în care $OT = \sqrt{-k}$ este înălţimea cunoscută iar OM e deasemenea cunoscută.

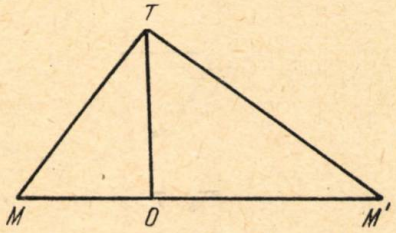


Fig. 4.

Inversul unui punct M într'o inversiune negativă se mai poate construi şi ţinând seama de următoarele relaţii

$$OM \cdot OM' = k \qquad (O;\ M;\ M' \text{ colineare})$$

$$OM \cdot OM'' = -k \qquad (O;\ M;\ M'' \text{ colineare})$$

de unde prin împărţire se obţine

$$\frac{OM'}{OM''} = -1; \quad OM' = -OM''$$

ceeace exprimă că punctele M' şi M'' sunt simetrice faţă de polul de inversiune.

Inversul unui punct M într'o inversiune de putere negativă se obţine luând simetricul faţă de pol al inversului punctului dat într'o inversiune de putere egală în valoare absolută.

6. Ne propunem să stabilim o relaţie fundamentală ce leagă o pereche de puncte M şi N de inversele, lor M' şi N'.

Fie O polul de inversiune şi k puterea de inversiune, iar M şi N perechea de puncte date. Inversele lor, M' şi N' vor satisface atunci, conform definiţiei relaţiile:

$$\begin{gathered} O;\ M;\ M' \text{ colineare } O;\ N;\ N' \text{ colineare} \\ OM \cdot OM' = k; \quad ON \cdot ON' = k \end{gathered} \tag{4}$$

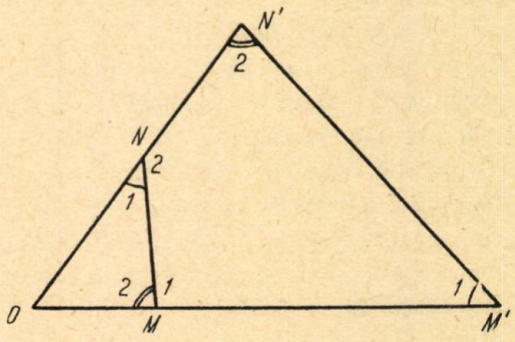


Fig. 5.

Din (4) deducem:

$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON'$$

deci

$$\frac{OM}{ON} = \frac{ON'}{OM'} \tag{4'}$$

Din figura de mai sus rezultă că $\Delta OMN \sim \Delta OM'N'$, fiindcă au un unghi comun, cuprins între laturi proporţionale.

Din asemănarea acestor triunghiuri se pot trage următoarele concluzii:

a) $\sphericalangle M_1' = \sphericalangle N_1$

$\sphericalangle M_2 = \sphericalangle N_2'$.

In această situaţie particulară segmentele MN şi $N'M'$ sunt antiparalele în unghiul MON.

b) $\sphericalangle M_1 + \sphericalangle N_2' = 180°$

$\sphericalangle N_2 + \sphericalangle M_1' = 180°$

de unde rezultă că patrulaterul $MNM'N'$ e inscriptibil.

c) Din asemănarea triunghiurilor OMN şi $OM'N'$ deducem

$$\frac{M'N'}{OM'} = \frac{MN}{ON}$$

sau

$$M'N' = MN \cdot \frac{OM'}{ON}$$

şi înlocuind pe $OM' = \frac{k}{OM}$ ajungem la formula

$$M'N' = MN \frac{k}{OM \cdot ON} .$$

In consecinţă, dându-se o pereche de puncte şi inversele lor se vede că:

a) *Segmentul ce uneşte o pereche de puncte şi cel ce uneşte perechea inverselor lor sunt antiparalele în unghiul razelor de inversiune.*

b) *Cele patru puncte sunt conciclice.*

c) *Segmentul ce uneşte inverse le perechii de puncte date poate fi calculat, cunoscând poziţia punctelor date, cu ajutorul unei formule.*

7. Ne propunem acum să găsim transformatele prin inversiune a figurilor geometrice des întrebuinţate: dreapta şi cercul.

A) In cazul dreptei se pot prezenta două cazuri:

a) *Dreapta d trece prin pol.* Fiecare punct M al dreptei d are un invers pe OM, adică pe dreapta d. Prin urmare: *o dreaptă ce trece prin pol se transformă prin inversiune în ea însăşi.*

b) *Dreapta* d *nu trece prin pol.* Vom considera acest caz ca o problemă de loc geometric, aşa cum trebue considerată de fapt orice problemă de transformare a unei figuri geometrice.

Se cere locul geometric al punctului M' inversul — într'o inversiune dată — al unui punct M ce descrie o dreaptă d.

Punctul M' e inversul lui M. Dacă d e locul geometric al lui M, inversul lui d e locul geometric al inversului lui M.

Considerăm un punct particular al dreptei d, punctul A—proiecţia polului pe dreapta d—acesta va avea ca invers un punct A' bine determinat.

Pentru a construi inversul M' al unui punct oarecare M de pe dreapta d vom ţine seamă de teorema precedentă şi anume că patrulaterul $AMM'A'$ e inscriptibil, deci unghiul $\sphericalangle OM'A' = \sphericalangle OAM = 90°$.

Aşa dar, din punctul M' se vede segmentul fix OA' sub un unghi de 90°. De unde rezultă că locul lui M' e cercul de diametru OA'. Prin urmare:

Teoremă: *Inversul unei drepte ce nu trece prin pol este un cerc ce trece prin pol şi în care diametrul ce trece prin pol e perpendicular pe dreapta dată.*

De aci, se vede că prin inversiune se schimbă forma unor figuri geometrice, lucru care nu se întâmplă în cazul omotetiei.

Ne-am putea face o imagine a acestui fenomen comparându-l cu fenomenul fizic al imaginei într'o oglindă sferică. Privind într'un glob lucitor imaginea unei sârme întinse, vom vedea această imagine virtuală ca şi cum s'ar afla în interiorul globului, iar sârma pare că ar avea ambele capete aduse către centrul globului formând un cerc.

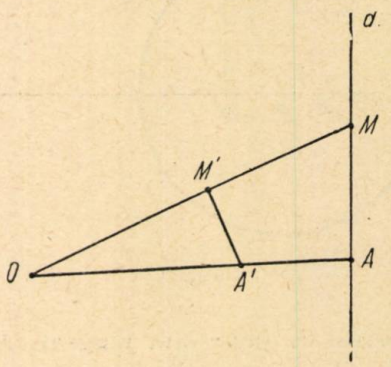


Fig. 6

B) Să studiem acum transformatul prin inversiune al unui cerc.

Ne punem mai întâi întrebarea în ce cazuri — la fel ca la dreaptă — cercul se transformă în el însuşi. Un astfel de exemplu îl constitue chiar cercul de inversiune, despre care am vorbit. Acest cerc se transformă prin inversiune în el însuşi (şi anume fiecare punct al său în el însuşi).

Să presupunem o inversiune dată de pol O şi putere k şi un cerc C ce nu trece prin polul de inversiune (fig. 7).

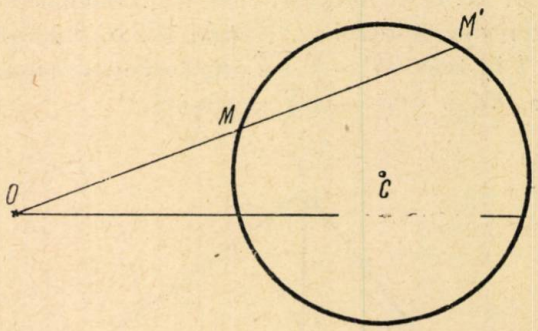


Fig. 7

Punând condiţia ca cercul C să se transforme în el însuşi, va trebui ca oricare ar fi secanta OMM' dusă din pol la cercul C, produsul $OM \cdot OM'$ să fie egal cu k, ori această constantă k trebue să fie egală cu puterea polului faţă de cerc.

Reciproc, dacă modulul de inversiune este egal cu puterea polului faţă de cercul dat, atunci acesta se transformă prin inversiune în el însuşi.

În adevăr, se ştie dela teorema puterii unui punct faţă de un cerc că oricare ar fi poziţia secantei OMM', produsul $OM \cdot OM' = p$. Cum noi am presupus că $k = p$, va rezulta că $OM \cdot OM' = k$, O, M, M' fiind colineare, iar M şi M' pe cerc. Deci oricărui punct M de pe cerc îi corespunde un invers M' diferit de M, iar punctele de tangenţă fiind duble, coincid. Rezultă teorema:

Condiţia necesară şi suficientă ca un cerc C să se transforme prin inversiune în el însuşi, este ca modulul de inversiune să fie egal cu puterea polului faţă de cercul C.

Să presupunem că mai există un cerc C, care printr'o inversiune se transformă în el însuşi. Dacă considerăm şi cercul de inversiune, cercul C va trebui să fie neapărat secant cu cercul de inversiune, întrucât unui punct din interiorul cercului de inversiune (situat pe cercul C) îi corespunde în inversiune un punct în afara cercului de inversiune şi reciproc.

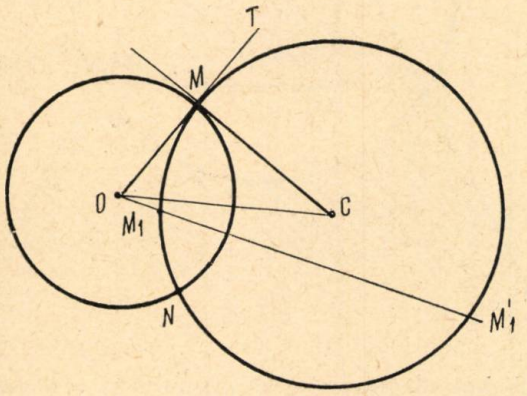


Fig. 8

Fie M, N punctele de intersecţie ale acestui cerc cu cercul de inversiune (fig. 8). Ţinând seamă de cele demonstrate anterior avem $OM \cdot OM' = k = p$, unde $p = OM^2$. Punctele M, N de intersecţie ale cercului C cu cercul de inversiune sunt singurele puncte duble. De aci rezultă că OM e tangentă la cercul C şi deci CM e perpendiculară pe OM. OM fiind rază în cercul de inversiune, relaţia de mai sus ne spune că CM e tangentă la cercul de inversiune în punctul M. Dreptele OM şi CM, razele cercurilor considerate sunt deci tangente respectiv la cercul de inversiune şi cercul C dat. Ştiind că unghiul a două curbe care se tae într'un punct este egal cu unghiul tangentelor în acest punct la cele două curbe, rezultă că cercurile O şi C sunt ortogonale.

Am demonstrat deci, că pentru ca un *cerc să se transforme prin inversiune în el însuşi e necesar ca el să fie ortogonal cercului de inversiune.*

Ne propunem să demonstrăm că această condiţie e suficientă. In adevăr, să presupunem că ni se dă un cerc C ortogonal cercului de inversiune O. Să arătăm că acest cerc se transformă prin inversiune în el însuşi. Cercurile fiind ortogonale avem $MT \perp MT'$, dacă vom duce razele OM şi CM, ele vor fi tangente respectiv la cercurile C şi O. De aci rezultă că $OM \cdot OM' = OM^2 = p$ (M fiind un punct abitrar al cercului C) unde p e puterea lui O faţă de cercul C. Am ajuns, deci, la un caz deja studiat, unde am arătat că cercul se transformă în el însile.

Am demonstrat, deci, următoarea teoremă:

Condiţia necesară şi suficientă ca un cerc să se transforme în el însuşi, prin inversiune, este ca el să fie ortogonal cercului de inversiune.

De aci rezultă că toate cercurile ortogonale cercului de inversiune se vor transforma în ele însile.

Am răspuns până acum următoarei întrebări: care sunt cercurile care se păstrează prin inversiune?

Ca şi la dreaptă propunem să arătăm în ce se transformă prin inversiune un cerc care:

a) trece prin polul de inversiune;

b) nu trece prin polul de inversiune.

In primul caz *un cerc care trece prin pol are ca figură inversă o dreaptă perpendiculară pe diametrul ce trece prin pol.*

Această teoremă este reciproca unei teoreme stabilită anterior relativă la inversa unei drepte ce nu trece prin pol.

Demonstraţia acestei teoreme se face pe o cale identică cu a teoremei directe, luând drept punct particular pe cerc, punctul diametral opus polului O.

Din cele spuse, rezultă că putem înlocui dreptele cu cercuri şi reciproc, lucru care prezintă avantagii în rezolvarea mai simplă a problemelor de relaţii metrice, construcţii grafice, conciclicitate, etc.

Să considerăm acum cazul general, adică să găsim inversul unui cerc oarecare, polul fiind un punct oarecare O nesituat pe cercul C şi puterea de inversiune fiind k.

Luând un punct M pe cercul dat O, inversul M' al lui M e un punct pe dreapta OM, astfel încât

$$OM' \cdot OM = k$$

Dreapta OM taie a doua oară cercul dat în N şi indiferent de poziţia punctului M pe cercul dat, putem scrie că puterea p a punctului O faţă de cerc este $OM \cdot ON$.

Deci $OM \cdot ON = p$.

Împărţind membru cu membru ultimele două egalităţi se obţine:

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{k}{p}$$

complectată cu observaţia că O, M', N *sunt colineare.*

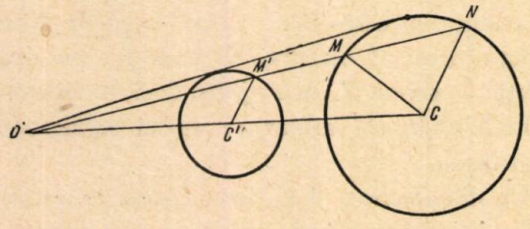


Fig. 9

k şi p sunt constante şi au fiecare din ele dimensiunea unei suprafeţe. Raportul lor e deci o constantă abstractă. Relaţiile de mai sus exprimă că M' e omoteticul lui N în raportul cunoscut $\frac{k}{p}$, faţă de polul O. Se ştie că locul omoteticului unui punct este omoteticul locului acelui punct, deci locul punctului M' este omoteticul locului N, adică omoteticul cercului dat.

Am stabilit teorema: *Inversul unui cerc oarecare e un cerc omotetic cu cercul dat în raportul* $\frac{k}{p}$, *faţă de polul de inversiune.*

Acum e uşor de văzut că cercurile care se păstrează prin inversiune, trebue să satisfacă la condiţia ca raportul de omotetie $\frac{k}{p}$ să fie egal cu 1, deci $k = p$, condiţie pe care am stabilit-o anterior.

Caz particular: Să căutăm transformatul prin inversiune al unui cerc C, în care luăm drept pol chiar centrul cercului.

Inversul M' al unui punct curent M de pe cerc se va afla la distanţa $OM' = \frac{k}{OM}$ (= constant) de pol. Deci se va găsi pe un cerc concentric cu cercul C. Când M descrie cercul C, inversul său M' va descrie cercul C' inversul cercului dat, cercul C' concentric cu cercul dat. Dacă variem puterea de inversiune, vom obţine o infinitate de cercuri concentrice ce acoperă planul.

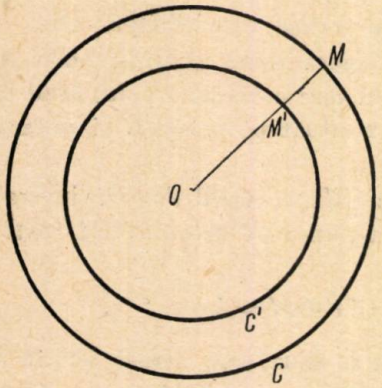


Fig. 10.

8. Cu aceste cunoştinţe putem construi inversele oricăror figuri formate din drepte şi cercuri. Dăm mai jos un exemplu.

a) Ce devine prin inversiune domeniul interior unui triunghi echilateral ABC înscris într'un cerc, puterea fiind egală cu patratul laturii, iar polul fiind vârful A al triunghiului.

Punctele B şi C rămân fixe, iar punctele situate pe coardele AB şi AC se transformă în puncte situate pe aceste drepte în exteriorul cercului dincolo de B şi C. Latura BC se transformă în arcul de cerc BC. Rezultă că interiorul triunghiului ABC va deveni porţiunea haşurată formată din arcul BC şi semidrepte ce pornesc din B şi C.

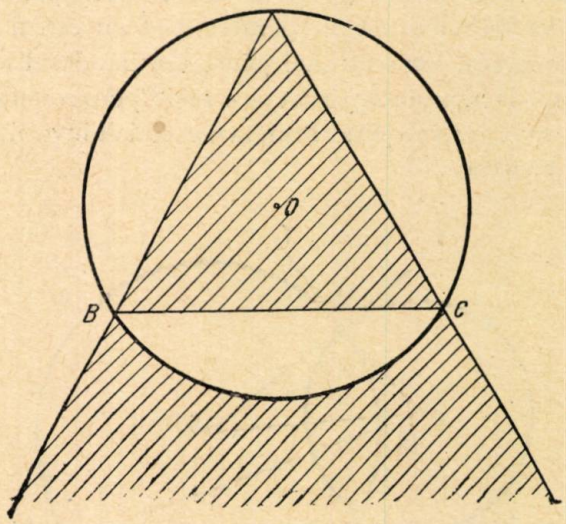


Fig. 11.

Trebue să observăm că o suprafaţă care conţine polul se transformă într'o suprafaţă care se întinde până la infinit.

Proprietăţi generale ale inversiunii

1. Din considerentele precedente, am văzut că inversiunea e o transformare care, în genereal, deformează figurile. Fixând în plan polul şi desenând cercul de inversiune, putem să ne închipuim că, prin inversiune, interiorul cercului este scos în afară şi întins astfel încât să acopere restul infinit al planului, exterior cercului şi reciproc.

Ca o consecinţă, segmente şi arii infinite pot deveni finite şi vice versa, iar natura curbelor nu se păstrează întotdeauna, unele cercuri devin drepte şi reciproc.

Deasemenea dacă două figuri sunt egale, inversele lor nu mai sunt tot figuri egale, decât în unele cazuri particulare. Nici raportul a două lungimi nu se menţine într'o transformare prin inversiune.

Sunt însă şi proprietăţi ale figurilor pe care inversiunea nu le alterează; de pildă: Dacă pe o curbă

un punct B se află între A şi C şi pe curba inversă B' se va află între A' şi C'.

Dacă trei linii sunt concurente, şi inversele lor sunt concurente.

2. Inversiunea lasă nealterat şi unghiul a două curbe.

Pentru a demonstra că unghiul a două curbe se păstrează, demonstrăm o lemă prealabilă.

Dându-se o curbă C şi inversa ei C', unghiurile pe care tangentele în două puncte corespunzătoare M şi M' la curbe le fac cu raza de inversiune OMM' sunt egale dar invers orientate.

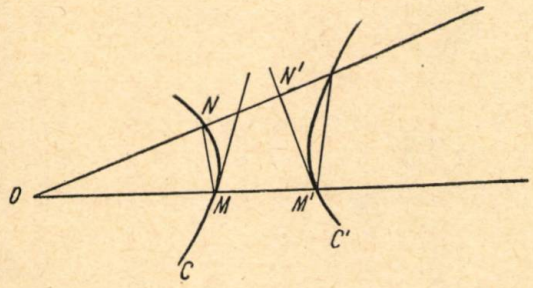


Fig. 12

In adevăr, fie M un punct al curbei C şi M' inversul său pe curba C'. Fie un punct N pe curba C apropiat de M şi N' inversul său pe curba C'. Coardele MN şi $M'N'$ fiind antiparalele în unghiul O, $\sphericalangle M'MN$ şi unghiul exterior N' sunt egale între ele.

Ce se întâmplă acum când N se apropie de M? Secanta ONN' se apropie de OMM', iar punctul N' de N. Coardele MN şi $M'N'$ vor tinde să devină tangente în M şi respectiv în M'. Dar egalitatea dintre unghiul M şi $\sphericalangle N'$ se menţine în timpul acestei mişcări, deşi fiecare din unghiuri se modifică. Când N ajunge să se confunde cu M, unghiul M. devine unghiul dintre OM şi tangenta în M la curba C, iar unghiul N' devine unghiul dintre ON (identică cu OM) şi tangenta în N' (identic cu M') la curba C'. Lema e demonstrată.

Putem demonstra acum teorema enunţată.

Fie C_1 şi C_2 două curbe care se tae în M, iar C_1' şi C_2' inversele lor care se tae în M'. Ducem dreapta OMM'. Conform teoremei precedente

$$\sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_1'$$

$$\sphericalangle M_2 = \sphericalangle M_1'$$

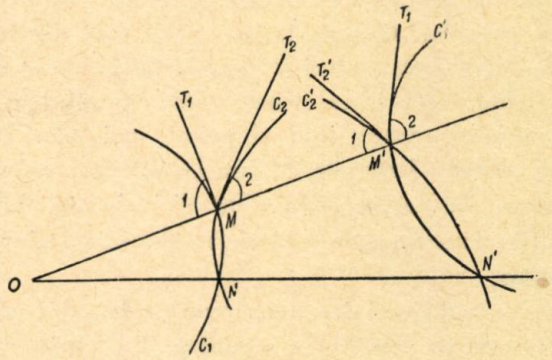


Fig. 13

Scăzând din 180°, obţinem

$$\sphericalangle M_3 = \sphericalangle M_3'.$$

Teoremă: *Unghiul a două curbe se păstrează prin inversiune.*

Consecinţă: Proprietatea de tangenţă între două cercuri sau a unui cerc cu o dreaptă se păstrează prin inversiune.

Două drepte paralele se transformă în două cercuri tangente între ele în polul de inversiune.

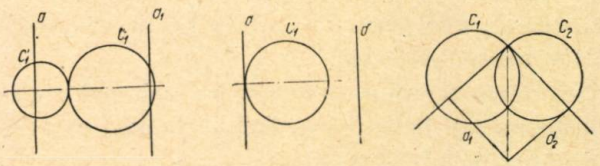


Fig. 14

Figura formată dintr'un cerc tangent unei drepte în pol, se transformă în două drepte paralele.

Două cercuri ortogonale, în pol, se transformă în două drepte perpendiculare şi reciproc.

STRUCTURA ATOMICĂ A UNEI SUBSTANŢE

DUPĂ ARTICOLUL LUI A. I. CHITAIGORODSCHI (MOSCOVA)
DIN FIZICA IN ŞCOALĂ Nr. 1—1953

Structura atomică a unei substanţe poate fi privită din punct de vedere «dinamic», dacă se ia în considerare forţele care acţionează între atomi, sau «geometric», dacă se ia în considerare aşezarea atomilor.

Reprezentarea cea mai complectă a structurii unei substanţe nu poate fi posibilă decât prin cunoaşterea alcătuirii ei, atât din punct de vedere dinamic cât şi geometric.

In stadiul actual al ştiinţei nu se poate spune însă prea mult despre caracterul forţelor care acţionează între atomi.

Trebue spus însă că prezentarea problemei în forma de mai sus nu este riguros corectă, deoarece particulele care interacţionează direct nu sunt atomii, ci nucleele şi electronii, care intră în alcătuirea atomilor. Complexitatea problemei devine inteligibilă, dacă amintim deosebirile pronunţate între caracterul interacţiunii între atomii legaţi prin valenţe, între ioni şi între molecule. De obicei aceste forţe de caractere diferite există simultan în acelaşi corp. De aici decurg dificultăţile de a formula o teorie asupra interacţiunii atomilor.

Totuşi, în ultimul deceniu, a avut un deosebit succes cercetarea structurii atomilor din punct de vedere «geometric». Folosind metodele electronografice, roentgenografice, iar în ultimii ani şi metodele neutronografice pentru analiza structurală, fizicienii au reuşit să creeze un tablou al structurii atomice a unei substanţe care se găseşte în diferite stări fizice.

Starea gazoasă se caracterizează prin mişcarea dezordonată a moleculelor. Structura moleculelor pentru substanţele în stare gazoasă este acum suficient de bine studiată.

Pentru majoritatea moleculelor mai simple, au fost determinate prin experienţe distanţele între centrele atomilor care intră în alcătuirea lor. Afară de aceasta, s'ar putea «contura» în mod aproximativ fiecare moleculă.

Înăuntrul figurilor ce reprezintă volumul moleculelor, arătate în fig. 1, este inclusă, în mod practic, substanţa moleculei. Naşterea acestor forme moleculare se datoreşte acţiunii forţelor care leagă atomii în moleculă. Sub acţiunea acestor forţe atomii se strâng unul într'altul, încât se turtesc şi iau naştere moleculele aşa cum sunt arătate în figura 1, ca fiind compuse din bile tăiate.

In condiţii normale, într'un cm^3 de gaz (la temperatura normală şi presiune atmosferică) se găseşte un număr imens de molecule aproximativ 27.10^{18}. Fiecărei molecule îi revine un volum de $0{,}4.10^{-19}$ cm^3, adică un cub mic cu o latură de aproximativ $0{,}3.10^{-6}$ cm. Moleculele însăşi, sunt însă şi mai mici. De exemplu, moleculele oxigenului şi azotului, au dimensiunea maximă de 0,4 milimicroni, adică $0{,}4.10^{-7}$ mm. Aceasta înseamnă că distanţa medie între molecule este de 10 ori mai mare decât dimensiunea maximă a unei molecule. Deci volumul mediu al gazului care revine unei molecule, este de aproximativ 1000 ori mai mare decât volumul moleculelor însăşi.

Să reprezentăm o suprafaţă orizontală de 1 m^2, pe care sunt aruncate dezordonat 100 pietricele. Tot astfel sunt dispuse şi moleculele unui gaz.

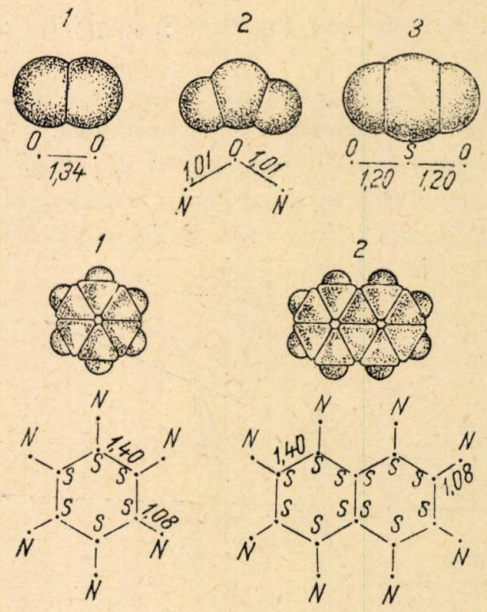


Fig. 1

Dimensiunile exterioare ale moleculei sunt prezentate la aceeaşi scară ca şi distanţele între centrii atomilor. Numerele de pe figură indică distanţele dintre atomi, în angströmi.

Forţa de atracţie între moleculele gazului lipseşte în mod practic. De aceea, poziţia moleculei date, nu depinde de locul moleculelor vecine, şi deci aşezarea reciprocă a moleculelor de gaz va urma legi statistice.

Separăm o porţiune a unui volum de gaz şi ne imaginăm că trasăm una, două, trei,... zece linii drepte. Dacă dispoziţia moleculelor este dezordonată numărul particulelor intersectate de aceste linii va fi acelaşi pentru toate liniile, indiferent de felul în care au fost ele trasate. Numărul moleculelor aşezate pe linii, poate să varieze — în sensul strict al cuvântului — în limite mici. Dar la un număr mare de molecule, aceste diferenţe, practic vorbind, dispar total.

Apare poate neclar, dece să fie cea mai probabilă tocmai o aranjare complect dezordonată a moleculelor de gaz. Pentru a demonstra acest lucru vom da următorul exemplu:

Pe un câmp oarecare cresc albăstriţe. Să împărţim mintal câmpul în mici pătrate egale şi să observăm cum se distribue pe acest câmp albăstriţele. Intr'un pătrăţel oarecare se va găsi o floare, în altul trei flori, iar într'un al treilea pătrăţel niciuna. Este evident că florile vor fi distribuite în pătrăţele într'un fel oarecare. Se poate presupune, desigur, că albăstriţele se vor găsi în toate pătră-

ţelele în acelaşi număr, însă o astfel de presupunere este foarte puţin probabilă şi iată de ce: dacă presupunem că pe câmp cresc 1000 de albăstriţe şi vom împărţi câmpul într'o sută de pătrăţele, rezultă că florile se pot distribui în această sută de pătrăţele în 10^{140} de feluri.

Printre aceste aranjamente poate să existe şi un astfel de aranjament încât pe fiecare pătrăţel să se găsească câte 10 flori. Insă o astfel de distribuţie poate fi numai una singură la un număr neînchipuit de mare de distribuţii de alte feluri. Putem admite sute, mii şi chiar milioane de aranjamente ordonate (alcătuire regulată), însă numărul lor va forma o părticică infimă din toate celelalte aranjamente posibile ale florilor pe câmp. Aşadar, dacă în principiu, toate aranjamentele sunt la fel de posibile, atunci cel mai probabil va fi aranjamentul dezordonat al particulelor, pur şi simplu din cauză că astfel de aranjamente sunt neînchipuit mai frecvente decât cele ordonate.

*

Un exemplu de aşezare regulată în distribuţia particulelor ne prezintă cristalele şi grăunţele cristaline. Fiecare grăunte de acest fel poate fi considerat ca o îngrămădire strânsă de particule (molecule, atomi sau ioni).

Deoarece forma solidă a materiei este de regulă şi cea mai compactă, urmează că « proeminenţele » unor molecule intră în « cavităţile » celor învecinate.

Oarecum grosolan se poate divide toată varietatea cristalelor în împachetări moleculare şi atomice (ionice). Geometric, aceasta înseamnă împachetări (îngrămădiri) de corpuri de o formă oarecare arbitrară şi împachetări de bile. Având în vedere volumul limitat al acestui articol, să ne oprim doar asupra cristalelor care pot fi privite ca o împachetare de bile identice.

Experienţele au arătat că cele mai simple cristale ni le putem închipui ca fiind construite după principiul împachetării celei mai compacte (strânse) a bilelor.

Pentru a ne reprezenta esenţa acestui principiu să luăm un număr de bile de biliard şi să ne apucăm să le aranjăm căutând a forma împachetarea cea mai compactă. Mai întâi să formăm un strat compact: el arată ca nişte bile de biliard adunate în « triunghi » înainte de începerea jocului (fig. 2). Notăm că o bilă din interiorul triunghiului are şase bile vecine, alăturate cu ea. Este clar că nu există alt mod de a forma un strat mai compact din aceste bile. Vom continua aranjarea prin suprapunerea straturilor unul peste altul. Dacă am situa bilele stratului următor direct deasupra bilelor primului strat am obţine o împachetare rară. Dacă vrem să aranjăm într'un volum oarecare cel mai mare număr de bile, trebue să introducem bilele stratului al doilea în adânciturile stratului situat dedesubt. Atragem atenţia că nu putem completa toate adânciturile prin bile de aceeaşi dimensiune. Insemnăm pe desen, adânciturile primului strat, care au rămas goale (fig. 3). Impachetarea compactă din

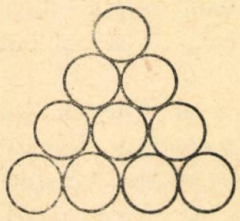


Fig. 2

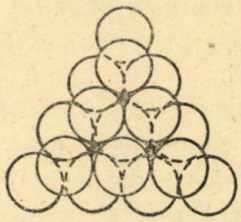


Fig. 3

2 straturi nu poate fi, de asemenea, decât una singură: noi putem desigur, să umplem cu bilele stratului al doilea adânciturile « negre » lăsând pe cele « albe » goale, dar din această cauză aspectul împachetării nu se va schimba. Totuşi situaţia se schimbă atunci când trecem la al treilea etaj.

Ca să obţinem o împachetare mai compactă, trebue să situăm bilele stratului al treilea în adânciturile celui de al doilea. Insă în acest caz, bilele stratului al treilea pot fi aranjate în două moduri: fie astfel încât centrele acestor bile să se găsească deasupra, centrelor bilelor primului strat, fie în aşa fel ca centrele lor să se găsească deasupra adânciturilor « negre ». Cele două construcţii cu câte trei etaje posedă aceeaşi densitate de împachetare, însă diferă esenţial una de alta. Prima se numeşte hexagonală, iar a doua cubică.

La suprapunerea stratului al patrulea mărim şi mai mult numărul de împachetări posibile; din două împachetări de câte trei straturi una hexagonală iar alta cubică, putem forma patru împachetări de câte patru straturi. Numărul împachetărilor de cinci straturi va fi deja opt, etc.

Este clar că numărul împachetărilor la fel de compacte de bile — împachetări care diferă între ele — poate fi foarte mare.

N. V. Belov, laureat al premiului Stalin, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe din U.R.S.S., a arătat cât de extraordinar de fecundă este idea împachetării compacte a bilelor, pentru studiul problemelor construcţiei cristalelor ionice şi a cristalelor metalice. Teoria lui despre împachetarea compactă ajută la prezentarea simetriei cristalelor şi, într'un şir de cazuri, chiar la prevederea structurii cristalelor. In baza teoriei împachetării compacte a bilelor, elaborată de

N. V. Belov, a fost clarificat un şir de chestiuni încă necercetate din domeniul mineralogiei silicaţilor şi a fost introdusă ordinea în acest capitol complicat al mineralogiei.

Aşezarea regulată în distribuţia particulelor e o proprietate pe care o au numai cristalele, şi se numeşte «ordine îndepărtată». Sensul acestui termen este clar. Intr'un mic cristal având dimensiunile de 1 mm, trasând o dreaptă care trece prin centrele atomilor, vom întâlni distribuţii repetate ale atomilor de sute de mii şi milioane de ori.

Majoritatea corpurilor solide (metale, pietre), sunt corpuri cristaline. In condiţii obişnuite, ele se compun din grăunţe cristaline înterpătrunse având fiecare dimensiunile de ordinul 0,001 mm. Intr'un astfel de grăunte, ordinea îndepărtată este exprimată absolut clar, deoarece în direcţia axelor celulei elementare a cristalului, atomii analogi se vor întâlni la distanţe riguros egale de sute şi mii de ori.

In marea majoritate, periodicitatea ordinei îndepărtate este egală cu două, trei sau patru straturi de atomi (molecule). Totuşi se întâlnesc cazuri extrem de interesante când structura începe să se repete peste zeci şi chiar sute de straturi.

Un astfel de exemplu ne prezintă carbura de siliciu, care se găseşte în natură în diferite stări modificate. Se întâlnesc cristale de carbură de siliciu, la care aspectul structural se repetă de abia după 243 straturi atomice.

Mărimea perioadelor de repetare la metale este neînsemnată, şi valoarea acestor perioade este egală cu 3—7 Å. La majoritatea cristalelor, perioadele nu întrec 20—30 Å.

* * *

Am stabilit că foarte multe corpuri solide nu sunt altceva, decât împachetări compacte de bile. Fracţiunea de spaţiu liber ce rezultă la împachetările cele mai compacte este 26%. Acestui fel de cristale îi aparţine de exemplu cuprul.

Topim o bucată de cupru. Cum putem să ne închipuim constituţia metalului topit? Experienţa arată că volumul substanţei creşte la topire cu aproximativ 3%. Această creştere de volum se produce pe seama volumului liber. El este egal acum cu 29%, şi nu cu 26%. Bilele au căpătat puţin loc liber, ele se pot îndepărta de poziţiile lor reglementare deranjând aşezarea regulată caracteristică cristalului. Pentru a ne închipui mai clar aşezarea reciprocă a atomilor în masa de cupru topit, să considerăm un model plan. Să aranjăm cât se poate de compact un mare număr de bile într'un poligon limitat, şi apoi să-i mărim suprafaţa, în aşa fel încât numărul de bile pe unitatea de suprafaţă să se micşoreze în aceiaşi proporţie ca la topire. Acum, printr'un dispozitiv mecanic simplu oarecare, scuturăm modelul. Bilele vor oscila în jurul poziţiilor lor de echilibru în prezenţa aceloraşi bile vecine. Uneori, când în mod întâmplător, lângă o bilă se va creea un loc liber de acelaşi volum cu bila, s'ar putea întâmpla un schimb de bile vecine.

Pentru a arăta că diferenţa de densitate între gaz şi lichid este o diferenţă principială, calitativă, trebue să studiem moleculele vecine cu molecula dată şi anume trebue calculat câte molecule se găsesc la distanţă egală cu o unitae, câte la două unităţi de lungime ş.a.m.d. faţă de molecula dată.

Această problemă poate fi soluţionată riguros exact pentru moleculele care au o formă oarecare, însă pentru uşurarea intuiţiei, vom pleca dela modelul sferic al modelului.

Să luăm o moleculă (sferă) oarecare drept centru şi să construim în jurul ei un şir de circumferinţe având razele de 3,5,7 . . . ori mai mari decât raza sferei ce reprezintă molecula dată.

Numărul moleculelor vecine apropiate, adică numărul acelor molecule ale căror centre se găsesc în interiorul regiunii celei mai apropiate trasate de noi, în raport cu molecula considerată, rezultă din calcul că este, în medie 11,6 adică aproape de 12.

Cunoaşterea aşezării, în ce priveşte distribuţia atomilor cuprului lichid, ne permite să ajungem şi la alte rezultate. Unele distanţe interatomice capătă o «greutate specifică» mai mare evidenţiindu-se faţă de celelalte. Aceasta constitue încă o deosebire principală între un lichid şi un gaz.

Intr'o împachetare de bile, care este cea mai compactă posibilă distanţele apropiate de acelea care există între o moleculă şi vecinele ei, se întânesc mult mai des decât toate celelalte.

Această aşezare unică, pe care o prezintă o particulă faţă de vecinele ei apropiate şi care dispar pe măsura depărtării de atomul sau de molecula considerată, poartă denumirea de ordine locală.

Desordinea în structura lichidului se manifestă prin aceea că în medie, faţă de un atom oarecare, ordinea locală este aceeaşi. Corpurile solide amorfe reprezintă antipodul cristalelor care au forma de poliedre regulate.

Totuşi, o bucată de metal deasemenea nu are o formă regulată, deşi nu este un corp amorf. Cauza stă în faptul că majoritatea corpurilor solide se compun din mici grăunţe cristaline.

In asemenea corpuri, proprietăţile lor cristaline nu se manifestă în particularităţile formei exterioare. Care este atunci criteriul de bază al cristalelor şi al corpurilor cu structură cristalină mărunţă? Un asemenea criteriu este în primul rând faptul că ele au un punct de topire bine precizat. La corpurile amorfe nu există un punct de topire fix. Unul din reprezentanţii corpurilor solide amorfe este sticla obişnuită. La încălzire sticla se înmoaie şi, pe măsură ce temperatura creşte, sticla trece în stare lichidă. Dacă încălzim o bucată de sticlă în creuzet, ea începe să se întindă în mod imperceptibil şi în cele din urmă capătă forma creuzetului. Se formează un lichid foarte vîscos, care dacă se continuă încălzirea, devine din ce în ce mai puţin vîscos, iar la temperaturi înalte, se toarnă dintr'un vas într'altul, tot atât de uşor ca şi apa.

Această comportare a corpurilor amorfe se explică prin particularitatea constituţiei lor, care ne îndreptăţeşte să le considerăm mai degrabă ca lichide decât ca solide.

După cum am văzut, corpurile cristalizate prezintă o ordine îndepărtată în distribuţia particulelor. Corpurile amorfe însă, prezintă numai o ordine locală în distribuţia particulelor şi prin aceasta ele nu se deosebesc de corpurile lichide.

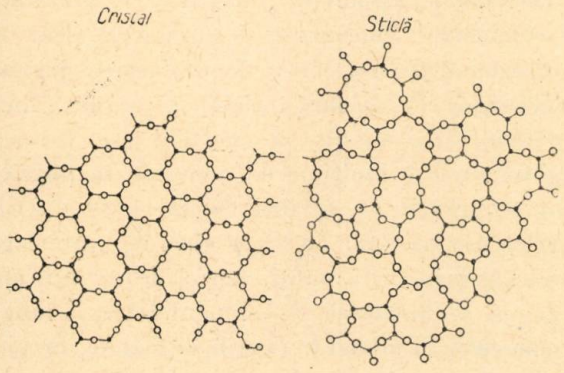


Fig. 4

In figura 4 sunt reprezentate schemele de aşezare a cuarţului (bioxid de siliciu) şi a sticlei de cuarţ. O substanţă chimică se poate obţine sub formă cristalină sau sub formă amorfă.

Asemănarea şi deosebirea dintre aceste două feluri de stări ale materiei se vede clar pe figură. Corpul amorf nu este decât un cristal deformat. La un corp cristalizat, precum şi la unul amorf, numărul şi caracterul alăturării particulelor vecine mai apropiate, este acelaşi.

Faptul că lipseşte ordinea îndepărtată, care este specifică corpurilor cristalizate, constitue cauza nemijlocită a faptului că nu există un punct de topire fix la corpurile amorfe. Topirea este fenomenul datorită căruia are loc trecerea calitativă a substanţei la forma în care ordinea îndepărtată dispare.

La corpurile amorfe, caracterul aşezării atomilor cu creşterea temperaturii nu se schimbă. Se schimbă numai mobilitatea atomilor, cresc oscilaţiile lor. Foarte puţini atomi la început şi din ce în ce mai mulţi apoi, capătă posibilitatea de a-şi schimba vecinii. In cele din urmă, numărul de astfel de schimbări pe secundă devine tot atât de mare ca şi la apă. Spre deosebire de cristale, poziţiile de echilibru faţă de care se produc oscilaţiile moleculelor nu sunt riguros fixe unele faţă de celelalte. Strict vorbind, o astfel de mişcare ar trebui s'o numim cu un alt termen decât oscilaţie; spre exemplu «învârtire pe loc». Astfel de «oscilaţii» se efectuează de către molecula lichidului înăuntrul volumului redus ce-i revine moleculei. In timpul acestei mişcări, ea rămâne în apropierea aceloraşi particule vecine. După câteva zeci şi sute de oscilaţii, una din vecinele moleculei date poate să înceteze întâmplător de a mai rămâne vecină apropiată şi «învârtitul pe loc» ce urmează este continuat într'o apropiere reînoită. Uşurinţa cu care molecula dată îşi poate schimba vecinele condiţionează mobilitatea părţilor lichidului, adică vîscozitatea lui. La un lichid, cu cât vecinele se schimbă mai rar, cu atât el este mai vâscos. O astfel de teorie molecularo-cinetică a constituţiei lichidelor a fost elaborată de fizicianul sovietic I. I. Frenkel, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe. Natural, creşterea temperaturii măreşte amplitudinea oscilaţiilor moleculei şi conduce la micşorarea vîscozităţii. De asemenea este lesne de înţeles că în aceleaşi condiţii de temperatură, un lichid va fi cu atât mai vîscos, cu cât va avea molecula de formă mai complicată. Multe lichide se solidifică înainte ca vîscozitatea lor să devină apreciabilă. Marea vîscozitate a cleiului, a mierei, a răşinelor lichide şi a uleiurilor, este legată de forma complicată a moleculelor lor.

Schimbul de locuri între molecule încetează, practic, atunci când lichidul vîscos se întăreşte. Modelând între degete o bucată de răşină, noi silim moleculele acestei bucăţi, printr'un efort exterior, să-şi schimbe între ele poziţiile: în acest fapt constă aşa numita deformaţie plastică. Suntem, de asemenea, în drept să socotim că schimbul de locuri între molecule, deşi are loc rar şi se efectuează încet, poate totuşi avea loc într'o bucată de răşină şi sub influenţa agitaţiei termice. Sticla este supusă la deformaţii plastice numai în stare încălzită. Urmează că în sticla solidă, schimbul între atomi se produce foarte rar. Schimbul de locuri între atomi se produce şi la cristale, ce e drept însă acest proces se produce extrem de lent.

Acum putem rezolva problema pusă mai înainte şi anume, unde să considerăm sticla — la corpurile solide, sau la cele lichide. Este evident că un corp amorf de felul sticlei conţine în el indiciile corpului solid, precum şi ai celui lichid. Caracterul repartiţiei reciproce a atomilor în sticlă este acelaşi ca şi la lichide, aşezarea prezentând numai ordinea locală.

Pe de altă parte, caracterul mişcării atomilor într'un corp solid amorf este tipic pentru cristale, în sensul că atomul, în mişcarea lui, rămâne în apropierea aceleiaşi particule, deoarece vecinii nu-şi schimbă locurile.

Unitatea structurală a fiecărui corp poate fi atomul, ionul, radicalul ion, sau molecula. Este clar că în ultimul caz, ordinea lichidului sau corpului amorf este într'un sens oarecare mai mare, deoarece molecula reprezintă un sistem de atomi fixaţi, în majoritatea cazurilor, în mod «rigid». Deoarece toate moleculele sunt identice, urmează că într'un lichid molecular (sau într'un corp amorf) unele distanţe, şi anume distanţele intermoleculare între atomii corespunzători se vor întâlni deosebit de des.

Dacă însăşi molecula posedă elemente de periodicitate, atunci ordinea locală este exprimată şi mai clar. Aceasta are loc în cazul cărbunelui amorf, la care o însemnată parte a atomilor formează nişte reţele periodice plane. Cu cât este mai mare dimensiunea acestor reţele şi cu cât este mai mare numărul reţelelor paralele, cu atât mai mare este ordinea în aşezarea atomilor cărbunelui amorf.

De grupa corpurilor amorfe aparţine un mare număr de corpuri organice, formate din molecule gigantice (mii de atomi). Acestui fel de corpuri îi aparţin masele plastice, capronul, mătasea artificială, etc. Fabricatele din aceste mase plastice au căpătat o răspândire extrem de întinsă în ultimii 10—20 de ani. Majoritatea covârşitoare a maselor plastice sunt substanţe organice, ale căror molecule sunt formate, în fond, din atomi de carbon.

Molecula unei mase plastice răspândite, numită politen, se compune din grupe de atomi CH_2 — ce se repetă de-a-lungul catenei în formă de zig-zag. Aşadar, distribuţia atomilor înăuntrul moleculei prezintă o ordine la depărtare (fig. 5). Dacă o astfel de moleculă lungă se încurcă, devenind ghem, atunci ordinea îndepărtată dispare. Ordinea locală rămâne, bineînţeles, deoarece fiecare atom de carbon, de exemplu, are neapărat printre vecinii săi un atom de hidrogen, ce se găseşte la distanţa de 1,1 Å.

Cea mai mare parte dintre suprapolimerii artificiali, aşa numitele substanţe cu molecule gigantice, reprezintă un ghem încurcat de catene. Bineînţeles, în privinţa unei astfel de substanţe nu poate fi vorba despre o ordine îndepărtată în repartiţia atomilor. Ordinea locală se caracterizează prin distanţele interatomice cel mai des întâlnite între atomii vecini ale aceleiaşi molecule, precum şi prin distanţele mijlocii între două catene vecine (aproximativ 4 Å).

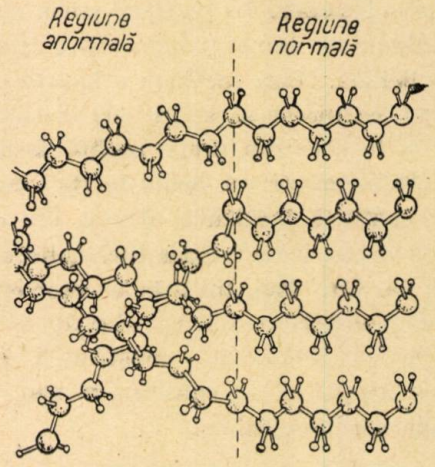


Fig. 5

Schimbarea formei corpurilor este însoţită în unele cazuri de interesante schimbări în repartiţia reciprocă a catenelor.

Intinderea alcoolului polivinic, a politenului a cauciucului vulcanizat şi a multor altor corpuri asemănătoare, constă în desfacerea ghemului moleculelor. Pe măsura întinderii, mai întâi într'o porţiune, apoi în alta a corpului, se formează regiuni unde o mulţime de molecule în formă de lanţ, au reuşit să se întindă şi să se distribue paralel, asemănător cu un pachet de crete legate între ele prin nişte punţi. Astfel de regiuni ordonate nu se formează de-a-lungul întregii lungimi a moleculei, ci numai în părţile ei răzleţe. Se poate spune că o moleculă «trece» prin câteva regiuni de acest fel. Cu cât este mai înalt gradul de întindere, cu atât mai mare este numărul regiunilor ordonate.

La suprapolimerele descrise mai sus, ne izbim de corpuri la care coexistă regiunile cu diferite grade de sistematizare (fig. 5). Există o trecere continuă dela regiunile unde are loc numai ordinea locală, la regiunile unde distribuirea moleculelor pe porţiuni mici imită structura cristalului. Aceasta se demonstrează, de exemplu, prin analiza structurală a suprapolimerilor, făcută cu ajutorul razelor Roentgen.

* * *

Cristalele sunt corpurile alcătuite în modul cel mai regulat. Drepte de-a-lungul cărora se repetă

la distanţe riguros egale, repartiţia atomilor, aşa a fost descrisă alcătuirea unui cristal.

Totuşi, un cristal real este mult mai complicat decât această schemă. Experienţa arată că fiecare cristal se compune din blocuri separate, uşor răsucite unul faţă de celălalt (fig. 6).

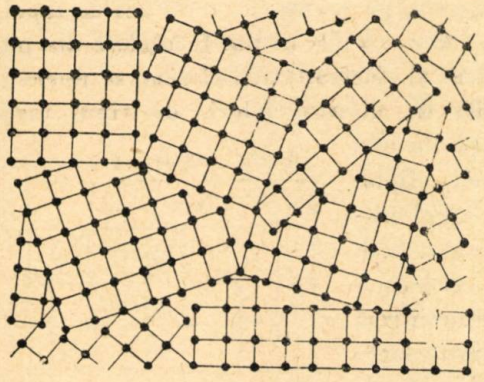


Fig. 6

Să ne imaginăm că tragem un fir printr'un şir de centre ale atomilor. Primul, al doilea, al treilea al 100-lea atom, se aşează pe fir, însă începând cu un oarecare al 101-lea sau 501-lea, şirul de atomi se depărtează de fir, formând cu el un unghi mic (dela jumătate de minut, până la zeci de minute de arc.) Apoi va urma din nou o regiune dreaptă, până ce se iveşte într'un punct oarecare, necesitatea unei înclinări foarte mici a firului. Punctul de înclinare a firului corespunde cu marginea blocului. Fiecare bloc este o bucată de reţea regulată. Inclinările firului se produc când spre dreapta, când spre stânga. De aceea, direcţia şirului de atomi de-a-lungul căruia trecem firul, se păstrează în medie cu mare exactitate de-a-lungul întregului cristal.

Cauza alcătuirii cristalului din blocuri rezidă evident în greutatea susţinerii ordinei la depărtare de-a-lungul distanţei mari. Afară de aceasta, în fiecare bloc se găsesc defecte într'un număr mai mare sau mai mic, fie sub forma de locuri « goale » fie sub forma de atomi străini incluşi în reţea. Este clar că în apropierea unui astfel de defect caracterul de regularitate a repartiţiei reciproce a atomilor va fi simţitor deformat. Pe măsură ce ne distanţăm de partea defectă, reţeaua se îndreaptă treptat (fig. 7).

Cele mai interesante defecte se formează datorită creşterii neordonate a cristalului. Observând creşterea unui cristal, ne miră particularitatea fundamentală a creşterii şi anume deplasarea paralelă a muchiilor.

Ai impresia că substanţa ce se depune construeşte muchia prin straturi; până ce un strat nu este terminat, nu începe să se construiască următorul.

Dacă din cauza unor întâmplări (de exemplu la cristalizarea rapidă) creşterea stratului s'a început din mai multe părţi, atunci se poate ivi aspectul reprezentat în fig. 8: noul strat se compune din câteva regiuni regulate, prezentând două tipuri. Dacă stratificarea următoare se produce de asemenea cu defecte, nu se formează insuliţe plane, ci insuliţe spaţiale cu împachetare regulată.

Pe marginea grăunţelor au loc « defectele » reţelei. In cazul cristalizării lente, îndepărtarea dela structura cristalului se iveşte rar. Elementele haotice în distribuirea atomilor, nu se manifestă totdeauna sub « forma stratificată », De exemplu: în aliajul fier-cobalt, atomii fierului şi ai cobaltului au câte opt vecini apropiaţi. Condiţionat, putem divide nodurile reţelelor cristalelor în vârfuri şi centre de cuburi. In cazul aşezării regulate, toate vârfurile sunt ocupate, ca să zicem aşa, de atomii fierului, iar toate centrele, de atomii cobaltului (fig. 9). Atâta timp cât numărul atomilor ce se găsesc pe locurile lor este mai mare decât numărul

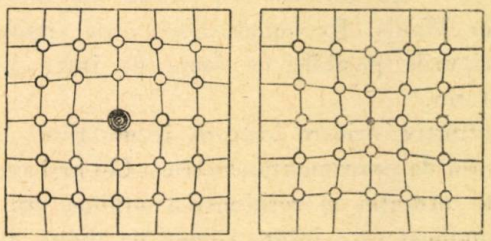
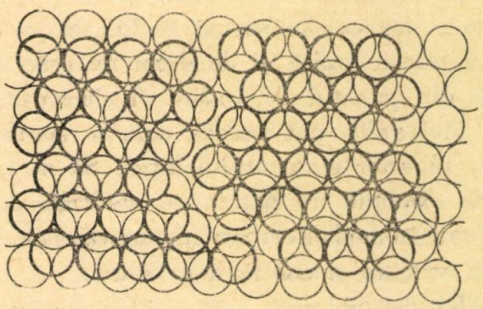


Fig. 7

de atomi ce ocupă locurile « străine », avem dreptul să vorbim despre « prezenţa » în cristal a unei aşezări parţiale la depărtare, deşi această aşezare este oarecum « defectă ». Ordinea la depăr-



porozitate

Fig. 8

tare dispare atunci când se şterge deosebirea între locurile « străine » şi cele « proprii », adică jumătate din atomi se găsesc pe locurile lor proprii iar cealaltă jumătate pe locurile străine.

La încălzirea cristalului, ordinea repartizării atomilor se schimbă treptat, adică procentajul de atomi care sunt aşezaţi pe locurile « străine » creşte. S'a aflat că există o temperatură deasupra căreia ordinea la depărtare chiar « defectă », adică parţială, nu mai poate exista. Această temperatură se numeşte λ—punct. Pentru aliajul Fe-Co, λ—punct se găseşte la 770°C.

La începutul articolului s'a arătat că greutăţile soluţionării problemei structurii « dinamice » a materiei constă în necesitatea de a ţine seama de existenţa concomitentă a diferitelor mecanisme de interacţiune a atomilor într'unul şi acelaşi corp.

Este lesne de înţeles că problema structurii dinamice se cercetează cel mai uşor în cazul acelor corpuri, la care avem de a face numai cu un singur fel de mecanism de interacţiune între particule. Din această categorie face parte diamantul, la care există o legătură de valenţă a atomilor, sarea de bucătărie, la care există o atracţie electrostatică a atomilor, nitrobenzenul cu interacţiune de dipol a moleculelor, argonul-lichefiat sau solidificat, neonul, criptonul-cu aşa numita interacţiune Van der Waals. Exemplele aduse nu epuizează toate tipurile posibile de forţe de interacţiune între atomi.

In definitiv, oricare forţe de interacţiune între atomi sunt de provenienţă electrică. Cel mai simplu caz este atracţia şi respingerea ionilor, un caz mai complicat este interacţiunea de dipol. Molecula de nitrobenzen este neutră în întregul ei, însă centrele de « greutate » a sarcinilor pozitivă şi negativă, nu coincid (norii electronici ai atomilor nu au o simetrie sferică în jurul nucleelor lor, de aceia fiecare moleculă are un moment de dipol. Moleculele care posedă un astfel de moment, se atrag între ele şi tind să se aşeze în aşa fel, încât momentele moleculelor vecine să fie antiparalele.

Interacţiunea ionică şi de dipol nu este unica posibilă din punctul de vedere al electrostaticei clasice. Moleculele pot poseda cum se spune, un moment superior momentului dipol. Să ne închipuim de exemplu un patrat pe vârfurile căruia sunt situate în mod alternativ nişte sarcini electrice egale ca valoare şi contrarii ca semn.

O astfel de moleculă este neutră în întregul ei, nu are moment dipol, însă posedă un moment de cuadrupol. Cu cât este mai înaltă ordinea momentului electric al moleculelor, cu atât mai slabă este interacţiunea lor. Există molecule care posedă un moment electric propriu (de un ordin oarecare) şi molecule la care momentul electric se induce atunci când ea se apropie de sarcina electrică a celeilalte molecule. De exemplu, aceeaşi moleculă de nitrobenzen, apropiindu-se de o moleculă de naftalină, care nu posedă moment electric, « polarizează », cum se spune de obicei, această moleculă, adică induce în ea un moment de dipol. Legătura între aceste două molecule se realizează mai departe, pe seama interacţiunii de dipol. Aşa dar, la interacţiunile ce pot fi înţelese din punctul de vedere al electrostaticii clasice, se referă interacţiunile de diferite feluri, de tipul următor: ion faţă de ion, ion-dipol, dipol-dipol, dipol-cuadrupol ş. a. m. d. Teoria clasică a interacţiunii lasă neexplicată legătura chimică de valenţă, precum şi aşa numitele forţe ale lui Van der Waals. Ambele aceste efecte se explică cu ajutorul mecanicii cuantice.

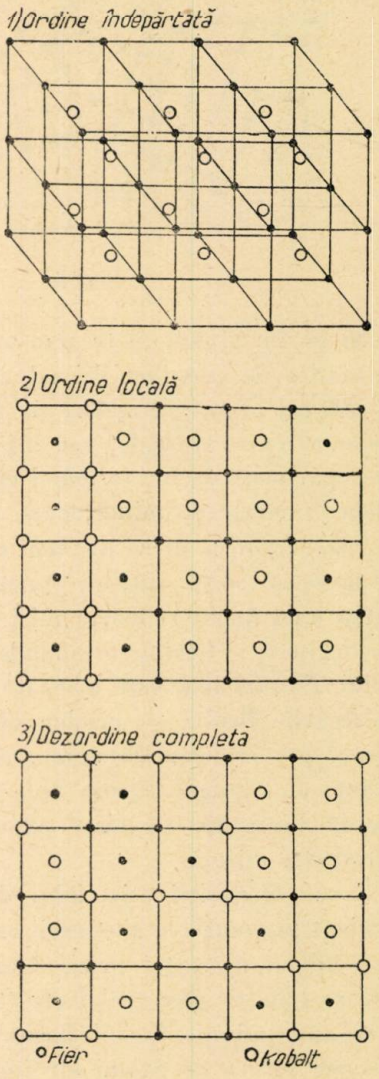


Fig. 9

In mecanica cuantică se demonstrează că interacţiunea electronilor având « spinii » orientaţi în sensuri contrarii, ne conduce la aşa numitele forţe de schimb. Termenul vine dela faptul că forţele se nasc atunci când atomii îşi schimbă electronii între ei.

Pentru explicarea coeziunii ce există între atomii argonului solid sau lichid (sau ai neonului), care nu posedă momente electrice chiar de ordinul superior, este necesar să ţinem seama de existenţa la atomi, a aşa numitelor oscilaţii de zero. (care trebue să aibă loc chiar la zero absolut al temperaturii, adică a oscilaţiilor necalorice). La apropierea atomilor, energia lor de zero se micşorează ceea ce înseamnă că chiar între atomii neutri din punctul de vedere electric, acţionează forţele de atracţie. Forţele de atracţie aduc atomii la o atât de mică distanţă, încât

straturile lor electronice încep, într'o măsură oarecare, să se interpătrundă. Situaţia de echilibru se obţine în cazul egalităţii forţelor de respingere a învelişurilor electrice. Problema structurii corpurilor solide şi lichide este de mai mulţi ani în centrul de atenţie al cercetătorilor şi va ocupa în viitor mult timp un loc de frunte, în cercetările savanţilor.

In desvoltarea problemei studiate, un mare rol îi revine ştiinţei sovietice, începând cu lucrările geniale ale savantului rus M. V. Lomonosov Ştiinţa despre elementele de dezordine la cristale a fost desvoltată de fizicianul Gorschi din Harcov, de academicianul L. D. Landau şi discipolii săi. Lucrări excelente, recompensate cu premiile Stalin, consacrate teoriei stării lichide şi amorfe, aparţin lui I. I. Frenkel, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi lui V. I. Danilov. Teoria împachetărilor compacte a bilelor a fost desvoltată în mod fructuos de N. V. Belov, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe din U.R.S.S.

Lucrările acestor savanţi sovietici, precum şi ale altora au ajutat la crearea unei imagini nete privitoare la structura materiei, a cărei cunoaştere a dat la rândul său, impuls unui număr imens de idei, extrem de fecunde pentru practică.

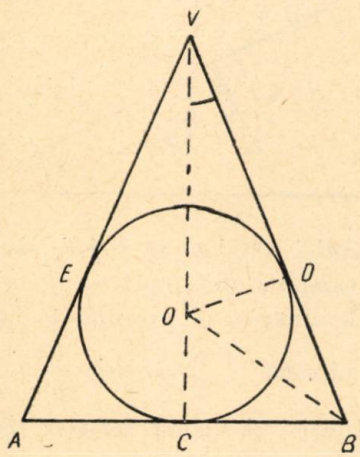
PROBLEME REZOLVATE

Problema 605

Unei sfere de rază r *i se circumscrie un con circular drept de volum minim. Să se determine unghiul din vârful secţiunii axiale a conului.*

S. S. Sinachievici (Leningrad)

Soluţie. Fie VAB secţiunea axială a conului' C, D, E punctele în care cercul mare determinat de secţiunea axială este tangent laturilor triunghiului VAB.



Notând $\sphericalangle DVC = 2\alpha$, vom avea:

$$OV = r \operatorname{cosec} 2\alpha,$$

$$VC = OV + OC = r(1 + \operatorname{cosec} 2\alpha),$$

$$\sphericalangle COB = \frac{1}{2} \sphericalangle COD = 45° + \alpha$$

şi

$$BC = r \operatorname{tg}(45° + \alpha)$$

Volumul conului este deci

$$V = \frac{\pi r^3}{3}(1 + \operatorname{cosec} 2\alpha) \operatorname{tg}^2(45° + \alpha)$$

V este minim când funcţia

$$f(\alpha) = (1 + \operatorname{cosec} 2\alpha) \operatorname{tg}^2(45° + \alpha)$$

este minimă. Deoarece

$$\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$$

$f(\alpha)$ se poate scrie:

$$f(\alpha) = \frac{(1 + \sin 2\alpha)^2}{\sin 2\alpha (1 - \sin 2\alpha)} =$$

$$= \frac{2}{(-2 \sin 2\alpha)(\sin 2\alpha - 1)(1 + \sin 2\alpha)^{-2}}.$$

Se vede uşor că $f(\alpha)$ va fi minimă când produsul dela numitorul ultimei fracţii va fi maxim. Aceasta are loc când

$$\frac{-2 \sin 2\alpha}{1} = \frac{\sin 2\alpha - 1}{1} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{-2}.$$

Ecuaţiile sunt compatibile şi dau

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{3}.$$

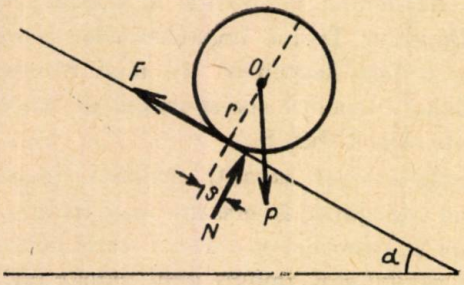
Unghiul căutat este deci $2 \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}$ sau 38°56′33′,2.

Problema 644

Pe un acelaş plan înclinat, depe aceeaşi linie orizontală li se dă drumul în acelaş timp la două cutii sferice identice. Una din cutii este plină cu un lichid, cealaltă cu o pastă solidă de aceeaşi greutate specifică cu lichidul. Care din aceste cutii ajunge cea dintâi jos la baza planului înclinat? Se va presupune că cutiile se rostogolesc, iar lichidul din prima cutie se poate mişca fără frecare pe pereţii acestei cutii.

Alexandru Stoenescu

Să rezolvăm problema prin aplicarea *teoremei echivalenței dintre variația energiei cinetice și lucrul mecanic.*



Forțele care acționează cutiile sunt aceleași în ambele cazuri și anume: greutatea totală a cutiei și a conținutului P, reacțiunea normală $N = P\cos\alpha$, deplasată cu distanța s din cauza frecării de rostogolire și frecarea de alunecare F. Să presupunem că aceste cutii coboară cu o distanță h măsurată pe planul înclinat. Lucrul mecanic pentru această deplasare este identic pentru ambele cutii și anume:

$$L = Ph\sin\alpha - Ns\frac{h}{r} = Ph\left(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha\right).$$

Energia cinetică inițială este nulă pentru oricare din cutii $E_0 = 0$.

După străbaterea distanței h, *cutia cu lichid* are o viteză v_e a centrului O și o viteză unghiulară de rotație ω_e în jurul lui O. Între v_e și ω_e avem relația:

$$v_e = \omega_e r$$

Energia cinetică în cazul acestei cutii se compune din energia în mișcarea de translație a cutiei și lichidului și în mișcarea de rotație *numai a cutiei* în jurul lui O (deoarece lichidul nu ia parte la această mișcare).

Notând cu E_1 această energie cinetică avem:

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_e^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_e^2$$

în care I_1 este momentul de inerție al cutiei în raport cu O.

Rezultă:

$$E_1 = \frac{v_e^2}{2}\left(\frac{P}{g} + \frac{I_1}{r^2}\right).$$

Aplicând teorema energiei cinetice:

$$E_1 = E_0 = L$$

obținem:

$$v_e^2 = \frac{2L}{\frac{P}{g} + \frac{I_1}{r^2}} = \frac{2Ph\left(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha\right)}{\frac{P}{g} + \frac{I_1}{r^2}} \qquad (1)$$

În cazul cutiei cu pastă, notând cu v_p și ω_p respectiv vitesa centrului O și vitesa unghiulară în jurul lui O și ținând seama că la mișcarea în jurul lui O ia parte și pasta avem: $v_p = \omega_p r$

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_p^2 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_p^2$$

în care I_2 reprezintă momentul de inerție al pastei în jurul lui O.

Prin aplicarea teoremei energiei cinetice

$$v_p^2 = \frac{2L}{\frac{P}{g} + \frac{I_1 + I_2}{r^2}} = \frac{2Ph\left(\sin\alpha - \frac{s}{r}\cos\alpha\right)}{\frac{P}{g} + \frac{I_1 + I_2}{r^2}} \qquad (2)$$

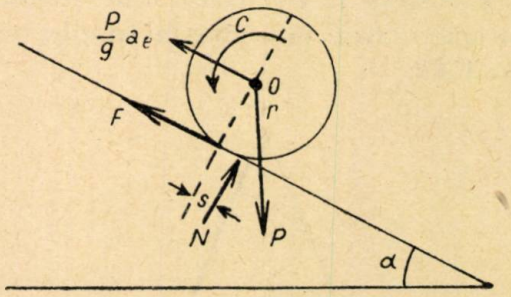
se vede ușor că:

$$v_e > v_p$$

pentru orice poziție, pentru orice valoare a lui h.

Rezultă că *prima cutie care ajunge jos este cutia umplută cu lichid.*

O altă soluție se poate da problemei prin aplicarea principiului lui *D'Alembert*: *forțele exterioare date, forțele de legătură și forțele de inerție formează la orice moment, pentru orice poziție un sistem de forțe în echilibru.*



În cazul cutiei *umplute cu lichid*, sistemul în echilibru se compune din greutatea P, reacțiunea N, frecarea de alunecare F; rezultanta forțelor de inerție din mișcarea de translație $\frac{P}{g}a_e$ (în care a_e este accelerația) și cuplul forțelor de inerție:

$$C = I_1\frac{a_e}{r}$$

corespunzător cutiei (lichidul nu intervine, deoarece nu se rotește). Prin aplicarea condițiilor de echilibru (două de proecții pe planul înclinat și pe normala la acest plan și una de moment în O) avem:

$$P\sin\alpha - F - \frac{P}{g}a_e = 0; \quad N - P\cos\alpha = 0$$

$$Fr - I_1\frac{a_e}{r} - Ns = 0$$

De unde:

$$N = P\cos\alpha;\quad F = P\sin\alpha - \frac{P}{g}a_e$$

$$\left(P\sin\alpha - \frac{P}{g}a_e\right)r - L\frac{a_e}{r} - sP\cos\alpha = 0$$

Rezultă:

$$a_e = \frac{P\sin\alpha - \frac{s}{r}P\cos\alpha}{\frac{P}{g} + \frac{I_1}{r^2}} \qquad (3)$$

In cazul *cutiei cu pastă*, ceeace diferă față de cutia cu lichid este cuplul forțelor de inerție care este $C = (I_1 + I_2)\frac{a_p}{r}$ în care a_p este acceleraţia corespunzătoare.

Prin calcule absolut identice celor de mai sus obţinem:

$$a_p = \frac{P\sin\alpha - \frac{s}{r}P\cos\alpha}{\frac{P}{g} + \frac{I_1 + I_2}{r^2}} \qquad (4)$$

Deoarece $a_e > a_p$ rezultă că ajunge jos *mai repede cutia umplută cu lichid.*

Legătura dintre cele două soluţii se stabileşte uşor şi anume prin derivarea în raport cu timpul a relaţiilor (1) şi (2) se obţin relaţiile (3) şi (4).

Menţionăm că problema aceasta a fost sugerată de o altă problemă din *Culegerea de probleme de Mecanică Raţională de Buchholtz, Voronkov, Monakov* şi anume problema 844:

« *Un pendul constă dintr'o bară dreaptă şi o sferă goală fixată de capătul ei, ale căror mase pot fi neglijate. Interiorul sferei se umple odată cu un lichid, iar a doua oară cu o substanţă solidă, cu aceeaşi densitate ca şi a lichidului. Să se afle lungimile pendulului simplu sincron în ambele cazuri, dacă raza de inerţie a volumului gol în raport cu diametrul său este K, iar distanţa dela centrul lui la axa pendulului este* a. (Se presupune că între lichid şi pereţii sferei nu există frecare şi că substanţa care umple golul în cazul al doilea nu se poate mişca în interiorul ei) ».

In răspuns se arată că în primul caz $l_1 = a$; în cazul al doilea $l_2 = a + \frac{u^2}{a}$ prin urmare *pendulul cu lichid oscilează mai repede* (perioada de oscilaţie mai mică) *decât cel cu substanţă.*

Problema 666

O baie având capacitatea de 200 litri apă este încălzită electric dela temperatura $t_1 = 8°C$ *la temperatura* $t_2 = 36°C$, *prin legarea la o reţea având tensiunea* $U = 220$ *volţi, în timp de 15 minute. Presupunând că randamentul băii este de 90%. Să se determine intensitatea curentului şi energia consumată.*

Angela Negulescu

Soluţie. Cantitatea de căldură necesară este

$$\frac{200.000}{0{,}9}(t_2 - t_1) = \frac{56.000.000}{9}\ \text{cal mici}$$

Va trebui deci să avem

$$0{,}24\times 220\times I\times 15\times 60 = \frac{56.000.000}{9}$$

de unde $I = 130{,}9$ amperi.

Energia consumată este:

$$W = 220\times 130{,}9\times 15\times 60 = 25.925.925\ \text{jouli.}$$

Problema 667

Să se afle raportul tensiunilor electromotoare E şi E' a două pile de rezistenţă R şi R' care se pun într'un circuit cu un galvanometru de rezistenţă X. Unind mai întâi cele două pile prin polii cu nume contrar, galvanometrul arată deviaţia 45, apoi dacă se unesc polii de acelaşi nume deviaţia este 15.

Cucula W. Dacos

Soluţie. Presupunem $E > E'$. Conform enunţului avem:

$$\frac{E + E'}{R + R' + X} = 45K \quad \text{şi}$$

$$\frac{E - E'}{R - R' + X} = 15K$$

Prin împărţire obţinem

$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{3R + 3R' + 3X}{R - R' + X},\quad \text{unde}\quad y = \frac{E}{E'}.$$

De aici rezultă

$$y = \frac{E}{E'} = \frac{2R + R' + 2X}{r + 2R' + X}.$$

Problema 668

Să se afle rezistenţa şi f.e.m. introdusă într'un circuit indus format din 400 spire în serie, ştiind că un curent de 10 amperi străbate un solenoid, cu miezul de fier lung de 1 m. ce are 600 spire şi că curentul se poate întrerupe într'un timp $t = 0{,}1$ *sec.; secţiunea miezului de fier fiind de 20 cm², iar coeficientul de permeabilitate 40.*

C. Oprea, Bucureşti

Soluţie. f.e.m. cerută este $E = N\frac{\Delta\Phi}{10^8 t}$, unde N este numărul spirelor circuitului indus iar t timpul în care are loc variaţia de flux.

In cazul problemei fluxul variază dela zero maxwelli la

$$\Phi = \frac{0{,}4\pi\mu n I s}{l} \text{ max., unde } \mu = 40,\ n = 600 \text{ spire},$$

$$I = 10 \text{ amperi},\ s = 20\,\text{cm}^2,\ l = 100\,\text{cm}.$$

Prin urmare

$$\Delta\Phi = \Phi - 0 = 60.288 \text{ Maxwelli}$$

$$E = 2{,}41152 \text{ Volţi}$$

Rezistenţa solenoidului fiind mică, rezistenţa celor 400 de spire poate fi calculată după formula

$$R = \frac{E}{I} = 0{,}241152 \text{ ohmi}.$$

Problema 670

Să se rezolve ecuaţia

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{3} - \sin x}.$$

Gh. I. Bercea

Soluţie. Ecuaţia se poate scrie

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{3} - \sin x}, \quad \text{de unde}$$

$$\sqrt{3}\sin x - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x, \quad \text{sau}$$

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$$

Inlocuind

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°,$$

obţinem

$$\cos(x + 60°) = -\cos 60°, \quad \text{sau}$$

$$\cos(x + 60°) = \cos 120°$$

$$x + 60° = K.\,360° \pm 120°,$$

de unde

$$x_1 = 2K\pi + \frac{\pi}{3}\ ; \qquad x_2 = (2K - 1)\,\pi$$

Problema 671

Să se arate prin inducţie completă că

$$3^{2n} > 2^{2n}(n + 1).$$

Soluţie. Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ inegalitatea se verifică. Vom arăta că dacă este valabilă pentru $n - 1$, este valabilă şi pentru n. Presupunem deci că $3^{2n-2} > n2^{2n-2}$. Deoarece $3^2 n > 2^n(n+1)$ (pentru n întreg şi pozitiv), înmulţind ultimile două inegalităţi, avem:

$$n \cdot 3^{2n} > n(n + 1)\,2^{2n} \quad \text{sau}$$

$$3^{2n} > 2^{2n}(n + 1)$$

adică inegalitatea cerută.

Problema 673

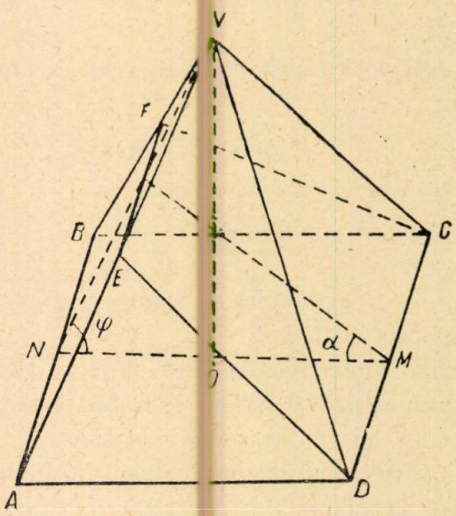
Intr'o piramidă regulată cu baza un patrat se face o secţiune cu un plan ce trece printr'o latură a bazei. Planul de secţiune şi planul unei feţe laterale fac respectiv cu planul bazei unghiurile α şi φ. Să se arate că aria S a secţiunii determinată de acest plan se poate calcula cu formula

$$S = \frac{\sin^2\varphi\cos\alpha}{\sin^2(\varphi + \alpha)}\,B$$

unde B este aria bazei.

Gh. Bazacov

Soluţie. Fie E, F punctele în care muchiile VA, VB ale piramidei patrulatere regulate $VABCD$



înţeapă planul de secţiune dus prin latura CD. Patrulaterul $EFCD$ este un trapez isoscel.

Fie M, N, P mijloacele segmentelor CD, AB, EF. In triunghiul MNP avem:

$$\overline{MP}\sin(\varphi - \alpha) = \overline{MN}\sin\varphi.$$

$$\overline{PN} = \overline{MN}\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Triunghiurile asemenea VEF şi VAB, ne dau

$$\frac{EF}{AB} = \frac{VP}{VN}, \quad \text{de unde}$$

$$\overline{EF} = \overline{AB}\,\frac{\dfrac{\overline{NO}}{\cos\varphi} - \dfrac{\overline{MN}\sin\alpha}{\sin(\varphi+\alpha)}}{\dfrac{\overline{NO}}{\cos\varphi}} =$$

$$= AB\left(1 - \frac{2\sin\alpha\cos\varphi}{\sin(\varphi + \alpha)}\right).$$

Prin urmare

$$S = \frac{1}{2}(\overline{EF} + \overline{CD}) \cdot \overline{MP} =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{MN}\,\frac{\cos\alpha\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi + \alpha)} = B \cdot \frac{\cos\alpha\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi + \alpha)}.$$

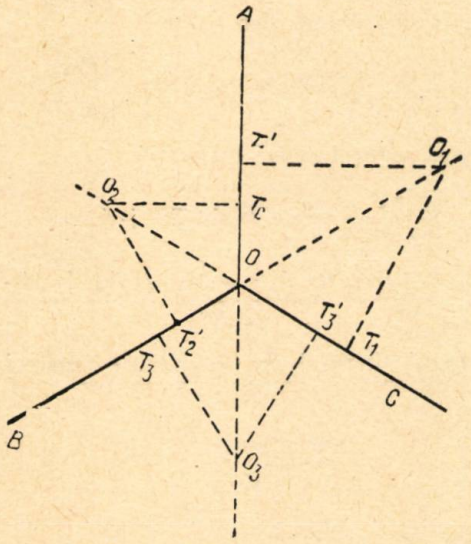
Problema 674

Trei semidrepte OA, OB, OC fac unghiuri egale două câte două. In aceste unghiuri sunt înscrise cercurile de raze r_1, r_2, r_3 şi cu centrele O_1, O_2. O_3. 1°. Să se calculeze aria $O_1O_2O_3$. 2°. Să se arate că unul din segmentele de pe semidrepte limitat la punctele de contact, este egal cu suma celorlalte două segmente analoage. 3°. Presupunând r_1 variabil şi r_2, r_3 constante să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $O_1O_2O_3$.

Corneliu Georgescu

Soluţie. Conform enunţului avem

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC = 120°$$



şi deci

$$\sphericalangle O_1OC = \sphericalangle O_1OA = \sphericalangle O_2OA = \sphericalangle O_3OB = 60°;$$

$$\overline{OO_1} = \frac{2r_1}{\sqrt{3}};\quad \overline{OO_2} = \frac{2r_2}{\sqrt{3}};\quad \overline{OO_3} = \frac{2r_3}{\sqrt{3}}.$$

Prin urmare

$$\text{aria } O_1O_2O_3 = \text{aria } OO_1O_3 + \text{aria } OO_1O_2 + \text{aria } OO_2O_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 120° \left(\frac{4r_1r_3}{3} + \frac{4r_1r_2}{3} + \frac{4r_2r_3}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}(r_1r_3 + r_1r_2 + r_2r_3)$$

Presupunem $r_1 > r_3 > r_2$

Avem astfel:

$$T_1T_3' = OT_1 - OT_3' = \frac{r_1}{\sqrt{3}} - \frac{r_3}{\sqrt{3}};$$

$$T_3T_2' = \frac{r_3}{\sqrt{3}} - \frac{r_2}{\sqrt{3}};\quad T_2T_1' = \frac{r_1}{\sqrt{3}} - \frac{r_2}{\sqrt{3}}.$$

Prin urmare:

$$T_1T_3' + T_3T_2' = T_2T_1'.$$

Fie M mijlocul lui O_2O_3, G centrul de greutate al triunghiului $O_1O_2O_3$. Avem: $MG:\ GO = \frac{1}{2}$. M fiind fix, G descrie o paralelă la OO_1.

Problema 675

Să se arate că expresia

$$E_1 = 1600\ldots004\underbrace{800\ldots0036}_{n-2}\underbrace{\qquad}_{n-2}$$

este patrat perfect şi

$$E_2 = 800\ldots003\underbrace{600\ldots005}_{n-2}\underbrace{400\ldots0027}_{n-2}\underbrace{\qquad}_{n-2}$$

este cub perfect.

A. Dobrescu

Soluţie. Avem:

$$E_1 = 16\cdot10^{2n} + 48\cdot10^n + 36 = (4\cdot10^n + 6)^2$$

$$E_2 = 8\cdot10^{3n} + 36\cdot10^{2n} + 54\cdot10^n + 27 = (2\cdot10^n + 3)^3$$

Problema 676

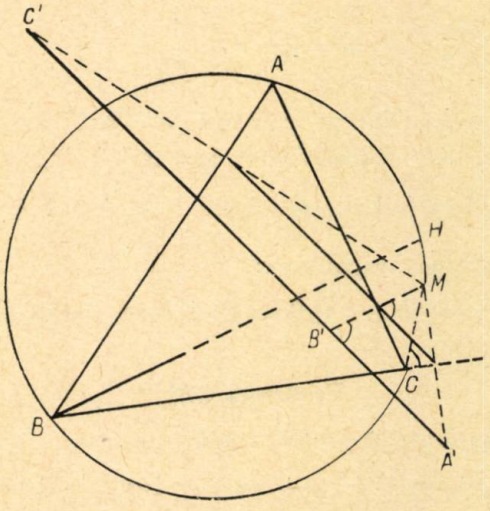
Fie A', B', C' simetricele unui punct M de pe cercul circumscris unui triunghi ABC, în raport cu laturile BC, CA, AB.

Să se arate că punctele A', B', C' sunt colineare.

Dreapta A' B' C' trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC.

N. Gheorghiu
student Iaşi

Soluţie. 1°. Conform teoremei dreptei lui Simpson picioarele perpendicularelor coborîte dintr'un punct al cercului circumscris unui triunghi pe laturile triunghiului sunt colineare.



Rezultă că A', B', C' sunt colineare fiind omoteticele a trei puncte ale dreptei lui Simpson.

2°. BH taie cercul circumscris în H'. Se știe că H' este simetricul lui H față de AC, deci patrulaterul $HH'MB'$ este trapez isoscel.

Prin urmare

$$\sphericalangle HB'M = 180° - \sphericalangle HH'M =$$

$$180° - \frac{1}{2}\text{măs. arc}\,(BCM).$$

Mai avem

$$\sphericalangle MB'A' = 180° - \sphericalangle MCB =$$

$$180° - \frac{1}{2}\text{măs. arc}\,(BAM).$$

Avem:

$$\sphericalangle HB'M + \sphericalangle MB'A' = 180°$$

și dreapta $A'B'C'$ trece prin H. Dacă M se afla între A și H' arătam analog că punctele C', B', H sunt colineare.

Observare. Punctul 2° rezultă direct din proprietatea dreptei lui Simson de a trece prin mijlocul lui MH.

Problema 677

Să se arate că dacă $xy + yz + zx = 1$, *există inegalitatea* $x + y + z \geqslant 9xyz$ *unde* x, y, z, *sunt numere pozitive.*

C. Ionescu-Țiu

Soluția 1-a. Din relația de condiție găsim $z = \dfrac{1 - xy}{x + y}$. Inegalitatea de demonstrat devine

$$x^2 + y^2 + 9x^2y^2 - 8xy + 1 \geqslant 0 \quad \text{sau}$$

$$(x - y)^2 + (3xy - 1)^2 \geqslant 0$$

ceeace este evident. Egalitate avem pentru

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Observare. Notăm $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $z = \operatorname{tg}\gamma$. Relația de condiție devine $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1$, ceeace arată că $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ și se obține inegalitatea:

$$\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\gamma\operatorname{cotg}\alpha \geqslant 9.$$

Problema 678

Să se arate că pentru n *pozitiv avem:*

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x}{\sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n+1)x} = \frac{\sin nx}{\sin(n+2)x}$$

Zarda Ion
Câmpina

Soluție. Considerăm identitățile

$$\sin 3x = \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x$$
$$\sin 5x = \sin 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x \cdot \sin 2x \qquad (1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\sin(2n-1)x = \sin(2n-3)x\cos 2x + \cos(2n-3)x\sin 2x}{S - \sin x = \cos 2x[S - \sin(2n-1)x] + \sin 2x[S_1 - \cos(2n-1)x]}$$

$$\cos 3x = \cos x\ \cos 2x - \sin x\ \sin 2x$$
$$\cos 5x = \cos 3x\cos 2x - \sin 3x\sin 2x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$
$$\frac{\cos(2n-1)x = \cos(2n-3)x\cos 2x - \sin(2n-3)x\sin 2x}{S_1 - \cos x = \cos 2x[S_1 - \cos(2n-1)x] - \sin 2x[S - \sin(2n-1)x]}$$

Eliminând S_1 [1]) între rezultatele însumărilor identităților (1) și (2), vom obține valoarea numărătorului primei fracții din enunț:

$$S = \sum_{n=1}^{n} \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Valoarea numitorului este

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin x} - \sin x + \sin(2n+1)x =$$
$$= \frac{\sin nx[\sin nx + 2\sin x\cos(n+1)x]}{\sin x} =$$
$$= \frac{\sin nx[\sin nx + \sin(n+2)x - \sin nx]}{\sin x} =$$
$$= \frac{\sin nx\sin(n+2)x}{\sin x}.$$

Relația se verifică ușor.

Puteam folosi relația

$$\sum_{n=1}^{n} \sin[a + (n-1)x] =$$
$$= \frac{\sin\left[a + (n-1)\dfrac{x}{2}\right]\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Problema 679

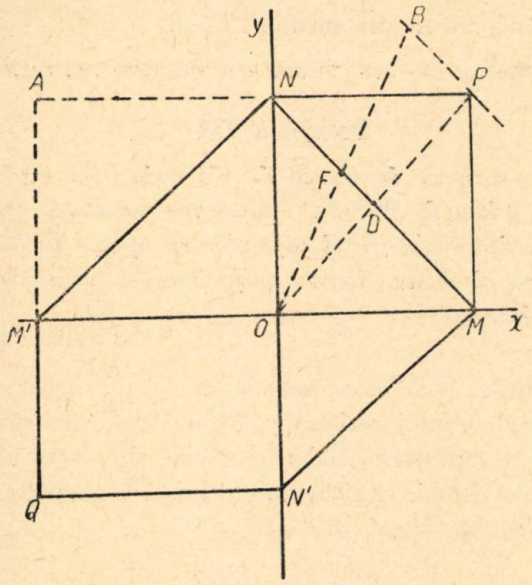
Se dau două drepte perpendiculare Ox, Oy *și un punct fix* F *în planul lor. O dreaptă variabilă prin* F *taie pe* Ox *în* M *și pe* Oy *în* N. *Paralelele duse prin* M *și* N *la* Oy *și* Ox *respectiv, se taie în* P. *Perpendicularele în* M *și* N *pe dreapta* MN *taie pe* Oy *și* Ox *respectiv în* N' *și* M'. *In sfârșit, paralelele duse prin* M', N' *la* Oy, Ox *se taie în* Q. *Să se arate că:* 1°. *Dreptele* MN, PQ *sunt perpendiculare.* 2°. *Paralela prin* P *la* MN *trece printr'un punct fix.*

Cezar Coșniță

---

[1]) $S_1 = \sum_{n=1}^{n} \cos(2n-1)x.$

Soluţie. 1°. Fie A intersecţia $(M'Q;\ NP)$.



Triunghiurile asemenea NOM', MON' dau:

$$\frac{NO}{ON'} = \frac{M'O}{OM} \quad \text{sau}$$

$$\frac{AM'}{M'Q} = \frac{AN}{NP}.$$

De aci, în virtutea reciprocei teoremei lui Thales, rezultă : $M'N \parallel PQ$ deoarece $M'N \perp MN$ şi $PQ \perp MN$.

2°. Fie B intersecţia paralelei cu OF. Aplicând teorema lui Thales în triunghiul BOP, obţinem:

$$\frac{OF}{FB} = \frac{OD}{DP} = 1,$$

deci B este fix.

Problema 721

Cum putem încălzi mai mult 720 gr. apă cu temperatura 16°C: amestecând-o cu 810 gr. apă la 84°, sau trecând un curent de 6 amperi printr'o rezistenţă de 10 ohmi cufundată în apă timp de 5 minute?

M. Gh. Ţarină
Student, Cluj

Soluţie. Temperatura celor 720 gr. apă după prima operaţie este

$$t = \frac{720 \cdot 16 + 810 \cdot 84}{720 + 810} = 52°\text{C}.$$

Trecând curentul electric temperatura apei ajunge la

$$t_1 = 16° \frac{0{,}24 \cdot 36 \cdot 10 \cdot 560}{720} = 52°\text{C}.$$

Prin urmare apa se încălzeşte în mod egal.

Problema 722

Să se rezolve sistemul:

$$[b(a-x)+c(a-y)](2x+y) - b(x^2+xy+y^2)=0$$

$$[b(a-x)+c(a-y)](x+2y) - c(x^2+xy+y^2)=0.$$

Gh. D. Simionescu

Soluţie. Se observă că

$$\frac{2x+y}{x+2y} = \frac{b}{c}$$

de unde

$$x = \frac{2b-c}{2c-b}\,y$$

Inlocuind valoarea lui x în prima ecuaţie, obţinem în cele din urmă:

$$9b\,\frac{b^2-bc+c^2}{(2c-b)^2}\,y^2 - \frac{3ab(b+c)}{2c-b}\,y = 0$$

de unde

$$y_1 = 0, \quad x_1 = 0$$

şi

$$y_2 = \frac{a(b+c)(2c-b)}{3(b^2-bc+c^2)}; \quad x_2 = \frac{a(b+c)(2b-c)}{3(b^2-bc+c^2)}.$$

Eliminând grupul x^2+xy+y^2, obţinem sistemul

$$b(a-x)+c(a-y)=0; \quad x^2+xy+y^2=0$$

cu soluţiile

$$x_{3,4} = \frac{a(b+c)(2b-c \pm ci\sqrt{3})}{2(b^2-bc+c^2)};$$

$$y_{3,4} = \frac{a(b+c)(2c-b \mp bi\sqrt{3})}{2(b^2-bc+c^2)}.$$

Problema 728

In triunghiul ABC, mediana AD este egală cu latura $BC = a$. Să se arate că suprafaţa triunghiului este dată de relaţia

$$S = \frac{3a^2 \operatorname{tg} A}{8}.$$

M. I. Popescu
Elev, Craiova

Soluţie. Fie în general $\overline{AD} = m$. Din relaţiile

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2},$$

obţinem

$$bc = \frac{4m^2 - a^2}{4\cos A}.$$

Dar $bc = \dfrac{2S}{\sin A}$; prin urmare

$$S = \frac{4m^2 - a^2}{8} \operatorname{tg} A.$$

Când $m = a$, obţinem pentru S valoarea din enunţ.

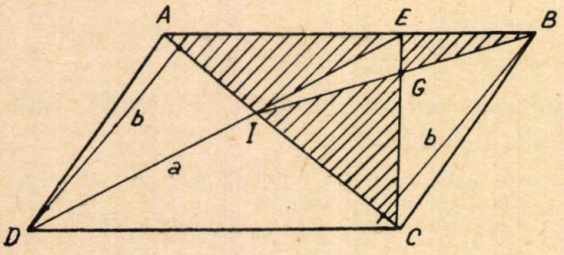
Problema E: 250

Fie un paralelogram $ABCD$ şi un punct E pe latura AB. Dreptele AC şi DE se taie în punctul I şi dreptele CE şi IB se taie în punctul G. Să se arate că:

$$\text{aria } AEI + \text{aria } BEG = \text{aria } CIG.$$

* * *

Soluţie. Notăm cu a şi b distanţele dela punctele A şi B, respectiv la laturile DC şi AC.



$$S_{DEC} = \frac{DC \cdot a}{2} \quad \text{şi} \quad S_{ABC} = \frac{AB\,a}{2} = \frac{DC\,a}{2},$$

deci
$$S_{DEC} = S_{ABC} \tag{1}$$

$$S_{DIC} = \frac{CI\,b}{2} \quad \text{şi} \quad S_{BIC} = \frac{CI\,b}{2}$$

deci,
$$S_{DIC} = S_{BIC}. \tag{2}$$

Scăzând relaţiile (1) şi (2), obţinem:

$$S_{DEC} - S_{DIC} = S_{ABC} - S_{BIC}$$

sau

$$S_{CIE} = A_{AIB}$$

scăzând din fiecare membru S_{GIF}:

$S_{CIE} - S_{GIE} = S_{AIB} - S_{GIE}$ sau $S_{CIB} = S_{AEI} + S_{BEC}$.

Problema 731

Un corp cu densitatea de 2,5 cade liber într'un bazin adânc de 10,202 m. Să se afle densitatea lichidului din bazin ştiind că acel corp ajunge la fund în timp de 2 sec. Se va neglija frecarea corpului cu lichidul.

H. Dăscălescu

Soluţie. Conform principiului lui Arhimede asupra corpului acţionează o forţă egală cu greutatea volumului de lichid deslocuit şi de sens contrar gravităţii. Deci în timpul mişcării corpul este acţionat de forţa constantă

$$F = mg - \frac{mg}{2{,}5}d,$$

care-i imprimă o mişcare uniform accelerată.

Din formula $s = \frac{1}{2}at^2$ (s=10,202 m, t=2 sec.) găsim $a = 510{,}1$ cm/sec². Conform legii lui Newton $F = ma$, deci

$$a = g - \frac{dg}{2{,}5}, \text{ de unde}$$

densitatea lichidului din bazin $d = 1{,}2$.

PROBLEME PROPUSE

1028. In semicercul cu diametrul AB se înscrie patrulaterul $ABCD$ şi se notează cu E, F, G mijloacele coardelor BC, CD, DA.

Perpendiculara din E pe dreapta BF taie tangenta în B la semicerc în P, iar perpendiculara din G pe dreapta AF taie tangenta în A la semicerc în Q.

Să se demonstreze că dreapta PQ este paralelă cu CD.

Gh. D. Simionescu

1029. Se dă $x + y + z = 1$. Să se dovedească inegalitatea

$$x^2 + y^2 + x^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

S. Fiterman

1030. Să se arate că dacă $x < 2$, expresia: $\arcsin(x-1) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$ este constantă.

I. Stepanov

1031. Un circuit oscilant format dintr'un condensator, o bobină cu inductanţă proprie 1,6 Henri şi rezistenţa 5 ohmi şi o rezistenţă electrică de 35 ohmi se conectează la un generator de curent alternativ cu frecvenţa de 400 KHz şi diferenţă de potenţial 30 volţi. Ştiind că se observă fenomenul de rezonanţă în serie, să se calculeze intensitatea curentului, puterea reactivă, puterea cheltuită de generator pentru întreţinerea oscilaţiilor şi capacitatea condensatorului în cm. Presupunând că acest circuit ar fi în legătură cu o antenă să se calculeze lungimea pe undă pe care s'ar produce emisia.

Galaţky Gheorghe
elev, Târgovişte

1032. Să se calculeze greutatea specifică a aerului dintr'o cameră cu temperatura de 15°C, presiunea atmosferică normală şi gradul de saturaţie

50%, știind că presiunea maximă a vaporilor de apă la 15°C este 12,79 mm coloană de mercur.

Stan M. Fota
elev, Giurgiu

1033. Se dă un trapez $ABCD$, cu laturile paralele BC și AD; iar O punctul de intersecție al diagonalelor.

Să se stabilească relațiile;

$$\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OC}}{\overline{AC}^2}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OD}}{\overline{BD}^2} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}}{\overline{AD}^2}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}{\overline{BC}^2}.$$

B. Cașin

1034. Să se stabilească inegalitățile:

$$4(\sin a-\cos a)(\sin b-\cos b)\sin(a+b)\leqslant 1$$
$$8\sin a\sin b\cos(a+b)\leqslant 1.$$

unde a și b sunt unghiuri oarecare.

C. Ionescu-Țiu

1035. Să se construiască grafic triunghiul ABC când se cunoaște poziția centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor care au ca vârfuri câte două din vârfurile triunghiului ABC, iar cel de al treilea vârf fiind ortocentrul triunghiului ABC.

Valeriu Udrescu

1036. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{(x+6)^5+(x-12)^5}{(x-2)^5+(x-4)^5}=2101.$$

Marius V. Iosifescu
elev, Ploești

1037. Să se simplifice:

$$2\sin^2 x\cdot\frac{1+\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}(45^\circ-x)}{\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x-2+2\sin^2 x}.$$

F. Bartenev

1038. Fie P un punct pe latura AB a paralelogramului $ABCD$. Dreptele PC și PD intersectează diagonalele BD și AC respectiv în M și N. Să se stabilească relația:

$$\frac{MP}{MC}+\frac{NP}{ND}=1.$$

Popescu I. Mihai
absolvent, Craiova

1039. Fie în trapezul $ABCD$ circumscris unui cerc, MN diametrul perpendicular pe laturile paralele. Punctele de intersecție ale diagonalelor trapezelor $AMNB$, $MDCN$ și punctele de contact ale laturilor neparalele sunt situate pe aceiași dreaptă.

M. Neumann

1040. Să se arate că dacă $\cos 2x=\operatorname{tg}^2 y$, rezultă că $\operatorname{tg}^2 x=\cos 2y$.

Gh. I. Bercea

1041. Un circuit electric este format dintr'o bobină de self având o rezistență $R=7{,}85$ ohmi și un coeficient de autoinducție $L=0{,}0125$ henri. Circuitul fiind montat sub o tensiune alternativă de 240 volți și, o frecvență $f=100$ perioade pe secundă, să se determine:

a) Intensitatea curentului care străbate circuitul.

b) Factorul de putere al circuitului

c) Puterea consumată sub formă de efect joule.

Stoian I. Gheorghe
elev, Târgoviște

1042. Să se rezolve ecuația:

$$8x^3-6x+\sqrt{2}=0.$$

Simon St. Petre

1043. Pe semicercul de diametru $A_1A_2=2R$ fie un punct M mobil. Se construește patratul $MNPQ$ de latură a, N și P fiind situate respectiv pe MA_1, MA_2, sau pe prelungirile acestora.

Fie C și D intersecțiile diametrului A_1A_2 respectiv cu prelungirile laturilor PQ, NQ. Să se stabilească relația:

$$\frac{1}{\overline{A_1C}^2}+\frac{1}{\overline{A_2D}^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Matei I. Nazarie

1044. Să se rezolve grafic sistemul

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a} \quad \text{și} \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{b^2}$$

unde a și b sunt segmente date.

Cristea I. Ion
elev, Constanța

1045. Într'un triunghi ABC ducem cevienele AA_1, BB_1, CC_1. Să se arate că aria S_1 a triunghiului $A_1B_1C_1$ este dată de relația

$$S_3=\frac{\overline{A_1B}\cdot\overline{B_1C}\cdot\overline{C_1A}}{2R}$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC. Aplicație. Se va considera ca punct de întâlnire al cevienelor centrul cercului înscris, centrul cercului circumscris, sau ortocentrul triunghiului ABC.

Ion Licea
elev, Galați

1046. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\cos x} + \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}.$$

C. V. Costăchescu

1047. Să se arate că dacă $n \geqslant \frac{21}{4}$, avem inegalitatea:

$$\cos \frac{\pi}{n} > 1 - \frac{1}{1+n}.$$

* * *

1048. Să se construiască grafic un triunghi când se cunosc razele cercurilor exînscrise.

Tiberiu Weszely

1049. Un curent trecând prin apă acidulată produce în trei minute 125 cm³ de gaz detonant; la sfârşitul experienţei, nivelul apei din voltametru a coborît cu 10 cm faţă de nivelul din exterior. Presiunea atmosferică în timpul experienţei a fost 760 mm coloană de mercur, iar densitatea apei acidulate, 1,13 g/cm³. Să se afle intensitatea curentului.

* * *

1050. Pe un plan înclinat se rostogolesc un cilindru şi o sferă, masive şi de aceiaşi rază. 1) Care din cele două corpuri ajunge mai repede în partea de jos a planului. 2) care este raportul vitezelor lor într'un anumit loc? 3) Care este raportul vitezelor lor după t secunde?.

* * *

1051. Două bărci merg una spre cealaltă, pe drumuri paralele. Când bărcile se află una lângă alta, din fiecare barcă se aruncă în cealaltă un sac de masă 50 kg. In urma acestei operaţii, prima barcă se opreşte iar a doua merge cu viteza de 8,5 m/s în acelaşi sens. Care erau masele bărcilor înaintea schimbului de saci dacă vitezele bărcilor cu încărcătură erau respectiv de 1m/s şi 9m/s.

* * *

1052. Un volant de rază R face n ture pe minut transmiţând prin curea, dispozitivului de acţionare o putere P. Să se afle tensiunea T în Kgf dacă P ese dat în KW iar cureaua merge fără alunecare.

* * *

EXERCIŢII PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E: 337. La construcţia canalului navigabil Volga-Don, a fost folosit escavatorul de săpat şi transportat pământ într'o cupă de 14 m.c la o distanţă de 120 m. Greutatea specifică a pământului săpat fiind 1,4 g/cm³ să se afle greutatea în Kgr. a pământului transportat o singură dată.

Bătineţu Dumitru
elev, Giurgiu

E: 338: Tensiunea la capetele unui conductor de cupru ($\rho = 0{,}0175$) care alimentează un motor electric este de 5 volţi iar lungimea totală este de 400 m, şi secţiunea de 35 mm². Se cere puterea pierdută în conductor prin efectul termic.

Mândru Anatolie
elev, Bucureşti

E: 339. Fie paralelogramul $ABCD$. Perpendiculara din A pe AB întâlneşte pe BD în M, perpendiculara din C pe CD taie pe BD în N. Să se arate că figura $AMCN$ este un paralelogram şi să se calculeze suprafaţa lui ştiind că $DB = 6$ cm: $BN = 1$ cm şi aria $ABCD$ are 36 cm².

Brezeanu Ioanin
elev, Târgovişte

E: 340. Dintr'un punct M situat pe diagonala AC a dreptunghiului $ABCD$ se duc paralele la laturile AB şi BC care întâlnesc pe BC şi DC respectiv în P şi Q. Din punctul M' de intersecţie a diagonalelor PQ şi MC ale dreptunghiului $MPCQ$ se duc paralele la laturile AB şi BC care întâlnesc pe BC şi DC respectiv în P' şi Q.

Să se determine poziţia punctului M pe diagonala AC astfel ca suprafaţa dreptunghiului $M'P'CQ'$ să fie $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ şi $\frac{1}{32}$ din suprafaţa dreptunghiului $ABCD$.

Ţifui Vasile
elev, Piatra Neamţ

E: 341. Să se arate că:

$$\frac{1+m^2}{2m(m+n)(1-mn)} + \frac{1+n^2}{2n(m+n)(1-mn)} + \frac{1}{2mn} = \frac{1}{m(m+n)} + \frac{1}{n(m+n)} + \frac{1}{1-mn} = \frac{1}{mn(1-mn)}.$$

C. I. Ţ.

E: 342. Se ia punctele A şi B de aceiaşi parte a unei drepte Δ. Notăm cu A', B' proiecţiile lui A şi B pe Δ, iar cu B'' simetricul punctului B în raport cu Δ. Dreptele AB' şi $A'B$ se taie în Q, iar dreptele AB'' şi Δ se taie în R.

Să se arate că dreapta QR este perpendiculară pe Δ.

Ioan D. Ioan
elev, Focşani

E: 343. In triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept în A se duce înălţimea AD. Se construeşte un cerc de rază AD şi cu centrul în D care intersectează latura BC în N şi prelungirea ei în M. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{1}{BM} - \frac{1}{NC} = \frac{1}{AD}.$$

Didiv Bogdan
elev, Focşani

E: 344. Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{ay+b}{cy+d} \text{ ştiind că: } y = \frac{ex+f}{gx+h};$$

$$\text{iar } x = \frac{2m+1}{m-2}.$$

unde $a, b, c, d, e, f, g, h, m,$ sunt cunoscute.

* * *

E: 345. O piesă de oţel cântăreşte 1300 grame, iar în apă cântăreşte numai 860 grame. Ştiind că densitatea oţelului este 7,8 se întrebă dacă piesa are goluri în interior unde nu poate pătrunde apa şi în caz afirmativ care este volumul acestor goluri. Cât va cântări aceiaşi piesă într'un ulei de densitate 0,87?

C. I. Ţ.

E: 346. O cooperativă meşteşugărească cu 24 muncitori poate executa o anumită lucrare dacă va lucra zilnic câte 8 ore. Câte ore pe zi trebuie să lucreze 29 muncitori pentru a executa aceiaşi lucrare în acelaş timp?

* * *

E: 347. Un vas de aramă cântărind 250 grame este umplut cu 850 grame de apă. De câte calorii avem nevoie ca să încălzim apa din acest vas dela temperatura de 14° la 100°C?

* * *

E: 348. Un vas de fontă care cântăreşte 2,5 kg. şi având temperatura de 8° se umple cu 6 litri apă în staré de fierbere. Care este temperatura finală a apei? De câte calorii mai este nevoie pentru ca apa să înceapă să fiarbă din nou?

* * *

E: 349. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$ax = by = cz \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

* * *

E: 350. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$ax = by = cz = dt \qquad x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = m^3$$

* * *

E: 351. Un bazin poate fi umplut de două robinete care curg împreună timp de 5 ore, sau dacă primul curge 8 ore, iar al doilea în continuare 3 ore. In câte ore ar umplea bazinul fiecare din robinete curgând singur?

* * *

POŞTA REDACŢIEI

Ioan C. Ioan cl. X-a. Focşani. La alcătuirea planului pentru anul următor vom ţine seama de unele propuneri pe care le-aţi făcut.

L. Dabija cl. X-a Galaţi. S'au primit toate problemele trimise.

Giurgiu I. Ioan cl. XI-a. Oraviţa. S'au primit articolele d-tră despre determinanţi. In planul Revistei nu intră, în prezent, publicarea unor astfel de articole. La întrebarea doua vă răspundem: Ministerul Invăţământului Superior a luat măsuri pentru popularizarea Institutelor Tehnice, Cereţi lămuriri la orice Institut şi veţi primi răspuns. In ceea ce priveşte facultăţile de Matematică şi Fizică găsiţi în numerele 5 şi 6 ale Revistei două articole lămuritoare.

Baichis Jean-Vaslui. După cum vedeţi dorinţa d-tră justă a fost satisfăcută. Poşta redacţiei stă la dispoziţia cititorilor.

Brumă Ilie cl. VIII-a. Roman. Ne bucură angajamentul d-tră de a colabora mai intens la R.M.F.

Popovici Stelian. Suceava. Intr'unul din numerele viitoare ale R.M.F. vom publica modul de a construi aparatul propus de d-tră. In ceeace priveşte aprecierile despre articolele şi problemele din R.M.F. avem de adăugat, că o critică constructivă ne-ar ajuta mai mult decât laudele pe care le aduceţi.

Hodiş Gheroghe, cl. IX -a. Zalău. S'au primit toate problemele pe care le-aţi trimis.

Lăzărescu Cristian. Şcoala Elementară Nr. 5 băieţi Bucureşti. Pentru a obţine numere mai vechi din R.M.F. să vă adresaţi Centrului de Difuzare a Presei din str. Constantin Mille, 14 Bucureşti.

Sipoteanu Ioan-Târgovişte. In numărul 8 R.M.F., 1953 a reapărut rubrica pe care o propuneţi. In numerele următoare vom continua să publicăm cât mai des « Noutăţi din Ştiinţa şi Tehnica Sovietică ».

Gross Eva. Suceava. Redacția va studia posibilitatea punerii în practică a propunerilor pe care le-ați făcut.

Popescu Gabriel. Râmnicul Vâlcea. S'a primit articolul « Cum se determină sarcina și masa unei particule elementare ».

Banga Nicolae-Brăila. S'a reclamat cazul D-tră. la Centrul de Difuzare a Presei.

Voiculescu Stelică. Comuna Salcia, Raionul Turnu-Măgurele. Nu putem reedita în prezent numere vechi din R.M.F. Unele din aceste numere le puteți cere direct dela Centrul de Difuzare a Presei str. Constantin Mille, 14 București.

Apetrei Nicolae pioner-Fundul Moldovei, Reg. Suceava. Ne bucură că ai început să rezolvi din problemele propuse de R.M.F. Te sfătuim să continui această activitate care te va ajuta să-ți însușești matematica și fizica cât mai bine.

Caporal Zincă Constantin-Botoșani. Găsiți răspuns la întrebările puse, citind Cursul de Matematici Superioare de Vlasov.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Până la 15 Iulie 1953 s'au primit soluții bune la problemele arătate după fiecare rezolvitor, probleme propuse (P), din localitățile care încep cu literele A-P, dela următorii rezolvitori:

AIUD. *Liceul mixt Român, Clasa VII-a* Bratu *V. Ioan* (E: 223, 227, 231, 243, 236, 237, 242, 243, 245, 247, 254, 255, 256, 258, 259, 260). Clasa VII-a (Ocna Mureș) — Duca Vasile (E: 268, 279, 280, 281, 286). Clasa VIII-a. Vrăjitoru Dan (736, 737, 744, 745, 748, 765, 768, 770, 774, 779, 794, 795, 798, 816, 822, 823, 834). Clasa IX-a Tătaru D. Emil (610, 658, 670, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 720, 723, 724, 726, 727, 728, 729, 733, 734, 735, 736, 740, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, P). Clasa XI-a. Romoșan S. Nicolae (648, 685, 716, 724, 745, 748, 758, 788, 794, E: 207, 208, 222, P).

ALEXANDRIA. *Liceul mixt.* Clasa VIII-a. Ceampuru I. Stelian (685, 768, 787, 791, 822, 823, 835, E: 207, 215, 225, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 277, 282, 289, P) Clasa IX-a. Georgescu I. Emil (633, 746, E: 204, 216, 235, 240, 245, 246). Niță Gh. Petre (658, 670, 740, 746, E: 200, 207, 208, 209, 213, 216, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 231, 234, 235, 236, 237, 239, 242, 243, 245).

ARAD. Clasa IX-a. Dogaru Lucian (606, 607, 611, 615, 618, 620, 627, 634, 671, 806), Clasa XI-a. Haiduc Alexandru (662, 664, 666, 670, 673, 681, 682, 685, 710, 716, 718, 721, 731, 744, 745, 746, 757, 765, 766, 767, 768, 770, 779, 787, 788, 792, 804).

BACĂU. Clasa VIII-a. Boboc I. Mihai (770, 776, 783, 791, 799, 804, 816, 834). Iorga Sergiu (748, 765, E: 245, 252, 253, 259, 260, 261, 265, 266, 268). Onofrei Grigore (E: 200, 202, 203, 204, 205, 208, 243, 245, 257, 261, 263). Palaghiță I. Ștefan (621, 661, 744, E: 214, 274) Clasa X-a Necșu Octavian (745, 766, 770, 777, 778, 788, 813).

BAIA-MARE *Liceul mixt.* Clasa IX-a, Cadar Ioan (604, 616, 625, 651, 664, 677, 683, 723, 746, 748, 770, 771, 775, 777, 778, 800, E: 221, 243), Dâmb Gheorghe (658, 822, E: 216, 218, 223, 230, 257, 261, 286), Mureșan F. Augustin (608, 627, 639, 664, 737, 740, 745, 707, 800, 822, 834, E: 242, 245, 247, 248, 251, 257, 258). Pop Gheorghe (637, 643, 756, 760, 762, 783, 787, 791, 792, 793, 794, 816, 821, 823, 834, E: 254, 279, 287) Clasa XI-a Mureșan Mihai (640, 764, 765, 767, 785, 787, 792, E: 211, 212, P).

BÂRLAD. *Liceul de băieți.* Bichir Constantin (611, 613, 615, 723, 742, 744, 747, 776, 787, 791, 816, 834, E: 244, 266, 268, 270, 272, 273, 274, 279, 280, 281, 286, 288). Școala tehnică financiară. Anul II. Condrea E. Petru (657, 675, E: 233, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 247).

BEIUȘ *Liceul mixt.* Clasa X-a. Ordentlich Ștefan (604, 608, 618, 625, 651, 663, 664, 670, 685, 716, 721, 745, 775, 777, 794, 834). Lezeu F. Aurel (604, 608, 615, 625, 630, 633, 641, 643, 651, 666, 670, 685, 724, 744, 757, 762, 767, 768, 769, 770, 778, 787, E: 213, 216, 218, 219, 222, P) Clasa XI-a. Maurer Andrei (604, 608, 615, 625, 630, 634, 651, 778, 787, E: 218, 233, 239).

BOTOȘANI. Clasa IX-a. Casianov Eugenia (655, 691, 724, 787, E: 212, 271). Prisăcaru Despina (669, 787, E: 213, 218, 245). Vamanu Elena (744, E: 244, 261, 263, 265, 270, 286).

BRĂNEȘTI. (PLOEȘTI). Clasa VII-a. Bucur D. Gheorghe (202, 213, 216, 218, 220, 242, 243, 245, 247, 266, 268, 276, 277, 281, 285, 286, 289, 294). Feyer Gabriela (242, 243, 245, 247, 255, 266,).

BISTRIȚA. Ciorbă Ionel (E: 275, 276, 277, 285, 289).

BUCUREȘTI. *Liceul băieți.* Clasa IX-a. Georgescu Dorin (606, 721, 723, 724, 725, 726, 736, 737, 740, 743, 745, 748, 765, 768, 823, 834,). Litinschi Mihai (827, 834, E: 270, 280, 281, 283, 286, 288,). Nicolae Alexandru (622, 625, 683, 726, 748,). Clasa X-a. Constantinescu D. Mircea (605, 606. 607. 608, 618, 625, 630, 637, 639, 640, 643, 651, 659, 663, 664, 670, 678, 685, 691, 695, 717, 721, 724, 736, 740, 745, 748, 737, 770, 774, 780, 785, 793, 806.) Petcu C. Victor (608, 613, 633, 635, 640, 651, 655, 658, 659, 703, 705, 718, 724, 744, 748, 751, 753, 770 782, 822). *Centrul școlar 2. 10. 13. fete.* Clasa VIII-a. Agafiței Florica (E: 225, 230, 231, 236, 245, 254, 266). Clasa X-a. Gongea Valy (770, E: 236, 248, 251, 260, 261, 263, 266, 270, 271,). Petrică Zamfira (610, 631, 692,720, 731, 736, 739, 740, 742, 744, 745, 746, 748, 749, 751, 752, 753, 756, 757, 760, 761, 762, 763, 764, 767, 767, 768, 770, 771, 774, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 783 794) Timofciuc Natașa (743, 748, 791, E: 248, 251, 261,). Wechsler Henriette (683, 743, 770, 791, E: 248, 251, 261, 266, 271). *Liceul 3 băieți.* Clasa VIII-a. Tomescu Dan (744, 745, 748, 749, 774, 787, 804, 827, 834, E: 213, 216, 217, 218, 222, 223, 224, 230, 231, 243, 247, 251, 257, 260, 266, 270. 281). Clasa X-a. Radu Gh. Nicolae (602, 608, 610, 621, 628, 630, 635, 691, 715, 745, 813, 819, 835, E: 217, 221, 231, 236, 260, 261, 266, 274, 286, 289). Mihăilescu N. Ștefan (608, 610, 613, 625, 632, 635, 648, 683, 686, 692, 693, 698, 701, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 716, 719, 720 721, 733, 737, 740, 741, 744, 745, 746, 748, 749, 751, 754, 756, 757, 758, 760, 761, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771

774, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 802, 804, 805, 813, 819, 821, 822, 824, 831, 834, 835). *Școala medie tehnică de comerț Nr.* 2. Anul II. Ivănescu T. Dumitru (625, 630, 633, 645, E: 242, 244, 245, 247, 248). Constantinescu Niculina (625, 633, 716, 745, E: 244, 245, 247, 248). Iancu Silvia (621, 745, E: 244, 245, 247, 248). Sefciuc Valeria (621, 745, E; 244, 245, 247, 248). Stoian D. Ion (621, 745, E: 244, 245, 247,) Anul III. Dedu Aurel (E: 202, 209, 217, 220, 239, 244, 255, 270, 271, 272, 274,). Schwarzkopf Hella (633, 643, 648, 655, 658, 665, 666, 670, 716, 721, 751, 758, 764, 767, 780, 787, 819, 823). Centrul școlar mediu de energetică. Anul III. Tănăsescu Nicolae (807, 808, 813, 819, 823, 827, 835, P). *Școala de măsurători terestre* Anul II. Bălu Vasile (692, 769, 778, 780, E: 221, 223, 224, 225, 228, 230, 240, 243, 245, 248, 250, 260). Moga Emil (716, 733, 768, E: 224, 225, 230, 240, 253, 259). Anul III. Tănase Dumitru (707, 716, 717, 751, 757, 762, 768, 769, 770, 775, 777, 778, 779, 780, 787, 794, 806, 822, 823, 824, 826, 834, E: 246, 252, 253, 257, 258, 260, 261, 262, 265, 266, 270, 271, 274, 275, 276, 277, 279, 280). *Școala elementară Nr. 4 băieți.* Clasa VII-a. Schileru Dinu (742, 787, 823, E: 214, 247, 266, 267, 271, 273, 276, 258, 279, 280, 281, 285, 286). *Liceul 4 băieți.* Clasa XI-a. Radcenco Vsevolod (608, 628, 625, 635, 778, 804, 822, 824, 831, 834). *Școala pedagogică băieți.* Anul II. Anton Ion (786, 787, E: 266, 268, 271). *Liceul 5 băieți.* Clasa IX-a. Costache Alexandru (794, 803, 806, E: 266, 272, 272, 274, P). Clasa XI-a. Georgescu Ioan (607, 608, 611, 612, 621, 622, 623, 624, 632, 633, 641, 651, 655, 658, 663, 664, 670, 685, 690, 691, 693, 701, 716, 717, 721, 722, 723, 724, 727, 728, 734, 739, 743, 744, 745, 748, 751, 765, 770, 775, 777, 778, 780). Gheția I. Eugen (606, 624, 627, 623, 636, 640, 643, 645, 647, 658, 660, 661, 663, 664, 665, 666, 667, 669, 671, 673, 674, 675, 678, 681, 683, 683, 684, 685, 687, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 701, 702, 715, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 726, 727, 728, 729, 731, 733, 734, 735, 736, 737, 739, 740, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 756, 757, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, P). *Liceul 6 băieți.* Clasa VIII-a. Păltineanu Dan (770, E: 260, 263, 266, 268, 271, 274). Popovici I. Radu (748,768, 770, 838, E: 215, 235, 241, 243, 245, 248, 249, 251, 252, 255, 258, 259, 260 261, 262, 263, 266, 268, 270, 272, 274, 277, 279, 280, 281, 284, 286, 287, 289, 291, 294, 300). Todescu Cornel (E: 257, 263, 266, 268, 271, 274). Clasa IX-a. Kestendband Barbu (760, 793, 794, 795, 804, 814, 816, 824, 827, 828, 834, E: 266, 268, 272, 274, 275, P). Clasa XI-a. Popescu E. Gheorghe. (608, 647, 659, 670, 765, 768, 777, 778, 802; E: 203, 204, 235, 236, 268) *Liceul 7 băieți.* «*I. L. Caragiale*». Clasa IX-a. Rosingher Elmer (604, 639, 676, 783, 787, 804). *Liceul 8 băieți.* Clasa VI-a. Gavrilă Horia (226, 255, 259, 260, 266). Clasa X-a. Teodosiu Cristian (603, 604, 611, 615, 618, 621, 624, 630, 632, 648, 659, 664, 666, 670, 685, 690, 717, 718, 719, 721, 724, 726, 728, 745, 748, 752, 770, 775, 777, 779, 794, 813, 819, 822, 834). *Liceul 9 băieți.* Clasa X-a, Răzuș Alexandru (665, 666, 670, 673, 685, 691, 716, 718, 721, 724, 727, 728, 733, 743, 744, 748, 749, 757, 770, 777, 778, 779, 791, 806), *Liceul 10 băieți.* «*Aurel Vlaicu*». Clasa VII-a. Adam Marian (E: 214, 216, 236, 251, 258, 268). Nistreanu N. Valeriu (206, 216, 200, 260, 266). Clasa VIII-a. Curciur Aurel (E: 209, 211, 266, 273, 274). Găleată Mircea (E: 203, 204, 209, 211, 268). Gheorghe Dumitru (214, 216, 217, 240, 251, 268). Ilie Vicențiu (E; 203, 204, 236, 258, 261, 268, 274,) Sandu Gh. Ion (658, 724, 742, 746, 768, E: 203, 221, 226, 228, 247, 248, 249, 266, 268, 270, 274,). Stănășilă Octavian (263, 264, E: 742, 746, 768, 770). Clasa IX-a. Dogaru Anton (615, 792, E: 245, 261, 263, 268, 275). Andreescu Gh. Radu (613, 615, 620, 621, 627, 629, 632, 634, 647, 651, 655, 658, 662, 663, 674, 675, 691, 694, 699, 773, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 740, 741, 744, 746, 748, 752, 753, 755, 765, 768, 772, 774, 779, 782, 791, 793, 794, 795, 797, 798, 799, 810, 814, 816, 819, 822, 823, 834, E: 236, 237, 239, 242, 243, 245, 246, 248, 251. 252, 262, 270, 281, 288). Teodorescu Mihai (736, 744, 748, 764, 770, 792). Clasa X-a. Andreescu Gh. Mircea (634, 644, 650, 654, 663, 664, 668, 674, 679, 680, 682, 686, 689, 691, 694, 697, 699, 709, 710, 711, 712, 714, 716, 717, 723, 726, 729, 749, 755, 777, 782, 784, 789, 794, 796, 798, 800, 806, 810, 813, 816, 818, 819, 821, 822, 823, 824, 827, 831, 835, 888). Clasa XI-a. Mândru Anatolie (637, 645, 676, 685, 687, 691, 695, 698, 787, 795, 800, 801, 802, 806, P). Trifu Ludovic. (770, E: 245, 254, 258, 259, 268).

BUZĂU. Clasa IX-a. Sandu Eugen (744, 768, 770, E: 216, 218, 220, 221, 225, 230, 245,) Clasa X-a. Băcă D. Nicolae. (607, 673, 727, 728, 743, 744, 748, 770, 779, 788, 791, 792, 794, 800, 822). Castravete Gh. Gheorghe (691, 716, 718, 721, 724, 728, E: 228, 236, 266). Duțu Alexandru (758, 762, 767, 770, 774, 775, 777, 778, 787, 795, 804, 806), Negulescu Paul (707, 718, 722, 736, 744, 745, 748, 756, 757, 758, 762, 770, 777, 778, 795, P). Stoicescu T. Dumitru (607, 643, 664, 673, 675, 703, 704, 705, 706, 707, 709, 710, 712, 716, 726, 728, 733, 734, 736, 744, 745, 746, 747, 748, 751, 756, 757, 758, 759, 765, 768, 770, 775, 777, 787, 788, 791, 794, 800, 801, 822, 826, 831, P). Clasa XI-a. Dihoru N. Valentin (601, 603, 612, 622, 627, 641, 651, 659, 695, 716, 718, 721, 722, 723, 728, 734, 744, 745, 748, 749, 765, 766, 767, 768, 770, 771, 772, 779, 783, 804, 813, 822, 827,). Sava G. Ion 621, 625, 633, 658, 703, 704, 705, 724, 745, 748, 787),

CĂLĂRAȘI. Clasa IX-a. Lucrețeanu D. Dorin (791, 795, 806, E: 271, 273, 274,). Clasa X-a. Alexandrescu Dumitru (685, 686, 691, 716, 718, 723, 724, 733, 737, 744, 745, 748, 751, 761, 765, 766, 767, 768, 770, 774, 777, 778, 779, 780). Bulearcă Ion (629, 636, 640, 705, 706, 717, 724, 757, 770, 794, 799, E: 266, 268). Vasilescu Constantin (655, 658, 641, 664, 666, 708, 721, 727, 760, 761, 767, 768, 770, 777, 778, 782, 800, 812, 813, 824, E: 207, 208, 209, 213, 216, 217. 218, 220, 221, 223, 228, 230, 235, 236, 239, 240, 243, 244, 248, 251, 252, 261, 263, P).

CARANSEBEȘ. Clasa IX-a. Ciric Ioan (618, 651, 658, 679, 691, 699, 701, 716, 724, 727, 745, 764, 765, 768, 770, 775, 780, 783, 787, 792, 800). Clasa X-a. Vela Mihai (605, 611, 618, 614. 633, 655, 663, 666, 668, 669, 673, 705, 707, 716, 718, 720, 721, 724, 727, 745, 746, 757, 764, 765, 768, 770, 805).

CARACAL. Clasa IX-a. Ciucă G. Ion (630, 651, 655, 658, 695, 745, 765, 772, 779, 787, 794, E: 207, 208, 212, 261, 263). Clasa XI-a. Apostol C. Economu (605, 612, 618, 641, 645, 663, 663, 693, 706, 724, 724, 727, 775, 779, 787, 788, 791, 805, 813, 819, 823, 824, 825, 834, 835, 839, 842, 842, 850, 853, 871, 872, 873, 874, 875, 876, P). Baică Paul (611, 620, 627, 628, 632, 651, 657, 658, 659, 687, 692. 696, 709, 716, 718, 720, 721, 723, 724, 733, 743, 744, 745, 748, P. Predețeanu Nicolae (609, 615, 621, 627, 651, 666, 670, 686, 689, 718, 720, 721, 748, 767, 770, 787, 788. 792. 805, 813, 819, 823, 835. 838, 839. 871, 872, 873,

876, E: 212, 221, 249, 251, 261, 267, 268, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 285, 286, 289 P).

CAREI. *Liceul mixt.* Clasa IX-a. Sighet Ovidiu (E: 245, 261, 268, 270, 286) Clasa XI-a Bulancă Eusebiu (610, 621, 628, 647, 663, 666, 670, 684, 716, 718, 720, 724, 734, 762, 765, 785, 788, 793, 805, 819, E: 204, 206, 213, 218, 235, 236, 266, 277, 285, 289).

CÂMPINA. Scoala medie tehnică de Petrol Nr. 2. Anul II. Dima Aurelian (608, 615, 618, 703, 705, E: 223, 224, 225, 227, 228, 229, 230, 231), Popovici Gheorghe (787, 793, E: 268, 272, 286), Anul III. Banghea O. Oprea (659, 752, 791, 794, 797, 799, 800 P). Pârciu Mircea (601, 609, 612, 615, 627, 630, 631, 643, 666, 683, 685, 693, 699, 709, 711, 714, 721, 727, 737, 755, 765, 768, 785, 791, 793, 794. 797, 798, 799, 800, 802, 819, 822, 823, 827, 831, 834, P), Electrician Cucuet Jean (819, 823, 835, E: 277, 285. 289).

CÂMPULUNG-MUSCEL. Şcoala pedagogică, Anul III. Duţă I. Gheorghe (788, E: 209, 217, 218, 223, 227, 247), Şcoala medie tehnică de mecanică agricolă. Anul III. Corneci I. Gheorghe (721, 740, 741, 765, E: 245, 247, 275).

CÂMPULUNG SUCEAVA. Şcoala tehnică medie pentru exploatarea lemnului. Anul I. Haliţchi Constantin (621 724, E: 245, 261, 270), Popescu Vasile (621, 724, E: 213, 225, 239) Rebenciuc Teodor (655, 787, E: 202, 203, 204, 207), Anul II. Strunganu Dumitru 604, 633, 651, 728, 748), Ungureanu I. Ştefan (606, 640, 655, 683, 685, 698, 701, 702, 703, 705, 707, 710, 711, 718, 727, 728, 730, 734, 748, 751, 756, 757, 758, 770, 777, 787, 823, 834). Şcoala medie tehnică de Construcţii Anul I. Boloca Ion (268, 270, 274, 277, 279, 281, 286, 288, P). Anul II. Răileanu Gheorghe (683, 685, 686, 691, 696, 710, 716, 721, 723, 724, 727, 730, 737, 739, 742, 743, 745, 748, 751, 758, 759, 765, 766, 768, 769, 770, 771, 772, 778, 780, E: 223, 224, 225, 227, 228, 231, 232, 233, 236, 237, 239, 240, 243, 245, 251, 265 P). Liceul mixt. Clasa IX-a. Hogea Ion (633, 745, E: 225 245, 261). Clasa X-a. Parascan I. Ilie (777, 835, E: 248 258, 261, 279, 280, 285, 289).

CHITILA (REG. BUCUREŞTI). Clasa VII-a. Chiţimia Eustaţiu (E: 203, 205, 206, 209, 213).

CLUJ. Şcoala tehnică de Industrie. Anul II. Mocanu Emil (813, 819, 822, E: 277, 285, 289). Şcoala specială. Muscalu Ştefan (778, 787, 813, 822, 823, 834,P). Liceul de băieţi. Clasa VIII-a. Rusu Andrei (243, 244, 245, 248, 251, 258, 255, 261), Clasa IX-a. Constantinescu Florin (602, 604, 633, 635, 657, 670, 699, 704, 709, 712, 723, 726, 733, 762, 774, 776, 779, 783, P). Haiduc Ionel (651, 658, 737, 743, 746, 748, E: 207, 208, 251, 261, 263). Clasa X-a. Borbath Aron (625, 630, 633, 640, 645, 748, 770, 777, 778, 779) Sparghez Zeno (625, 630, 633, 640, 705, 706, 768, 777, 778), Clasa XI-a. Dobrotă Toma (610, 666, 685, 712, 718, 720, 721, 787, 788), Rusu Aurel (735, 736, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 751, 752, 757, 768, 770, 774, 775, 777, 778, 779, 787, 795, 800, P). Absolvent Grecu Dan (613, 669, 673, 674, 676, 679, 704, 705, 710, 720, 723, 783, 791, 792, 793, 794, 795, 819, 824, 827, 834, 835, P).

CODLEA. (Reg. Stalin). Tofan Liliana (603, 663, 673, 727, 733, 745, 757, 767, 768, 770, 777, 778, 780, E: 234, 248, 249, 252, 253, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 265).

CONSTANŢA. Mitescu Constantin (748, 765, 766, 770, 779, 787, 800, 823, E: 257, 259, 260, 261, 263, 266, 270, 274, 279, 286). Clasa VIII-a. Cristea N. Ion (601, 603, 608, 613, 620, 634, 637, 657, 670, 693, 694, 696, 697, 698, 722, 723, 724, 726, 728, 740, 743, 744, 752, 753, 770, 771, 772, 776, 779, 782, 791, 795, 796, 797, 798, 800, 822, 826, 834, E: 200, 203, 204, 206, 207, 208, 209, 210, 212, 213, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 230, 231, 233, 239, 240, 243, 244, 245, 246, 247, 249, 250, 251, 253, 256, 257, 260, 261, 262, 263, 265, 266, 268, 269, 271, 272, 273, 274, P). Dedi Mihai (670, 740, 213, 217, 218, 221, 225, 230, 236, 245). Nicolae Tudor (685, 779, 213. 230, 236, 257, 267, 260, 289), Clasa X-a. Bumbac Paul (608, 611, 615, 620, 621, 629, 630, 632, 633, 645, 655, 658, 666, 670, 685, 718, 765, 767, 770, 775, 779, 787, 793), Şcoala hidrotehnică. Anul I. Alexandru Ştefan (745, E: 220, 243, 258, 261, 263, 266, 268), Pascu Gheorghe (745, E: 209, 226, 258, 260, 263, 268), Anul II. Duagi Oxel (740, 745, E: 240, 245, 248, 251, 261, 263, 275), Dulică M. (730, 787, 788, 813, 819, 827, 835), Lambă Stelian (779, E: 243, 263, 268, 270), Pană Eugen (612, 613, 615, 620, 621), Chiriana Gh. Cristea (744, 748, E: 245, 246, 247, 251, 258, 266, 268, 270).

CORABIA. *Liceul mixt.* Clasa VIII-a. Boroghina C. Gabriel (707, 770, 774, E: 225, 228, 231, 239, 242, 243, 245, 247, 248). Ilinca V. Veronica (800, E: 262, 263, 266, 268). Simion M. Maria (770, 774, 776, 779, E: 259, 260, 262), Clasa IX-a. Bădănac M. Alexandru (651, 652, 659, 664, 676, 682, 693, 711, 737, 745, 746, 758, 791, 794, 834 P) Boarţă A. Victor (658, 704, 787, 834, E: 208, 210, 216, 217, 218, 223, 230, 260, 261, 263, 266, 270, 279, 281, 286, 288).

CRAIOVA. *Şcoala medie electrotehnică.* Anul I. Dinu Gheorghe (615, 618, 632, 633, 637, 647, 791, E: 200, 203, 204, 205, 209, 212, 213, 223, 235, 246, 247, 248, 262, 263, 266, 268, 270, 271, 274, 279, 280, 281, 284, 285, 286), *Şcoala medie tehnică de mecanică.* Anul III. Costantin P. Marin (817, 827, E: 280, 284, 286). *Şcoala medie tehnică de Comerţ.* Anul I. Georgescu Mihai (768, E: 218, 223, 224, 227, 232, 240, 243, 245, 252, 260, 266). *Şcoala medie de construcţi C.F.R.* Anul I. Dicu P, Marin (819, 835, E: 277, 279, 280, 285, P). *Clasa VIII-a liceu.* Popescu I. Paul (251, 265, 266, 274, 275), Trifan Vasile (655, E: 207, 209, 216, 218, 220, 223, 225, 226, 227), Truţă Coriolan (744, 748, 758, 768, 770, 787, E: 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275), Clasa IX-a. Antonie Ştefan (696, E: 200, 223, 224, 227). Livescu Jean (E: 225, 236, 251, 263, 277, 279, 280, 285, 289), Popescu I. Daniel (604, 745, 748, E: 203, 204, 227, 228), Popescu Silvia (601, 603, 670, 716, 757, 759, 770, 779, 787, 794). Clasa X-a. Ene Gh. Apostol (603, 605, 607, 608, 611, 618, 621, 622, 625, 633, 641, 655, 663, 664, 716, 717, 734, 757, 770, 762, 776, 779, 780, 783, 794, 798, 800, 801, 803, E: 200, 256, 262, 268, 274), Guran V. Marius (603, 605, 608, 622, 641, 655), Gelei Ion (744, 745 748, E: 245. 251, 266, 270, 272, 274, 286). Zidăroiu Gh. Const. (603, 630, 658, 666, 670, 673, 674, 699, 722, 724, 770, 779, 794, 798, 799), Clasa XI-a. Dinu Constantin (625, 640, 647, 651, 663, 670, 693, 703, 706, 707, 723, 740, 746, 770, 779, 791, 794, 813, 819, 834). Galbenu Gheorghe (627, 630, 673, 677, 709, 715, 716, 717, 718, 721, 723, 724, 726, 728, 729, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 751, 752, 761, 762, 770, 774, 775, 779, 780, 783, 787, 788, 791, 794, 819, 823. 824, 831, 834, 842). Tiţă I. Nicolae (653, 699, 753, 756, 765, 767, 768, 770, 774, 775, 777, 788, 794, 804, P).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VII-a. Teodorescu Dorin (209, 215, 218, 220, 227, 232), Clasa XI-a. Florescu C.

Constantin (774, 779, E: 243, 245, 261, 263, 265); Kramer Virgil (655, 658, E: 236, 239, 257), Urluescu G. Ion (768, 779, 770, E: 204, 245, 263, 265), Clasa X-a. Trandafirescu Aurel (E: 243, 245, 247, 248, 258), Clasa XI-a. Boncea Vasile (775, 794, 813, 819, 822, 823, 834).

DOROHOI. Clasa IX-a. Cârlănescu Mircea (748, 752 764, 791, 792, 794, 798, E: 260, 261, 262, 266, 270, 272, 274). Turic Laurențiu (726, 787, 791, 792, 794, 798, E: 245 248, 251, 260, 261, 268, 270, 271, 274), Clasa X-a. Gavulea Bogdan (765, 767, 784, 788, 792, 793, 812, 823, 824, E: 266, 268, 269, 271, 274, 275, 283, 285, 286, 289), Cojocaru V. Mihai (604, 611, 630, 631, 632, 642, 643, 648, 651, 663, 664, 665, 666, 676, 685, 691, 707, 716, 721, 733, 734, E: 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 223, 224, 225, 226, 228, 230, 231, 232, 235, 237, 239), Eftimescu Nicolae (611, 630, 633, 655, 658, 665, 721, 736, 748, 776, 794, E: 207, 208, 212, 213, 216, 217, 218, 220, 236, 257, 261, 263, 268, 270, P). Clasa XI-a. Scutelnicu Constantin (634, 640, 651, 655, 664, 667, 729, 765, 767, 770, 771, 772, 773, 775, 776, 777, 778, 779, 782, 783, 787, 791, 792, 794, 796, 797, 798, 804, 806).

DRĂGĂȘANI, (Reg. Pitești). Școala medie tehnică agricolă. Anul I. Dascălu C. Mircea (765, 787, E: 203, 217, 218, 223, 245, 252).

FILIAȘI. (Reg. Craiova). Școala elementară Salcia. Clasa VII-a. Vulpescu Barbu (E: 245, 248, 251, 260, 279).

FOCȘANI. Clasa IX-a. Ianuc I. Corneliu (716, 721, 723, 731, 737, 739, 743, 745, 748, 765, 768, 769, 770, 774, 787, 792, 793, 800, E: 234, 253, 260, 266, 268, 270, 274, 275). Ionescu Dragomir (600, 601, 607, 608, 609, 611, 618, 620, 624, 627, 643, 674, 685, 691, 693, 698, 701, 718, 721, 722, 723, 724, 726, 727, 728, 731, P). Pandrea Nicolae (609, 634, 666, 678, 705, 710, 711, 714, 721, 723, 724, 731, 755, 759, 760, 764, 770, 772, 774, 780, 788, 791, 792, 794, 796, 797, 798, 804). Manolache V. Dumitru (611, 655, 658, 670, 701, E: 209, 216, 217, 218, 225, 236, 237, 243, 245, 247, 263, 270). Robănescu N. Adrian (609, 611, 615, 618, 625, 630, 651, 666, 670, 685, 696, 718, 723, 728, 731, 748, 765, 779, E: 204, 209, 212, 216, 224, 239, 243, 245, 248, 251, 255, 257, 258, 261, 263, 270). Clasa X-a. Didiv Bogdan (601, 603, 604, 606, 608, 632, 645, 651, 707, 708. 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 733, 734, 735, 736, 737, 740, 742, 743, 744, 747, 748, 764, 765, 767, 768, 770, 773, P). Dumitriu V. Constantin (611, 629, 632, 643, 651, 666, 670, 676, 701, 718, 721, 723, 726, 728, 731, 743, 744, 748, 765, 767, 768, 792, 793, 794, 823, 834, E: 226, 230, 233, 235, 236, 243, 244, 247, 249, 253, 258). Ioan D. Ioan (604, 605, 622, 624, 625, 631, 664, 666, 670, 671, 676, 690, 697, 698, 699, 703, 707, 709, 710, 717, 723, 727, 728, 729, 731, 744, 745, 746, 747, 750, 765, 766, 770, 772, 773, 775, 776, 777, 779, 780, 782, 783, 787, 788, 791, 794, 795, 796, 797, 798, 804, 805, 807, 808, 810, 813, 814, 816, 819, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 834, P). Istrate Mircea (600, 601, 603, 604, 624, 625, 627, 629, 633, 641, 651, 655, 658, 664, 666, 670, 673, 681, 693, 695, 716, 721, 726, 727, 728, 744, 748, 757, 765, 768, 770, 779, 787, 791, 804, 805, 806, 816, 841, 842, 871 872, 873, 874, 876, P).

GALAȚI. Clasa IX-a. Dermengea Milică (643, 666, 764, 765, 792, 793, 823, E: 206, 209, 276, 285, 289), Voju Dionisie (724, 728, 742, 743, 744, 774, E: 207, 223, 225, 226, 257, 261, 270), Clasa X-a. Balaban Emil (601, 604, 605, 607, 608, 609, 610, 611, 615, 618, 620, 621, 622, 625, 627, 629, 630, 632, 633, 641, 642) Bălan Marin (643, 666, 685, 686, 764, 765, 767, 793), Dumitrescu Tiberiu (744, 748, 768, 777, 778), Enea I. Ion (643, 686, 765, 792, 793), Dabija Sorin (601, 603, 604, 605, 607, 608, 609, 611, 612, 613, 615, 617, 618, 620, 621, 624, 625, 627, 630, 631, 623, 633, 636, 641, 642, 647, 651). Licea Ion (628, 631, 665, 683, 684, 685, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 734, 736, 737, 739, 740, 741, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, P). Vasiliu George (601, 605, 612, 617, 618, 620, 624, 625, 630, 632, 633, 636, 637, 641, 642, 643, 645, 647, 649, 651, 654, 655, 658, 659, 662, 668, 674, 677, 679, 682, 663, 664, 666, 669, 670, 672, 673, 683, 684, 685, 686, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 702, 703, 704, 705 P). Clasa XI-a. Lovin Nicu (608, 610, 615, 621, 643, 663, 664, 666, 685, 716, 721, 724, 765, 767, 770, 787, 788, 804).

GIURGIU. Școala medie tehnică mecanică agricolă. Anul II. Măgureanu Iulian (628, 740, 741, 748, 765, 792, 793, E: 206, 207, 210, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 222, 224, 230, 233, 234, 235, 236, 237, 239, 242, 243, 245, 252, 257, 260, 261), Pante Gheorghe (E: 259, 260, 261, 262, 263, 265. 268, 270, 274, 286, 287), Popescu C. Petre (627, 630, 640, 642, 686, 691, 692, 701, 765, 766, 767, 787), Liceul de băieți. Clasa VII-a. Bigan V. Petre (609, 621, 765, E: 200, 206, 227, 228, 230, 232, 233, 237, 243, 247, 252, 276, 277, 286, 289), Clasa VIII-a. Mișcol Mircea (658, 788, 800, 803, 804, 823, E: 202, 211, 232, 253, 268, 270, 271, 273, 274, 276, 277, 278, 279, 281, 282, 284). Clasa IX-a. Aldea Vasile (652, 658, 674, 718, 721, 723, 729, 740, E: 208, 209, 233, 234, 235, 236, 243), Culcea Marin (611, 670, E: 203, 236, 240), Ștefănescu O. Sorin (782, E: 206, 209, 264, 286, 276, 289). Clasa X-a. Bătinețu M. Dumitru (602, 613, 615, 664, 685, 740, 770, 791, 792, 805, 815, 823, E: 200, 201, 204, 212, 221, 222, 223, 225, 229, 230, 231, 236, 240, 250, 252,258, 260, 261, 266, 263, 266, 269, 270, 271, 273, 274, 276, 277, 279, 280, 284, 285, 289, P). Bigan V. Stan (600, 605, 615, 621, 633, 706, 707, 716, 721, 741, 765, 766, 768, 770, 771, 792, 800, 805, 819, P). Petcu I. Dumitru (604, 611, 618, 632, 640, 644, 655, 665, 693, 706, 710, 719, 746, 754, 761, 764, 775, 779, 784, 787, 788, 790, 791, 792, 793, 794, 798, 800, 805, 806, 813, 814, 819, 823, 834, 835, 839, 844, 850, 851, 864, 865, 871, 872, 873, 874, 875, 876, E: 269, 276, 277, 285, 289, P). Roșioru Gheorghe (813, 819, 823, 825, E: 276, 277, 285, 286, 289), Vlad Ilie (625, 650, 685, 765, E: 225, 230,235, 236. 258, 259).

HUNEDOARA. Școala medie tehnică siderurgică. Absolvent Cimporescu Doinel (601, 603, 604, 625, 627, 629, 631, 632, 651, 655, 658, 663, 666, 673, 718, 721, 797, 798, 800, 804, 805, 807, 810, 813, 814, 819, 823, 824, 826, 827, 827, 834, 837, 839, 842, 845 850, 856, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 873, 874, 875, 876, E: 200, 201, 202, 206, 207, 208, 238, 285, 286, 288, 289, P).

IAȘI. Clasa VIII-a. Hogaș C. Constantin (794, E: 213, 215, 216, 218, 222, 223, 225, 228, 230, 239, 243, 244, 245). Clasa IX-a Arsintescu I. Virgil (670, 676, 691, 721, 779, E: 227, 231, 233, 234, 235, 236. 239, 240, 242, 245, 247, 251, 252, 254, 257, 259, 260, 261). Herșcovici Iosif (753, 770, 772, 774, 776, 779, 783, 791, 794, 797, 799, 834). Clasa X-a. Ciobanu Maria (611, 633, 724, 779, 834). Școala pedagogică. Căruceru Neti (E: 240, 245, 251, 257, 239, 261),

Anul III. Ioniță I. Ioan (736, 744, 745, 748, 757, 768, 783).

ORADEA. Clasa V-a. Mureșan Octavian (E: 202, 203, 204, 219, 254, 259, 278), Clasa VII-a, din Inad (Salonta). Iuhas Ioana (E: 252, 254, 257, 258, 259, 260, 266, 271), Maxim Maria (E: 252, 254, 257, 258, 259, 260, 266, 270), Daina Iosif (E: 252, 254, 257, 258, 259, 260, 266, 271), Clasa VII-a. Bocu Monica (615, 621, 770, 787, E: 242, 243, 245, 246, 247, 248, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275). Guiași Silviu (615, 621, E; 200, 201, 202, 208, 209, 213, 217, 218, 223, 225, 229, 230, 233, 236, 239, 240, 243. 245, 246, 247, 274, 277, 282, 285, 289, P). Rus Ioan (613, 615, 621, 765, 770, 787, E: 200, 201, 202, 203, 204, 209, 257, 260, 266, 267, 268, 269, 286, P) Clasa IX-a. Bocu Mircea (602, 620, 631, 632, 640, 641, 645, 647, 650, 681, 693, 695, 737, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 790, 791, 792, 793, 794, 795, Junger Robert (615, 658, 670, 685, 706, 721, 723, 745, 793, 823, E: 216, 228, 231, 236, 237, 239, 242, 243, 244, 246, 247, 248, 252, 257, 261, 263, 264, 268, 275, 276, 277, 282, 282, P). Școala tehnică de construcții Anul II. Sandor Vasile (786, 787, E: 260, 266, 267).

ORAȘUL STALIN. Clasa X-a. Nan Stelian (601, 603, 604, 608, 621, 632, 645, 648, 663, 695, 698, 701, 706, 724, 727, 736, 740, 741, 743, 744, 745, 748, 762, 765, 767, 768, 769, 770, 774, 780, 792, E: 246, 247, 257, 261, 263, 270, 274). Gruia V. Faroga (E: 236, 239, 245, 251, 256, 257, 260, 261, 262, 266, 268, 270, 272, 281, 286), Roman I. Ioan (242, 243, 247, 251, 257, 259, 261), Tudor E. Alexandru (744, 765, 767, 791, 792, E: 243, 244, 252, 259, 275) Vlase Liviu (615, 618, 627, 630, 664, 701, 745, 762, 765, E: 213).

ORAȘTIE. Școala elementară din Blandiana. Clasa VII-a. Răcătăian Eremia (E: 245, 264, 279, 280, 282, 287).

ORAVIȚA. Clasa XI-a. Giurgiu I. Ioan (Aplicația determinanților).

PIATRA NEAMȚ. Clasa IX-a. Gavril Gheorghe (611, 613, 632, 676. 679, 748, E: 214, 216, 218, 220, 222, 223, 224, 226, 227, 236, 240, 257, 259, 260, 262, 263, 265). Clasa XI-a. Haimovici V. Fulga (647, 716, 717, 742, 743, 745, 748, 780, 783, 804 E: 247, 248, 263), Sum Constantin (666, 682, 712, 742, 747, 748, 758, 780, 783, 793, 804, E: 274).

PAȘCANI. Clasa VII-a. Plaiu Mihai (E: 243, 245, 248, 251, 260, 262, 263, 270), Clasa X-a. Viener Bernad (746, 770, 819, E: 200, 202).

Evidențiați

Din lista precedentă a rezolvitorilor care încep cu literile A-P, se evidențiază: Gheția I. Eugen (Clasa XI-a, L.b. 5, București), *Mihăilescu N. Ștefan* (Clasa XI-a L.b. 3, București), *Licea Ioan* (Clasa X-a. Galați), *Tătaru D. Emil* (Clasa IX-a. Aiud). *Ioan D. Ioan* (Clasa X-a. Focșani), *Vasiliu George* (Clasa X-a. Galați), *Cristea I. Ioan* (Clasa VIII-a. Constanța, *Andreescu Gh. Mircea* (Clasa XI-a, L.b. 10 București), *Petcu I. Dumitru* (Clasa X-a Giurgiu), *Bocu Mircea* (Clasa IX-a. Oradea), *Istrate Mircea* (Clasa XI-a Focșani), *Andreescu Gh. Radu* (Clasa IX-a. L.b.10 București), *Stoicescu T. Dumitru* (Clasa X-a Buzău), *Cimporescu Doinel* (Absolvent Hunedoara), *Petrică Zamfira* (Clasa X-a. Centrul școlar 2. 10. 13, București). *Parciu Mircea* (Anul III, Școala medie Câmpina). *Georgescu Ioan* (Clasa XI-a L.b. 5 București), *Bocu Monica* (Clasa VIII Oradea), *Constantinescu D. Mircea* (Clasa X-a L.b.1 București), *Măgureanu Iulian* (Anul II Școala medie Giurgiu), *Bucur D. Gheorghe* (Clasa VII-a Brănești Ploești), *Teodosiu Cristian* (Clasa X-a. L.b.8. București), *Răileanu Gheorghe* (Anul II. Școale medie Câmpulung, Suceava), *Truță Coriolan* (Clasa VIII-a, Craiova), *Ene Gh. Apostol* (Clasa X-a. Craiova), *Vasilescu Constantin* (Clasa X-a. Călărași), *Predeteanu Nicolae* (Clasa XI-a Caracal), *Economu C. Apostol* (Clasa XI-a, Caracal), *Nan Stelian* (Clasa X-a. Orașul Stalin). *Popovici Radu* (Clasa VIII-a, L.b.3, București), *Tănase Dumitru* (Anul III, Măsurători terestre, București).

* * *

Nota. Lista rezolvitorilor și evidențiaților din localitățile care încep cu literele P—Z, va apare în numărul următor al Revistei Matematice și Fizice.

* * *

— Rezolvarea fiecărei probleme trebue să fie făcută separat, cu explicațiile necesare; iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie; iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei și enunțul complect. După soluționarea problemei, elevul să scrie citeț numele, clasa și școala unde urmează.

— Se mai primesc soluții numai la problemele cu numărul de ordine începând cu 784 și următoarele; iar pentru exercițiile elementare dela E: 266 și următoarele, adică din ultimele șase numere din R.M.F.

— Pentru premierea rezolvitorilor de probleme din R.M.F. pe anul 1953 se va ține seama de toate soluțiile primite între 1 Noembrie 1952 și 1 Noembrie 1953 și anunțate la rubrica rezolvitorilor, de calitarea soluțiilor și de modul lor de redactare, precum și de clasa pe care o urmează rezolvitorul.

— După apariția numărului 10 al R.M.F. din Octombrie 1953, elevii evidențiați în ultimile 12 numere ale revistei să întocmească câte o fișe cuprinzând numele, adresa actuală și toate problemele ce au rezolvat, în ordinea numerică a lor și anunțate la rubrica rezolvitorilor începând cu numărul 11 din Noembrie 1952.

— Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste; iar trimiterea lor să se facă odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți ca să înceapă a propune probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice și fizice, articole, dări de seamă asupra activității cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, cereri, sugestii și propuneri, etc., se trimit pe adresa: **Revista Matematică și Fizică, Strada Dionisie Lupu 40, Raionul Stalin, București.**

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poștale dela orașe și sate, prin factorii poștali, prin propagandiști precum și la secțiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru întreprinderi . . . . . Lei 60 anual

Tarif pentru muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 1239 — ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4 — BUCUREȘTI

Lei 1.—

E 1426/dc

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT
Institut de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEH - CBIRE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár BUDAPEST

Trăiască în veci
Prietenia Româno-Sovietică!

ANUL IV

OCTOMBRIE 1953

10

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

	Pag.
1. *Etapele de desvoltare a geometriei. (Prelucrare după articolul «Geometria» din Marea Enciclopedie Sovietică)*	245
2. *Despre axiomatica geometriei, de profesor universitar N. Mihăileanu*	247
3. *Magnetofonul de ing. Petre Demilano*...	249
4. *Construcţia şi principiul transformatorului electric de N. Rădulescu*	257
5. *Noutăţi din ştiinţa şi tehnica sovietică*...	258
6. *Chestiuni de examen (1078—1083)*	260
7. *Probleme rezolvate (637 703 708 709, 713 717, 726 732)*	260
8. *Probleme propuse (1053—1077)*	265
9. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 352 — E: 368)*	267
10. *Rubrica rezolvitorilor de probleme*	268

10

ANUL IV OCT. 1953

In cinstea Lunii Prieteniei Româno-Sovietice au apărut primele volume din „Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R.“

1) „*Bazele Teoriei Numerelor*“ de . . . **Eugen Rusu**
2) „*Şiruri Recurente*“ de . . . . . **A. I. Marcuşevici**
3) „*Numerele lui Fibonacci*“ de . . . . **N. N. Vorobiov**

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 10 Octombrie 1953

ETAPELE DE DESVOLTARE A GEOMETRIEI

DUPĂ ARTICOLUL «GEOMETRIA» DIN MAREA ENCICLOPEDIE SOVIETICĂ

In procesul de desvoltare a geometriei se pot indica patru perioade fundamentale a căror succesiune au determinat schimbările calitative ale geometriei.

Prima perioadă este perioada naşterii geometriei ca ştiinţă matematică, care a avut loc în Egiptul antic, Babilon şi Grecia prin sec. al 5-lea înainte de începutul erei noastre. Primele informaţii privind geometria apar la începuturile desvoltării societăţii. Trebue să considerăm ca începuturi ale ştiinţei, determinarea primelor legi generale. Acest moment nu poate fi determinat. Cea mai veche lucrare cunoscută cuprinzând începuturile geometriei s'a păstrat în Egiptul antic şi se referă aproximativ la sec. 17-lea înainte de începutul erei noastre; dar desigur, ea nu este prima. Cunoştinţele de geometrie din acea peroadă n'au fost numeroase şi se reduceau înainte de toate la calcularea ariilor şi a volumelor. Ele erau expuse sub forma unor reguli, care erau probabil în mare măsură de origină empirică. Demonstraţiile logice erau desigur încă foarte primitive. Conform mărturiilor istoricilor greci, geometria a fost adusă în Grecia din Egipt şi Babilon în sec. 7 înainte de începutul erei noastre. Aci, în decursul câtorva generaţii ea s'a desvoltat într'un sistem armonios. Acest proces s'a petrecut pe calea acumulării de noi cunoştinţe geometrice, lămuririi legăturilor între diferitele fapte geometrice, a elaborării metodelor de demonstrare şi însfârşit, a formării noţiunilor despre figură, despre teoreme şi despre demonstraţie.

Acest proces a dus însfârşit la un salt calitativ; geometria s'a transformat într'o ştiinţă matematică independentă. Au apărut expunerile ei sistematice unde propoziţiile se deduceau succesiv prin demonstraţie.

Din acel timp începe a doua perioadă a desvoltării geometriei. Se ştie că expunerile sistematice ale geometriei din sec. al 5-lea înainte de începutul erei noastre au fost menţionate de Hipocrat şi de către alţii. Dar rolul hotărâtor l-au jucat ulterior «Elementele» lui Euclid apărute aproximativ cu 300 ani înainte de începutul erei noastre şi care s'au păstrat până în prezent. Aci geometria este tot aşa cum este înţeleasă în esenţa ei şi acuma, dacă ne limităm numai la geometria elementară care se învaţă în şcoala medie. Aceasta este ştiinţa despre formele spaţiale cele mai simple şi relaţiile dintre ele, desvoltată într'o succesiune logică, plecând dela propoziţii fundamentale clar formulate — axiome, şi dela reprezentări spaţiale de bază.

Geometria desvoltată conform principiilor lui Euclid, chiar precizată şi îmbogăţită cu noi obiecte şi metode de cercetare, se numeşte euclidiană. Incă în Grecia i s'au adăugat propoziţii noi, s'au creat metode noi pentru determinarea ariilor şi volumelor (Arhimede în veacul al 3-lea înainte de începutul erei noastre), studiul despre secţiuni conice (Apolonius din Pergam, în veacul al 3-lea î.î.e.n.), se adaugă începuturile trigonometriei (Hiparc în veacul al 3-lea î.î.e.n.). şi geometria pe sferă (Menelaos în veacul I î.î.e.n.). Căderea societăţii antice sclavagiste a dus la stagnarea desvoltării geometriei; totuşi ea continuă să se desvolte în ţările din răsăritul arab, în Asia Mică şi în India.

Renaşterea ştiinţelor şi artelor în Europa provocată de naşterea capitalismului, a dus la o nouă înflorire a geometriei. In principiu geometria a păşit înainte în prima jumătate a sec. 17 datorită lui Descartes, care a introdus în geometrie metoda coordonatelor, dând posibilitatea să se facă legătura între geometrie şi algebră, care era atunci în desvoltare, şi cu analiza, care tocmai apărea. Aplicarea metodelor acestor ştiinţe în geometrie, a dat naştere geometriei analitice şi celei diferenţiale. Geometria a păşit calitativ pe o treaptă nouă în comparaţie cu geometria anticilor. Ea a început să studieze figurile mult mai generale şi să se folosească pentru aceasta de noi metode. Deaceea, perioada a treia a desvoltării geometriei poate fi socotită din acel moment.

Geometria analitică studiază figurile şi transformările lor folosindu-se de metodele algebrei. Geometria diferenţială apărută în sec. 18 ca rezultat al lucrărilor lui L. Euler, G. Monge şi ale altora, cercetează orice linie curbă şi suprafaţă precum şi transformările acestora. Denumirea ei este în esenţă legată de metoda ei, care reiese din calculul diferenţial. In prima jumătate a sec. 17 apar şi începuturile geometriei proiective prin lucrările lui Desargues şi Pascal. Ea a luat fiinţă din problemele reprezentării corpurilor pe un plan. Primul ei obiect constă în studierea propietăţilor figurilor plane care se menţin prin proiecţii. Forma definitivă şi expunerea sistematică a acestor noi orientări în geometrie a fost dată în sec. 18 şi începutul sec. 19 de către L. Euler pentru geometria analitică (1748), de către Gaspar Monge pentru cea diferenţială (1822), iar stu-

diul însuşi despre reprezentarea geometrică a corpurilor pe un plan, a fost încă dinainte desvoltat (1799) şi exprimat prin sistemul lui Monge sub forma geometriei descriptive. In toate aceste discipline noi, bazele geometriei au rămas neschimbate ca şi ansamblul figurilor studiate şi a însuşirilor lor. Deasemeni, metodele aplicate se desvoltau mereu. Aceasta era epoca naşterii capitalismului industrial, iar o cauză adâncă pentru desvoltarea acestor discipline noi au fost cerinţele ştiinţelor naturii, ale tehnicii şi ale industriei.

A patra perioadă în desvoltarea geometriei se deschide prin noua geometrie neeuclidiană, construită de N. I. Lobacevschi, denumită acum Geometria lui Lobacevschi. Prima lucrare a lui Lobacevschi în această direcţie, a fost prezentată de către el la o şedinţă a Facultăţii Fizico-Matematică dela Universitatea din Kazan în anul 1826 şi publicată în formă desvoltată în anul 1829. In 1832, geometrul ungur Ianoş Boliay, independent de dânsul, a publicat o lucrare în aceiaşi direcţie, dar într'o formă mai puţin desvoltată. Sursa, esenţa şi valoarea ideilor lui Lobacevschi se reduc la următoarele: în geometria lui Euclid există o axiomă despre paralele care afirmă: « Printr'un punct care nu se găseşre pe o dreaptă dată, nu se poate trasa mai mult decât o dreaptă paralelă celei date » Numeroşi geometri au încercat să demonstreze această axiomă pornind dela alte premize de bază ale geometriei, dar fără succes. Lobacevschi s'a convins că o asemenea demonstraţie nu este posibilă.

Afirmaţia opusă axiomei lui Euclid va fi: «Printr'-un punct care nu se găseşte pe o dreaptă dată se poate trasa nu una ci cel puţin două drepte paralele ei ». Aceasta şi este axioma lui Lobacevschi. După gândirea lui Lobacevschi, complectarea acestei teze cu celelalte teze de bază ale geometriei nu trebue să ducă la contradicţii, adică toate concluziile obţinute pe baza unei asemenea completări vor fi logic ireproşabile. Sistemul acestor concluzii formează chiar o nouă geometrie neeuclidiană. Meritul lui Lobacevschi constă în aceea că el nu numai că a expus această ideie dar efectiv a construit şi desvoltat multilateral această nouă g ometrie, care este tot atât de logică şi desăvârşită, bogată în concluzii, ca şi cea euclidiană, cu toată neconcordanţa ei cu reprezentările concrete obişnuite. Lobacevschi a considerat geometria lui, ca o teorie posibilă a relaţiilor spaţiale; totuşi ea a rămas ipotetică până în anii 1868—1870 când a fost elucidat sensul ei real şi astfel a fost pusă baza ei definitivă.

Revoluţia în geometrie, produsă de Lobacevschi, este tot atât de importantă ca orice schimbare în ştiinţele naturii şi nu în zadar Lobacevschi a fost denumit « Copernic al geometriei ». Din ideile lui s'au desprins trei principii care au determinat o desvoltare nouă a geometriei. Primul principiu constă în aceea că nu numai geometria euclidiană poate fi gândită logic ci şi celelalte « geometrii ». Al doilea principiu — este însuşi principiul construirii teoriilor geometrice noi pe calea modificărilor şi generalizării poziţiilor de bază a geometriei euclidiene, adică în cele din urmă, a datelor experienţei spaţiale. Tocmai în această direcţie s'a desvoltat şi continuă să se desvolte geometria abstractă. Al treilea principiu constă în aceea că veridicitatea teoriei geometrice poate fi verificată numai prin experienţă şi nu este exclus că în viitor cercetările experimentale vor arăta lipsa de concordanţă a geometriei euclidiene cu însuşirile reale ale spaţiului. Problema despre aceste însuşiri nu este problema unei experienţe de speculaţie matematică, ci fizică. Această gândire a lui Lobacevschi arătată mai sus a fost confirmată pe deplin de către fizica modernă. Lobacevschi a introdus o orientare materialistă în filosofia matematicii. Principiile generale enumerate au jucat un rol determinant nu numai în geometrie, dar şi în desvoltarea matematicii în general în desvoltarea metodei ei axiomatice, în înţelegerea relaţiei ei cu realitatea.

Particularitatea principală a perioadei noi începută de Lobacevschi în istoria geometriei, constă în desvoltarea noilor geometrii şi în generalizarea corespunzătoare a obiectului geometriei; apare noţiunea despre diferitele feluri « de spaţii » (termenul « spaţiu » are în ştiinţă două sensuri: dintr'un punct de vedere este un spaţiu real obişnuit, dintr'un alt punct de vedere este « spaţiul » matematic, abstract). Unele teorii s'au format în interiorul geometriei euclidiene în capitole speciale şi numai după aceea au obţinut o poziţie de independenţă. Astfel s'au format geometria proiectivă, afină, conformă şi altele, al căror obiect îl formează studiul însuşirilor figurilor care se menţin la transformările corespunzătoare (proiective, afine, conforme). Geometria proiectivă a fost expusă de către J. Poncelet în 1822 ca un capitol nou al geometriei euclidiene; în 1847 H. Staudt i-a dat o bază independentă, a luat o formă definitivă noţiunea unui spaţiu proiectiv special şi apoi, însăşi geometria euclidiană a început să fie considerată într'un sens anumit ca un capitol al geometriei proiective. Concomitent a apărut şi noţiunea spaţiului afin şi conform. Asemenea geometriei lui Lobacevschi şi alte teorii au fost construite dela început pe baza desvoltării şi generalizării noţiunilor geometriei euclidiene.

Desvoltarea geometriei a fost necondiţionat legată de analiza adâncă a acelor proprietăţi ale spaţiului, care stau la baza geometriei euclidiene. Cu alte cuvinte, ea a fost legată de precizarea bazelor geometriei euclidiene însuşi, care a fost începută de Lobacevschi şi a stabilit independenţa axiomei paralelelor faţă de celelalte axiome ale lui Euclid. Această lucrare a dus la sfârşitul sec. al 19-lea, la formularea exactă a axiomelor geometriei euclidiene, tot astfel şi a celorlalte « geometrii ». Interpretarea reală a geometriei lui Lobacevschi a dus la lămurirea unei probleme despre diferite interpretări posibile a uneia şi aceleiaşi « geometrii ».

In geometria modernă este şi mai caracteristică decât înainte, pătrunderea ideilor şi a metodelor ei în alte domenii ale matematicii, şi invers, astfel că o separare exactă a geometriei de celelalte ramuri ale matematicii, este în esenţă imposibilă. Esenţial este faptul că s'a modificat şi relaţia dintre geometrie şi studiul realităţii materiale. Dacă înainte geometria n'a fost decât o teorie a relaţiilor şi formelor spaţiale

bazate pe tezele formulate de Euclid, acuma ea a devenit o ştiinţă despre forme şi relaţii a realităţii, asemănătoare cu cele spaţiale. Domeniul aplicării ei în cercetarea naturii s'a extins peste măsură. Dar cu toată varietatea aplicării şi abstracţiei teoriilor în geometria contemporană, ele toate au o sursă comună în studiul formelor spaţiale concrete şi al relaţiilor dintre ele, care a fost pentru prima dată concretizată în geometria euclidiană elementară şi din care, în ultimă analiză rezultă toate cunoştinţele de geometrie.

Această unitate a sursei permite de a da geometriei definiţia ca fiind acea parte a matematicii care s'a desvoltat din studiul formelor spaţiale şi a relaţiilor dintre ele.

DESPRE AXIOMATICA GEOMETRIEI

N. MIHĂILEANU
Profesor la Institutul Pedagogic Timişoara

Isvorîtă din activitatea practică, geometria s'a desvoltat pe linia utilităţii ei (de ex. *Thales* a iniţiat teoria figurilor asemenea pentru a determina cu ajutorul umbrei, înălţimea edificiilor) .Ajunsă la un stadiu destul de înaintat, cu un număr bogat de reguli şi de proprietăţi s'a ivit necesitatea inventarierii acestui material, în scop didactic. Această sarcină a revenit lui *Euclid*, profesor la vestita şcoală din Alexandria (sec. 3). Pentru a evita sofistica filosofilor contemporani, care distrugeau totul într'o critică formală, *Euclid* a fost condus să justifice logic, tot ce afirma. A plecat dela un mic număr de fapte, care se verifică în natură şi care pot fi admise ca suficient de simple şi pe baza lor, prin deducţii logice a clădit toată geometria. Dotat cu o minte clară şi cu o frumoasă experienţă didactică, *Euclid* a isbutit să fundeze axiomatic geometria, creind un manual excelent, care a depăşit vremea lui şi care s'a bucurat de o îndelungată autoritate.

Singura preocupare a lui *Euclid* a fost aceea de a folosi un număr cât mai mic de axiome, care să-i permită o reconstituire rapidă a materialului cunoscut al geometriei. In această intenţie, el foloseşte şi axioma următoare, cunoscută sub numele de *postulatul al V-lea*; « dacă o dreaptă *d* taie două drepte *a* şi *b*, aceste ultime două drepte se întâlnesc în partea, în care se află unghiurile a căror sumă este mai mică decât două unghiuri drepte ».

Comparată cu celelalte, această axiomă (numită şi *de paralelism*), fiindcă este echivalentă cu afirmaţia unicităţii paralelei dintr'un punct la o dreaptă are un enunţ mai încărcat. Această observaţie a îndemnat pe geometrii din cele mai vechi timpuri să o considere ca teoremă şi să încerce să o demonstreze, pentru a nu distruge simplicitatea bazelor geometriei. Metoda folosită a fost aceea a reducerii la absurd: se nega concluzia şi printr'un raţionament logic se urmărea să se obţină o propoziţie contradictorie. Se ajungea într'adevăr la concluzii incompatibile cu intuiţia; dar aceasta nu afirmă nimic, fiindcă intuiţia noastră este tributară axiomei precedente, a paralelelor şi a contrazice tocmai ceeace nu s'a admis nu constitue o piesă de raţionament valabil. Cazna vechilor matematicieni era însă imposibilitatea de a contrazice prin acest raţionament de reducere la absurd, chiar axiomele rămase.

De abia în secolul trecut, matematicianul rus *N. Lobacevschi* a arătat că tentativele de demonstrare ale postulatului al V-lea sunt condamnate dintr'un început, să rămână infructuoase, fiindcă această axiomă este independentă de celelalte; nici nu le contrazice, nici nu este o consecinţă a lor.

Dar Lobacevschi a arătat ceva mai mult; că nu este nici unica axiomă de paralelism posibilă. El a înlocuit-o prin axioma că *printr'un punct putem duce două paralele unei drepte date.* Deşi această afirmaţie contrazice formal geometria euclidiană, desvoltările logice ale nouei axiome arată că geometria euclidiană este cuprinsă, ca un caz limită, în geometria lobacevschiană.

Concepţia revoluţionară a lui *Lobacevschi* a ascuţit spiritul de pretenţie al matematicienilor pentru acceptarea celorlalte axiome. S'a recunoscut că lipsesc în construcţia lui *Euclid* unele axiome importante, care deşi admise tacit de el nu sunt logic vorbind, antrenate de restul axiomelor. S'a pornit astfel un curent de a axiomatiza mai just, geometria.

Prima încercare reuşită de acest fel este datorită lui *David Hilbert*, care în lucrarea *Bazele Geometriei* (1899) clasifică propoziţiile geometriei în cinci grupe: de *legătură*, de *ordonare*, de *congruenţă* de *paralelism*, de *continuitate.*

Teoremele de legătură fac apel numai la ideea de situare. Ele sunt bazate pe opt axiome de legătură; iată câteva din ele:

a) *Există cel puţin trei puncte nesituate pe o dreptă.*

b) *Orice plan conţine cel puţin un punct.*

c) *Prin trei puncte nesituate pe o dreaptă trece numai un plan.*

d) *Dacă două plane au un punct comun, ele mai au cel puțin un punct comun.*

e) *Există cel puțin patru puncte nesituate în același plan.*

Din felul cum sunt enunțate aceste axiome se observă preocuparea autorului de a nu angaja mai mult decât este necesar. Este recomandabilă axioma *b)* și nu enunțul mai tare: *un plan conține cel puțin trei puncte*, fiindcă această propoziție este o teoremă; ea poate fi demonstrată cu ajutorul celor cinci axiome de legătură citate, astfel[1]):

După *b)* planul dat α are cel puțin un punct A. După *c)* există cel puțin un punct B nesituat în planul α. După *a)* există cel puțin un punct C, nesituat pe dreapta AB. După *c)* există un plan β, care să treacă prin punctele A,B,C. Planele α și β au un punct comun A. După *d)* ele mai au încă un punct comun, D. Există deci în planul α în afară de A, încă un punct D. După *e)* există cel puțin un punct, E nesituat în planul ABD. Repetând cu E raționamentul folosit pentru punctul C, obținem un al doilea punct în planul α.

Axiomele de ordonare precizează ideea prepoziției «între». De exemplu:

Dintre trei puncte ale unei drepte se află unul și numai unul dintre ele, care este situat între celelalte două.

Cu ajutorul axiomelor de legătură și de ordodonare se poate demonstra un nou lot de propoziții din geometrie.

Axiomele de congruență se referă la așa numita egalitate a elementelor. De exemplu:

Dacă ABC, A'B'C' *sunt două triunghiuri, pentru care perechile de laturi* AB, A'B', AC, A'C' *sunt egale și unghiurile cuprinse între ele deasemenea egale atunci toate unghiurile triunghiurilor sunt respectiv egale.*

De aici, folosind și celelalte axiome de legătură, ordonare și congruență decurg cunoscutele cazuri de egalitate cu toate consecințele lor.

Axiomele de continuitate completează ideea pe care o avem despre structura dreptei. O axiomă (numită a lui *Arhimede*) afirmă că *există un multiplu al unui segment AB care să întrecă orice segment CD*; ea garantează posibilitatea alegerii unei unități, pentru măsurare.

O a doua axiomă (a lui *Cantor*) exprimă că *segmentele cuprinse succesiv și nelimitat unul în altul, tind către un punct.*

Axioma de paralelism (una singură) poate fi lăsată ultima[2]).

Dacă această axiomă enunță unicitatea paralelei dintr'un punct la o dreaptă, obținem geometria euclidiană (clasică); înlocuind această axiomă cu altele contrarii, obținem alte geometrii (neeuclidiene).

Dar să rămânem la geometria euclidiană. Punctele, dreptele, planele acestei geometrii familiare, precum și prepozițiile: între, pe, egal... cu înțelesul lor din această geometrie sunt niște imagini ale noțiunilor care figurează în sistemul precedent de axiome; ansamblul acestor imagini constitue un model al geometriei deservite de axiomele vizate. Geometria euclidiană este deci un model al uneii geometrii abstracte, supuse axiomatizării precedente. Dar ea nu este unica. De ex. punctele unei drepte pot fi determinate prin niște numere: abscisele lor raportate la o origină comună, de ex. în tot ceeace privește geometria lineară (geometria punctelor pe o dreaptă) putem peste tot denumi «punct» numărul corespunzător și mulțimea numerelor reale va constitui un model al geometriei lineare abstracte. De ex. axioma lui *Arhimede* exprimă în limbaj geometric, proprietatea următoare a numerelor reale: fie a, b două numere reale, pozitive, astfel ca $a < b$; există atunci totdeauna un număr natural n astfel ca $na > b$.

Trecând în plan, să numim «punct», perechea de numere (x, y) și «dreaptă» însăși ecuația

$$y = mx + n.$$

«Punctele» diferă între ele prin valorile numerice ale perechii x, y iar «dreptele» prin valorile numerice ale parametrilor m, n. Mai spunem că un «punct» este stiuat pe o «dreaptă» dacă perechea lui (x, y) verifică ecuația dată, etc. In acest mod mulțimea perechilor de numere și mulțimea ecuațiilor lineare în două necunoscute constitue un model al geometriei plane abstracte, construite pe axiomele corespunzătoare dintre cele indicate, așa cum geometria plană clasică este un alt model al acesteia. De ex. prima axiomă de legătură «există cel puțin trei puncte nesituate pe o dreaptă», chiar sub această enunțare exprimă în modelul construit, proprietatea: «există cel puțin trei perechi de numere, care nu verifică o ecuație lineară, în două variabile», etc.

Asocierea aceasta a numerelor și a ecuațiilor pentru puncte și drepte formează începutul metodei așa numitei «geometrii analitice». In acest înțeles, putem simplifica limbajul geometriei analitice numind «punct», perechea de două numere, «dreaptă» însăși ecuația ei, etc.

---

[1]) A se vedea *N. Efimov: Vâșaia geometria*. Moscova 1949 pag. 43 (tradusă de Ed. Tehnică și în limba română).

[2]) *N. Efimov:* lucrarea citată pag. 80.

Construcţia axiomatică a lui *Hilbert* descătuşează geometria de intuiţie. Teoremele geometriei pot fi demonstrate fără figură, ca în exemplul precedent, urmând numai lanţul de axiome.

Şi totuşi aceasta nu trebue privită ca un neajuns. Intuiţia nu trebue să călăuzească singură cercetarea ştiinţifică, fiindcă ea poate fi subiectivă. Acum cinci sute de ani era intuitiv că Soarele se mişcă în jurul Pământului. Dar să nu mergem atât de departe în urmă, ci să căutăm să dăm un răspuns aproximativ iniţial, problemei simple următoare: Se taie meridianul Pământului într'un loc şi se lungeşte cu un metru; apoi îl întindem uniform; cu cât se va ridica el pe faţa pământului? Este «intuitiv» se va răspunde sugestiv, că «rezultatul este neglijabil, faţă de dimensiunile pământului». Să urmărim totuşi, calculul. Fie R, măsurată în metri, raza Pământului. Rezultatul este dat de

$$\frac{2\pi R + 1}{2\pi} - R = \frac{1}{2\pi}$$

adică 1 m: 6,28 $\approx$ 16 cm; este «surprinzător» şi totuşi este real, fiind produsul operaţiilor indicate în enunţ; răspunsul nu depinde de rază.

Intuiţia poate deci să înşele. Dar demonstraţiile intuitive pot păcătui şi altfel. Ele sunt deseori un mod aproximativ de a aranja un rezultat al calculului.

Suntem deprinşi, de ex. să calculăm aria cercului, considerându-l ca limită a poligoanelor regulate înscrise [1]). Acoperim cu pretinsa idee intuitivă de limită un proces delicat al analizei matematice. *Arhimede* era inginer, dar nu proceda astfel. Nu întrebuinţează această cale nici manualele sistematice sovietice de geometrie elementară, de ex. *Bogomolov* [2]) şi *Perepiolchin* [3]), redate pe bază axiomatică. Ele operează astfel: Aria s a unui poligon oarecare înscris cercului este

$$s = \frac{1}{2} \sum a_i l_i$$

l_i fiind o latură, iar a_i distanţa dela centru la această latură; dar $a_i < r$ raza cercului; iar $\Sigma l_i < l$ lungimea cercului. Deci

$$s < \frac{1}{2} r \sum l_i < \frac{1}{2} rl < \pi r^2.$$

Dacă S este aria unui poligon oarecare circumscris cercului, cu aceeaşi formulă, a_i este egală cu raza r iar perimetrul Σl_i este mai mare decât lungimea cercului. Obţinem deci

$$s < \pi r^2 < S$$

şi aria cercului se obţine folosind noţiunea mai simplă, de margine.

Exemplele date dovedesc că nu trebue să fim sclavii intuiţiei.

Axiomatizarea permite să eliminăm intuiţia din judecata matematică.

Această eliberare nu constitue o îndepărtare a geometriei de realitatea fizică, fiindcă axiomatizarea nu face altceva decât să restructureze principiile simple, care exprimă însuşiri ce se verifică în natură, iar cunoaşterea lumii materiale nu poate decât să înainteze dintr'o fundamentare cât mai pretenţioasă a ştiinţelor exacte. După cum se exprimă *Lobacevschi*: «de claritatea primelor noţiuni depinde succesul întregii teorii».

MAGNETOFONUL

APARAT PENTRU ÎNREGISTRAT SUNETELE PE CALE MAGNETICĂ

Ing. *PETRE DEMILANO*
Şef de Secţie la «Energoimport» Secţia «Radio»

Cu toţii am ascultat la radio numeroasele imprimări pe bandă de magnetofon a manifestărilor artistice, culturale şi sportive ce au avut loc în timpul Festivalului Mondial al Tineretului. Deasemenea aproape zilnic ascultăm la radio diverse reportaje din uzine, depe şantiere, ogoare, dela manifestările sportive meetinguri şi conferinţe.

Toate aceste retransmisiuni sunt posibile numai datorită, avantajelor deosebite pe care le oferă magnetofonul acest minunat aparat de înregistrare şi redarea sunetului, care în ultimul timp este folosit şi la noi tot mai mult.

In cele ce urmează încercăm să dăm o descriere tehnică cât mai detailată a acestui aparat.

Progresele mari realizate în electroacustică în ultimul timp, au făcut necesară găsirea unui nou procedeu de înregistrare a sunetului. Vechile procedee s'au dovedit a fi nesatisfăcătoare, deşi calitatea înregistrărilor pe discuri a fost necontenit perfecţionată.

Să luăm de exemplu înregistrarea pe disc: o maşină de înregistrat discuri gravează pe disc sunetele emise înaintea microfonului. Odată gravura făcută, nu se poate schimba nimic din înre-

---

[1]) De ex. *E. Rouché* şi *Ch. Comberousse: Traité de Geometrie*, Paris 1935 p. 344.

[2]) *S. Bogomolov, Geometria.* Moscova. 1949 pag. 253.

[3]) *D. Perepiolchin: Curs elementarnoi geometrii.* I. Moscova. 1948 pag. 211.

gistrare. Dacă executantul bucăţii de înregistrat a făcut o greşeală în timpul imprimării, discul este pierdut, iar înregistrarea trebue reluată cu alt disc. Pe de altă parte, discurile nu reproduc sunetele decât într'o oarecare măsură, deoarece acestea sunt deformate, iar sunetele redate apar mai grave decât cele naturale. Trebue să aşteptăm sfârşitul înregistrării pentru a ne da seama de imperfecţiunile ei. La reproducere, acele uzează discurile; sgomotul de fond creşte cu timpul, iar fidelitatea redării scade.

In cazul înregistrării pe film, este necesar să developăm şi să facem pozitivul peliculei respective, pentru a putea asculta cele înregistrate. Ni se cere un timp considerabil şi nu ne putem da seama imediat dacă înregistrarea este corectă. Preţul de revenire este foarte ridicat, chiar dacă înregistrarea a reuşit de prima dată.

După cum era de aşteptat, atenţia tehnicienilor s'a îndreptat asupra metodelor electrice, care au dat întotdeauna rezultate mulţimitoare. In felul acesta s'a ajuns la înregistrarea pe cale magnetică, a cărui principiu era cunoscut în U.R.S.S., încă de multă vreme, înregistrare care s'a impus apoi prin calităţile sale extraordinare.

Primul aparat pentru înregistrarea şi reproducerea pe cale magnetică a sunetelor a fost realizat acum circa 10 ani. Aparatul a fost pus în circulaţie sub denumirea de «magnetofon». Perfecţionările ulterioare şi aplicaţiile extrem de variate la care se pretează acest aparat au făcut ca el să capete o foarte mare răspândire, după cum vom vedea în cele ce urmează.

Inţelegem prin magnetofon un aparat care serveşte la înregistrarea şi reproducerea pe cale magnetică a sunetului. Suportul magnetic poate fi o bandă magnetizabilă sau un fir metalic. Banda (sau firul) este înregistrată la simpla trecere prin faţa capului magnetic. Imediat după înregistrare, ea poate fi reprodusă, trecând-o prin faţa capului de reproducere, sau anulată, trecând-o prin faţa capului de ştergere.

Este necesar să precizăm dela început, că denumirea de «magnetofon» sub care sunt cunoscute la noi acest gen de aparate, nu este universală. Diversele firme fabricante au introdus denumiri foarte variate, ca: «aparat de înregistrare sonoră pe bandă magnetică» «înregistrator magnetic», «textofon», «dictofon», «audograph», etc., după utilizarea ce se dă aparatului. Principiul de înregistrare este acelaşi la toate aceste aparate.

Avantajele înregistrării magnetice. Inregistrarea pe cale magnetică prezintă o serie de avantajii, faţă de înregistrarea pe disc:

a) Inaltă fidelitate pentru întreaga gamă de frecvenţe auzibile, permiţând înregistrarea cu foarte mici distorsiuni, chiar a frecvenţelor înalte. Regimurile tranzitorii sunt reproduse cu o fidelitate nemaiîntâlnită la celelalte procedee cunoscute.

b) Nivelul sgomotului de fond e foarte redus, în comparaţie cu celelalte procedee de înregistrare, ceeace permite o amplificare puternică, fără a avea distorsiuni la reproducere.

c) Permanenţă absolută în timp a calităţilor de fidelitate şi absenţa sgomotului de fond, indiferent de numărul de reproduceri efectuate, spre deosebire de înregistrarea pe discuri, unde sgomotul de fond creşte, iar fidelitatea înregistrării scade, în raport cu numărul de reproduceri. Se poate evalua la 2000 de ori numărul reproducerilor, fără o diminuare a calităţii.

d) Posibilitatea de a şterge şi reutiliza indefinit benzile, ceeace implică şi posibilitatea de a reîncepe înregistrarea pe aceeaş bandă până se obţine un rezultat optim, fără nici o pierdere de material. Când înregistrarea făcută nu mai prezintă interes, banda poate fi ştearsă cu uşurinţă şi reutilizată.

e) Un avantaj foarte important al înregistrării magnetice îl prezintă posibilitatea de reproducere imediată a celor înregistrate, prin simpla manevrare a unor butoane ale aparatului.

f) Inregistrarea pe bandă se face cu foarte mare uşurinţă şi în orice loc, spre deosebire de cea pe discuri, pentru care sunt necesare instalaţii speciale, destul de complicate.

g) Posibilitatea de a obţine înregistrări de lungă durată. O rolă de bandă durează până la 45 minute, iar una de fir magnetic, până la o oră. In felul acesta se pot înregistra pe bandă emisiuni radiofonice complete, folosindu-se un număr corespunzător de role de bandă.

h) In sfârşit, înregistrarea magnetică mai prezintă o serie de avantajii, dat fiind faptul că se pretează la multe aplicaţii practice, ca: înregistrarea concertelor, conferinţelor, festivităţilor, convorbirilor telefonice, emisiunilor recepţionate prin aparatele de radio, şi altele, despre care vom vorbi mai detailat când ne vom ocupa de utilizările magnetofonului.

Toate aceste avantajii enumerate mai sus, fac ca înregistrarea pe cale magnetică să fie incontestabil superioară celorlalte feluri de înregistrări pe cale mecanică (pe discuri), sau prin intermediul celulei fotoelectrice (pe film).

Principiul de funcţionare. Vibraţiile aerului provocate de vorbă sau muzică desvoltă în microfon o tensiune, care este amplificată şi apoi aplicată bobinei unui mic electromagnet de formă

circulară, care constitue aşa numitul cap de înregistrare magnetică. Această tensiune produce în bobină un curent inductor, care la rândul lui cauzează în electromagnet un câmp magnetic variabil (fig. 1). Prin trecerea benzii magnetice

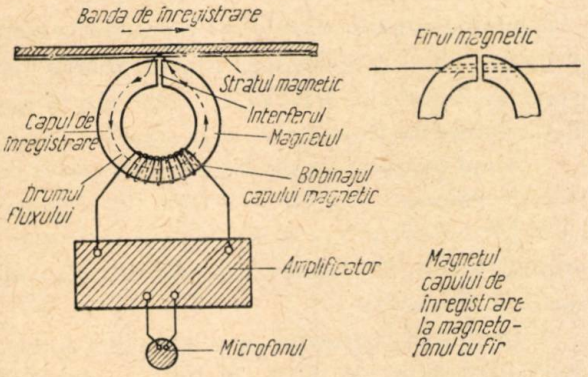


Fig. 1

sau a firului prin faţa interferului, circuitul magnetic se închide prin acestea şi astfel se imprimă suportului magnętic (bandă sau fir) o magnetizare remanentă, care este imaginea variaţiunilor de presiune acustică la care a fost supusă membrana microfonului. Pentru ca această imagine să fie fidelă, magnetizarea este făcută proporţională cu curentul inductor, suprapunând acestuia un curent de înaltă frecvenţă de circa 80 KHz, numit curent de premagnetizare. Acest procedeu de folosirea înaltei frecvenţe la înregistrare şi ştergere, constituie un progres important, realizat în ultimii ani în construcţia magnetofonului.

Aceasta ar fi enunţarea principiului. In realitate însă, fenomenele sunt mai complicate, din cauza imperfecţiunilor magnetice ale materialului din care este făcută banda.

Descrierea magnetofonului. Magnetofonul se poate prezenta sub forme constructive foarte variate, dela magnetofonul agregat dublu pentru înregistrări de studio, până la magnetofonul portabil pentru reportaj. Intre acestea se intercalează o serie de tipuri de aparate cu imprimare pe bandă sau pe fir metalic, cu diverse forme şi utilizări. In cele ce urmează, vom descrie un magnetofon de construcţie obişnuită, apoi vom arăta caracteristicile speciale ale celorlalte tipuri de magnetofoane (fig. 2).

In general, distingem la un magnetofon următoarele părţi:

— Circuitele magnetice
— Amplificatorul
— Dispozitivul mecanic de antrenare al benzii.
— Anexele magnetofonului.

Să studiem amănunţit aceste părţi.

a) *Circuitele magnetice.* Magnetofonul are trei circuite magnetice, corespunzătoare celor trei capete: de înregistrare, de redare (lectură) şi de ştergere.

Capetele de înregistrare sunt nişte electromagneţi de formă circulară cu un interfer foarte mic, prin dreptul căruia trece banda magnetică.

Miezul electromagneţilor, construit din tole dintr'un aliaj de înaltă permiabilitate magnetică, este prevăzut cu un interfer de circa 40 microni în cazul capului de înregistrare, 20 microni la cel de lectură, şi 1 mm la capul de ştergere.

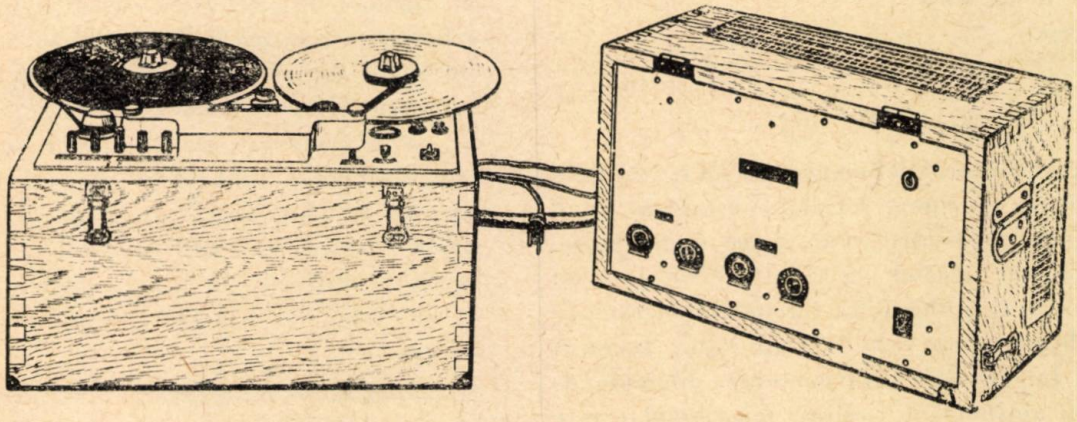


Fig. 2

Electromagneţii prevăzuţi în general cu două bobinaje sunt blindaţi pentru a fi feriţi de influenţele câmpurilor magnetice exterioare şi montaţi într'un suport de bakelită, sau alt material nemagnetic constituind aşa numitul « grup de capete » ce este aşezat pe platoul aparatului. Prin bobinajele capetelor va circula curentul de premagnetizare, simultan cu cel de modulaţie în cazul înregistrării, cel de redare în cazul lecturii şi curentul de înaltă frecvenţă în cazul ştergerii.

După cum am arătat mai sus, construcţia capului magnetic diferă în cazul magnetofoanelor cu fir. La acestea, sâmburele magnetic prezintă în dreptul interferului un canal de secţiune circulară,

prin care trece firul. Această construcţie este necesară pentru a uşura concentrarea fluxului magnetic prin firul de înregistrare.

Când banda trece prin faţa capului de înregistrare, circuitul magnetic se închide prin stratul magnetic aplicat pe aceasta, producând o magnetizare mai puternică sau mai slabă a pulberii de oxid roşu de fier fixat pe bandă.

In cazul reproducerii, fenomenul se produce invers: magnetizarea variabilă a benzii induce în circuitul capului de lectură un curent corespunzător, mai intens sau mai slab, curent ce este amplificat înainte de a trece prin difuzorul de redare.

b) *Amplificatorul.* Magnetofonul este înzestrat cu mai multe blocuri de amplificare, necesare pentru a asigura înregistrarea, reproducerea şi ştergerea. In figura 3 sunt reprezentate schematic primele două.

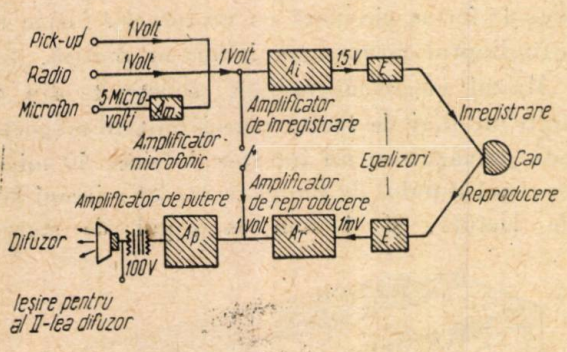


Fig. 3

— Amplificatorul de înregistrare (*A.î.*) are rolul de a asigura un curent sensibil constant în capul de înregistrare, pentru toată gama de frecvenţe. Aceasta este absolut necesar pentru a evita prezenţa distorsiunilor la înregistrare. Amplificarea obţinută este dela 1 la 15 volţi. Intrucât în cazul înregistrării prin microfon, diferenţa de tensiune obţinută la ieşirea microfonului este foarte mică, de ordinul 5 microvolţi, este necesar un amplificator microfonic (*A.m*), care are rolul de a ridica tensiunea de ieşire la 1 volt.

— Amplificatorul de reproducere (*A.r.*) este necesar pentru amplificarea curentului obţinut în capul de reproducere, curent ce este produs la o tensiune de ordinul 1 milivolt. Tensiunea de ieşire a curentului este tot de ordinul 1 volt. Acest amplificator comportă un dispozitiv special destinat a compensa scăderea amplificării în capul de lectură, pentru frecvenţele începând dela 1000 perioade în sus. Circuitul magnetic de reproducere se comportă ca o inductanţă pură, prezentând un coeficient de selfinducţie ridicat şi deci o impedanţă care creşte cu frecvenţa.

Banda înregistrată induce în capul de lectură o forţă electromotrice proporţională cu frecvenţa numai până la o frecvenţă limită, unde pierderile datorite benzii şi circuitului devin preponderente. Peste 3000 perioade, amplificarea scade simţitor şi deaceea este necesară compensarea ei.

Corecţiile amplificatorului de reproducere permit obţinerea unei caracteristici liniare pentru toată gama de frecvenţe dela 40 — 12000 Hz, fără ca distorsiunile de frevenţă să depăşească 2 decibeli.

— Amplificatorul de putere (*Ap*) are rolul de a ridica tensiunea obţinută la ieşirea din amplificatorul *Ar*, pick-up sau radio (fig. 3) tensiuni de ordinul 1 volt, la tensiunea de alimentare a difuzorului: 100 volţi.

— In sfârşit, aparatul mai este prevăzut cu două oscilatoare de 80 şi 40 KHz, care produc curentul de înaltă frecvenţă necesar înregistrării şi ştergerii.

Circuitul magnetic al capului de înregistrare este alimentat concomitent prin curentul de înaltă frecvenţă la 80 KHz., la o intensitate de cca. 10 ma şi prin curentul de modulaţie. Curentul de ştergere este produs la 40 KHz. şi 150 mA.

c) *Dispozitivul mecanic de antrenare.* Pentru antrenarea benzii, magnetofoanele sunt prevăzute cu anumite dispozitive, a căror parte principală o formează motoarele. Dispozitivele mecanice de antrenare ale magnetofoanelor diferă după tip şi fabricaţie. Magnetofoanele simple, portabile, cu fir, sunt prevăzute cu un singur electromotor, care antrenează firul odată cu bobinarea lui, în timp ce magnetofoanele perfecţionate, sunt înzestrate cu două sau trei motoare ce îndeplinesc funcţiuni distincte. In cazul magnetofoanelor cu bandă se prevăd 3 motoare, care au următoarele roluri:

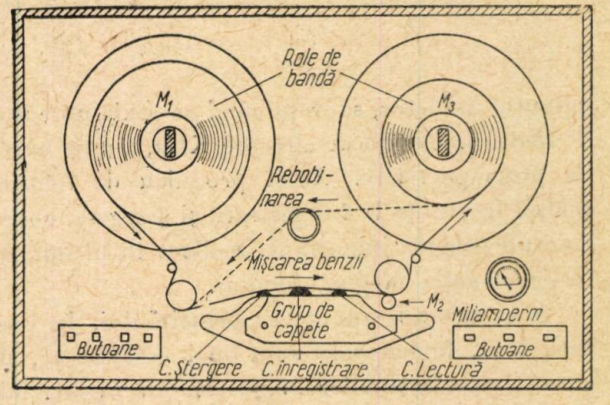


Fig. 4

— Motorul M_1 (fig. 4), de tipul asincron normal, montat pe axul platoului ce conţine rola care se derulează, este destinat a asigura un frânaj regulat

al benzii, astfel ca să-i asigure o tensiune constantă şi o aplicare regulată pe cele trei capete magnetice, în timpul înregistrării şi redării.

— Motorul central M_2 de tip asincron sincronizat, are rolul de a asigura antrenarea benzii cu o viteză constantă (care este în general 77±0,5% cm/sec) atât la înregistrare cât şi la redare.

— Motorul M_3, montat pe axul platoului ce conţine bobina de rebobinare, are rolul de a bobina şi rebobina regulat banda în cele trei cazuri. Precizăm că prin rebobinare înţelegem operaţia de reînfăşurare a benzii de pe bobina pe care a fost bobinată la înregistrare sau lectură, astfel ca după rebobinare, banda să poată fi înregistrată sau redată.

Caracteristicile motoarelor laterale sunt cu totul particulare, comparativ cu motorul asincron de tip normal, în sensul că au un cuplu invers proporţional cu viteza de rotaţie, ceeace este necesar pentru a asigura o întindere constantă a benzii, atunci când diametrul bobinelor variază.

Debobinarea unei benzi de 1000 m. se face, în cazul înregistrării, în cca. 20 minute, iar rebobinarea, în circa 2 minute. Un dispozitiv special permite a se evita frecarea benzii pe capetele magnetice, în cazul rebobinării, pentru a se înlătura o uzură prematură a acestora. Consumul total al aparatului se ridică, în general, la 400 — 500 w.

Pentru derulare mai sunt prevăzute două dispozitive care permit: unul micşorarea progresivă a vitezei benzii, pentru a putea sincroniza aparatul cu un altul identic, în cazul unei înregistrări de durată; celălalt dispozitiv dă posibilitatea de a face să defileze în sens normal, însă cu viteză de rebobinare, o bandă înregistrată, în scopul de a găsi repede un anumit pasagiu.

Cele trei motoare ale aparatului pot fi, deasemenea, comandate dela distanţă, prin releu.

In cazul magnetofoanelor cu fir sunt necesare numai două motoare, care servesc: unul pentru înregistrare şi reproducere, iar celălalt pentru rebobinare. In acest caz, firul se desfăşoară de pe o bobină de diametru mic, pentru a se rebobina cu o viteză aproape constantă, pe platoul rotativ al aparatului ce este prevăzut cu un canal circular. Intrucât firul este subţire, diametrul bobinei de înfăşurare nu variază sensibil cu înfăşurarea firului, astfel că viteza liniară a acestuia rămâne constantă în tot timpul bobinării.

Motorul M_1 are, deobicei, o viteză de 1400 t/m. şi antrenează platoul aparatului prin intermediul unui galet de cauciuc, montat pe axul motorului. Raportul între diametrul galetului şi cel al platoului este astfel calculat, ca să rezulte o rotaţie de 78 ture/minut a acestuia din urmă, viteza standard a discurilor, ceeace face posibilă folosirea aparatului şi pentru reproducerea discurilor.

Pentru ca firul să rămână tot timpul întins şi spre a se evita formarea de bucle la oprire, ceeace ar provoca ruperea firului la pornire, se prevăd două frâne mecanice de frecare, montate una pe axa platoului, iar cealaltă pe axa motorului de rebobinare M_2. Menţinerea întinsă a firului mai este necesară pentru a permite funcţionarea dispozitivului de oprire automată, care intră în acţiune atunci când tensiunea în fir a scăzut prin ruperea firului. Aparatele pot fi prevăzute şi cu un alt dispozitiv care împiedică punerea în funcţiune, dacă firul nu este aşezat corect în capul magnetic. Funcţionarea aparatului poate fi oprită prin acelaş dispozitiv, în momentul în care o porţiune de fir nemagnetic, intercalată în firul de înregistrare, trece prin faţa acestuia. Astfel avem posibilitatea de a opri aparatul într'un anumit moment.

La magnetofoanele simple, portabile, antrenarea firului se face înlocuind electromotorul printr'un resort metalic, identic cu cele folosite la patefoanele obişnuite. Aceste magnetofoane sunt folosite pentru reportaj şi pot funcţiona în lipsa reţelelor electrice de alimentare. Alimentarea circuitelor electrice se face prin baterii uscate şi acumulator. Menţionăm tot aici, că punerea în funcţiune a diverselor motoare ale magnetofoanelor este comandată prin butoane, despre care vom vorbi mai pe larg când ne vom ocupa de funcţionarea magnetofoanelor.

d) *Anexele magnetofonului.* Magnetofoanele au diverse accesorii, dintre care sunt esenţiale: microfonul şi bobinele cu bandă sau cu fir. Microfonul este indispensabil atunci când se fac înregistrări directe şi nu este necesar când se înregistrează prin aparatul de radio recepţie, pick-up sau telefon, acestea având posibilitatea de a fi conectate direct la magnetofon.

— Microfoanele folosite la astfel de înregistrări sunt cele obişnuite: cu cristal sau dinamice. La magnetofoanele mai perfecţionate se folosesc microfoane sensibile.

— Banda şi firul de magnetofon. După cum am atătat mai sus, magnetofoanele sunt de două feluri: cu bandă sau cu fir. Banda poate fi de hârtie pentru magnetofoanele simple, sau din material plastic la cele perfecţionate (bandă cu suport de hârtie, respectiv cu suport din material plastic). Grosimea benzii este de cca. 40 microni, în cazul celor din material plastic şi mai mare în cazul benzilor de hârtie.

Banda este acoperită pe una din feţe, numită faţa activă, cu un strat de 15 microni grosime, de oxid roşu de fier (Fe_2O_3) pulverizat foarte fin; granulele acestuia sunt de ordinul micronului. Acest oxid se obţine prin oxidarea lentă a oxidului negru de fier (Fe_3O_4). Pentru aparatele de amatori, mai puţin pretenţioase, se foloseşte banda cu oxid negru de fier, care constitue un material magnetic mai grosier. Fixarea pulberii pe bandă se face cu ajutorul unui clei special. A mai fost întrebuinţată şi banda magnetică cu baza de fier, aliată cu o combinaţie de nichel şi cobalt, care posedă o magnetizare remanentă şi o forţă coercitivă superioară aceleia a oxidului roşu de fier, însă dificultăţile de ştergere şi căderea rapidă de tensiune constatată la frecvenţe ridicate, a dus la abandonarea acesteia. Menţionăm că fineţea pulberei magnetice depusă pe bandă este esenţială pentru calitatea benzii, asigurând înregistrarea frecvenţelor înalte. Grosimea stratului magnetic trebuie să fie absolut uniformă, deoarece lipsa de uniformitate produce sgomot de fond. Suportul plastic trebuie să prezinte o rezistenţă suficientă la tracţiune, pentru a evita ruperile în timpul înregistrărilor şi redărilor. Deasemenea, nu trebuie să se deformeze la căldură, întrucât aceasta atrage după sine deformarea înregistrării.

Durata unei benzi, la înregistrare şi lectură, este de circa 20 minute la benzile mari de 1000 m. lungime, pentru o viteză de 77 cm/s. La rebobinare, durata este de circa 2 minute. In cazul benzilor mici, cu o lungime de câteva sute de metri, folosite la magnetofoanele portabile, viteza de defilare a benzii este mult mai mică, ajungând la 19 sau 9 cm/s ceeace produce o scădere a calităţii înregistrării, însă durata poate ajunge la 30–40 minute.

Banda de capăt. La capătul benzilor de magnetofon se fixează o bandă specială, tot din material plastic, numită bandă de capăt, care poate avea diferite culori şi are rolul de a servi la pornirea magnetofonului. Pe acesta se poate scrie cu creioane speciale, titlul bucăţii ce a fost înregistrată pe bandă.

Materialele din care se face banda de magnetofon pot fi cu bază sintetică: polivinil-cloride, acetat de celuloză, etc., sau cu bază de hârtie.

Dimensiunile benzilor normale din material plastic, sunt: lungimea 1000 m, lăţimea 6,5 mm, grosimea 55 microni, diametrul unei role circa 28 cm, durata 20 minute.

In caz de rupere, benzile se pot lipi cu o soluţie specială. — Firul metalic pentru înregistrat. Pentru înregistrările puţin pretenţioas, se folosesc deobicei, fire metalice din oţel, crom-nichel, cu un diametru de 0,08 mm. şi cu lungimi diferite, suficiente pentru 15 — 30 sau 60 minute durată de înregistrare. Firul de înregistrat este bobinat pe role de circa 7 cm. diametru. O rolă pentru o oră durată de înregistrare are circa 2200 m fir. Acest fir rezistă la influenţele atmosferice ca: temperatură, umiditate, etc. şi are o durată nelimitată, deoarece ştergerea şi reutilizarea lui nu influenţează asupra calităţii înregistrării.

Folosirea firelor influenţează asupra fidelităţii înregistrării, dar prezintă avantajul că au o rezistenţă mai mare decât benzile, pot fi înnodate în caz de rupere şi sunt mai uşor de manipulat. Capetele firului de înregistrare se fixează ca şi banda magnetică, de o bandă specială de capăt.

Caracteristicile tehnice esenţiale ale magnetofonului. Pentru determinarea din punct de vedere tehnic a unui magnetofon, este necesar să cunoaştem anumite date, dintre care citâm pe cele mai importante:

— Natura suportului magnetic: bandă sau fir.

— Viteza benzii sau a firului, obişnuit 77 cm/sec.

— Lăţimea benzii: 6,5 mm (normalizată).

— Durata unei role bandă sau fir; 20 minute la bandă şi o oră sau mai mult în cazul firului.

— Durata de rebobinare: circa 2 minute.

— Tensiunea de intrare la modulaţie: 0,80 volţi.

— Impedanta conductorilor de intrare: 600 ohmi.

— Frecvenţe înregistrate: 30 — 10000 Hz.

— Frecvenţa de ştergere; 35 — 40 KHz.; de premagnetizare 80 — 105 KHz.

— Puterea consumată: 330 — 500 w;

— Tensiunea reţelei de alimentare: 110 — 220 volţi.

Funcţionarea magnetofonului. După cum rezultă şi din cele enunţate mai sus, magnetofonul execută în timpul funcţionării sale, trei operaţiuni distincte şi anume:

— Operaţia de înregistrare a benzii sau a firului magnetic;

— Operaţia de redare a sunetelor, şi

— Operaţia de ştergere a benzii sau firului înregistrat, în cursul căreia se anulează magnetizarea imprimată benzii, astfel că aceasta poate redeveni aptă pentru o nouă înregistrare.

Observăm că, în cazul magnetofonului, un singur aparat execută toate aceste trei operaţiuni, în comparaţie cu înregistrarea pe disc sau pe film, unde primele două operaţiuni sunt făcute cu ajutorul a două aparate distincte, iar cea de a treia operaţie, cea de ştergere, nu este posibilă. Progresul făcut în domeniul înregistrărilor sonore prin descoperirea acestui procedeu de înregistrare

este deci foarte mare, aducând o simplificare enormă şi îmbunătăţind totodată şi calitatea înregistrării.

Să studiem pe rând aceste trei operaţiuni.

a) *Inregistrarea.* Am văzut la «principiul de funcţionare» modul cum se face înregistrarea. Banda magnetică neînregistrată trece cu viteză constantă prin faţa capului magnetic de înregistrare, al cărui circuit este străbătut de curentul de înaltă frecvenţă, produs de oscilatorul magnetofonului, peste care se suprapune curentul de modulaţie produs de microfon, pick-up, telefon sau aparatul de radio recepţie. In felul acesta, banda sau firul se magnetizează variabil, înregistrând fidel sunetele produse. Curentul de înaltă frecvenţă este menţinut deci, indiferent de natura înregistrării, acesta contribuind la fidelitatea înregistrării.

Curentul de modulaţie urmează căi diferite, după felul în care este produs. Dacă înregistrarea se face prin microfon, curentul este amplificat în prealabil, de un amplificator microfonic şi apoi printr'un amplificator de înregistrare (fig. 3).

Dacă înregistrarea se face prin pick-up sau prin aparatul de radio recepţie, atunci curentul de modulaţie trece numai prin amplificatorul de înregistrare, deoarece la ieşirea din pick-up sau din radio avem o tensiune suficient de ridicată.

Conectarea pick-up-ului la magnetofon se face simplu, prin intermediul celor două borne ale pick-up-ului ce se leagă la bornele «pick-up» ale magnetofonului. Dacă magnetofonul este prevăzut şi cu pick-up, cazul magnetofonului cu fir, atunci aparatul are un buton special pentru această conectare. Conectarea aparatului de radio se face prin intermediul unui conductor bifilar blindat, legat la bornele externe ale potenţiametrului de volum, al aparatului de radio. Blindajul firului se leagă la masa aparatului de recepţie cât şi la borna «masă» a magnetofonului. Dacă aparatul de recepţie folosit este de tip universal, priza pentru magnetofon se poate lua dela secundarul transformatorului de eşire al difuzorului. Atât curentul de premagnetizare cât şi cel de modulaţie pot fi controlate cu ajutorul unui miliampermetru şi reglate prin butoane pentru a se obţine o valoare justă a nivelului de înregistrare. Determinarea acestui nivel este în general dificilă, ca şi determinarea timpului de expunere în cazul fotografiei. Nivelul just de respectat se determină pe cale de experienţă. Dacă la reproducere se constată că înregistrarea este confuză, sau prezintă distorsiuni, atunci nivelul a fost prea ridicat. Dar dacă înregistrarea pare îndepărtată şi acoperită de sgomotul de fond, atunci nivelul a fost prea slab. La unele aparate, controlul nivelului de înregistrare se poate face printr'un ochi magic.

Când înregistrarea porneşte dela microfon, este necesar a se vorbi la distanţă (cca. 50 cm.) şi a evita sgomotele parazite înconjurătoare, ca sgomotul străzii, etc. Inregistrarea prin microfon este o operaţie foarte delicată, care cere multă grijă. Deaceia înregistrările profesionale se fac de către specialişti, în studiouri special amenajate.

Unele instrumente, cum este de exemplu pianul, sunt deosebit de dificile de înregistrat. Calitatea înregistrării prin microfon va fi deci în funcţie de condiţiunile de înregistrare, abilitatea operatorului, calitatea microfonului, calităţile acustice ale sălii de înregistrare, şi de nivelul sgomotului paraziţilor ambianţi.

Inregistrările pornind dela radio sau pick-up nu prezintă nici cea mai mică dificultate.

Menţionăm tot aici că magnetofoanele permit combinaţii de înregistrări foare interesante. Astfel se poate înregistra în acelaş timp, prin microfon şi pick-up; prin două microfoane; prin radio şi microfon; dela un magnetofon la altul; prin telefon, etc.

Pentru înregistrări de diferite durate, se folosesc benzi de lungimi diferite. Benzile de material plastic sau hârtie se pot tăia în lungimi convenabile. In cazul magnetofoanelor cu fir, se fabrică fire în bobine cu o durată de 1/4, 1/2 sau o oră, după necesitate. Pentru înregistrările de lungă durată se folosesc magnetofoane duble, asemănătoare pick-up-urilor duble, întrebuinţate în studiourile de radiodifuziune. Cu aceste magnetofoane se pot face înregistrări sau redări continui de ore întregi, însă acestea nu se folosesc decât în studiourile de radiodifuziune, deoarece sunt foarte scumpe, necesitând o construcţie foarte îngrijită. Cu astfel de magnetofoane, Comitetul de Radio înregistrează concerte sau chiar emisiuni înregi, care sunt redate apoi la momentul oportun. In felul acesta se poate înregistra în prealabil pe bandă o piesă de teatru, un concert, etc., având posibilitatea de a şterge şi reînregistra părţile mai slabe, spre a se obţine o înregistrare perfectă, atât din punct de vedere al execuţiei bucăţii de înregistrat, cât şi din punct de vedere al înregistrării tehnice.

b) *Reproducerea.* După terminarea înregistrării, banda sau firul trebuiesc rebobinate pentru a putea trece la reproducere. Reproducerea se face prin trecerea benzii înregistrate prin faţa capului de lectură, banda având aceiaşi viteză ca şi la înregistrare. Fenomenul se petrece invers ca în cazul înregistrării: magnetizarea variabilă a benzii sau

firului induce în circuitul capului de lectură un curent variabil corespunzător, care apoi este amplificat prin amplificatorul de redare, dela 1 milivolt la 1 volt şi trimis în difuzorul aparatului.

Intensitatea şi tonalitatea reproducerii pot fi reglate cu ajutorul unui buton, ca şi la aparatele de radio recepţie.

Magnetofonul poate fi conectat în timpul reproducerii la o staţie de sonorizare, făcând astfel posibilă transmiterea prin mai multe difuzoare a bucăţii înregistrate pe bandă.

c) *Ştergerea.* Când o înregistrare nu mai prezintă interes, banda respectivă va fi ştearsă, adică demagnetizată. Demagnetizarea se face după cum am mai spus la enunţarea principiului de funcţionare, prin curentul de înaltă frecvenţă produs de o lampă oscilatoare. Folosirea acestui procedeu are avantajul că, după ştergere, banda rămâne compect demagnetizată şi deci nu poate produce sgomot de fond în cazul unei noi înregistrări.

Ştergerea se poate face concomitent cu înregistrarea; banda imprimată trece prin faţa capului de ştergere, pentru a se anula înregistrarea precedentă, apoi în continuare prin faţa capului de înregistrare unde este înregistrată din nou.

Magnetofoane speciale. S'au construit diverse magnetofoane care au utilizări speciale. Astfel avem:

— Magnetofoane pentru înregistrarea corespondenţei dictate. Corespondenţa poate fi dictată în faţa microfonului şi înregistrată pe bandă sau fir. Ulterior, dactilografa reproduce cele înregistrate, ascultând prin cască şi scriind totodată la maşină. Acest gen de aparate poate servi de minune scriitorilor, scutindu-i de a-şi scrie singuri operele şi economisind astfel un timp foarte preţios.

— Magnetofoanele pentru înregistrarea conversaţiilor telefonice pot servi atât la înregistrarea convorbirilor telefonice între două persoane, cât şi la înregistrarea prin telefon, dela distanţă. Cu ajutorul lor, o persoană plecată într'o altă localitate, poate da dispoziţii prin telefon, care dispoziţii sunt înregistrate de către magnetofonul conectat la aparatul telefonic chiar în lipsa locatarului.

— Magnetofoane pentru înregistrarea magnetică pe benzile de film cinematografic. Aceste magnetofoane servesc pentru imprimarea sunetului pe marginea filmului, pe un strat magnetic special. Acest procedeu înlocuieşte sistemul de imprimare cu ajutorul celulei fotoelectrice folosit curent în cinematograf.

— Magnetofoane pentru multiplicarea benzilor înregistrate, sunt aparate prevăzute cu trei serii de capete. Prin faţa primei serii trece banda înregistrată, care este citită, iar curentul de modulaţie obţinut este trecut apoi prin celelalte două capete de înregistrare prin faţa cărora defilează benzile de înregistrat.

Utilizările magnetofonului. In cele de mai sus am arătat o parte din utilizările mai importante ale magnetofonului. In cele ce urmează, vom enumera, pentru precizarea ideilor, utilizările acestor aparate, care sunt foarte variate. Ele pot fi utilizate în:

— Studiourile de radiodifuziune, pentru înregistrarea concertelor, pieselor, conferinţelor, la regia tehnică de studio, etc.

— In studiourile de cinema, pentru înregistrarea sunetului.

— In studiourile de televiziune.

— Inregistrările conversaţiilor telefonice.

— Inregistrarea conferinţelor, reuniunilor, congreselor, meetingurilor.

— Inregistrarea prin aparate de radio recepţie, a radio-emisiunilor.

— Inregistrarea corespondenţei dictate. Ele pot înlocui stenografa.

— Inregistrarea reportajelor. Magnetofoane portabile pot fi transportate la reuniunile sportive, matchuri, curse, etc. unde se pot înregistra momentele mai importante.

— Studierea muzicii populare prin înregistrarea la faţa locului a cântecelor populare.

— Inregistrările cu magnetofonul pot fi un ajutor preţios pentru învăţarea corectă a limbilor străine şi pentru studiul muzicii.

— Inregistrarea prelegerilor. Cursurile predate la şcoală sau facultate pot fi înregistrate pe bandă şi apoi reproduse, odată sau de mai multe ori.

Din cele de mai sus se vede enormul progres realizat în domeniul electroacusticei, prin descoperirea acestui aparat de înregistrare electromagnetică, precum şi numeroasele avantajii pe care le aduce omenirii.

In U.R.S.S. se construesc în serie astfel de aparate, atât portabile cât şi de studio. Din prima categorie citäm magnetofonul M.AG-3M., construit special pentru reportaje. Dintre magnetofoanele de studio, menţionăm tipul RMS-16. Acest aparat este un magnetofon dublu, destinat înregistrărilor de studio şi este folosit în special în studiourile de radiodifuziune. Cu ajutorul lui se pot face înregistrări continui, de ore întregi şi avem astfel posibilitatea de a înregistra concerte, conferinţe şi chiar emisiuni radiofonice complete, care apoi sunt transmise prin posturile de radioemisie.

Aceste aparate, construite în laboratoarele experimentale din Leningrad, dau cele mai perfecte înregistrări. Magnetofoanele RMS-16 importate din U.R.S.S. sunt folosite şi în studiourile de Radiodifuziune din R.P.R., precum şi în celelalte republici populare.

Astfel, datorită sprijinului pe care ni-l acordă marea Uniune Sovietică, Republica noastră are posibilitatea de a utiliza cele mai perfecţionate mijloace de înregistrare sonoră, ajutându-ne la construirea socialismului în ţara noastră, prin opera de culturalizare a maselor.

CONSTRUCŢIA ŞI PRINCIPIUL TRANSFORMATORULUI ELECTRIC

N. RĂDULESCU
(Liceul Nr. 1 băieţi, Bucureşti)

Putem demonstra principiul transformatorilor prin experienţe realizate cu ajutorul a două bobine folosite în orice laborator şcolar pentru inducţia electromagnetică.

Dacă nu avem cele două bobine le putem construi singuri înfăşurând un număr diferit de spire (din sârmă de cupru izolată cu bumbac) pe două mosoare de lemn sau carton, astfel ca mosorul cu numărul mai mic de spire să poată pătrunde în mosorul cu număr mai mare de spire; pe bobina mare punem de exemplu 200 spire iar pe bobina mică 100 spire, (sârma de cupru $\Phi = 0{,}5$ mm.).

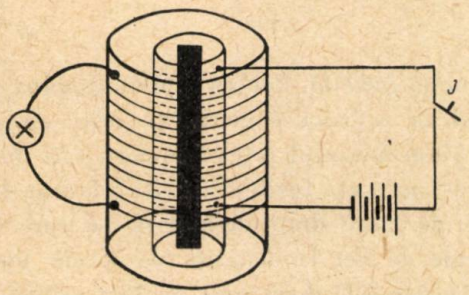


Fig. 1

Exeprienţa I. Introducem bobina mică în bobina mare, iar în interiorul bobinei mici introducem un miez de fier. In circuitul bobinei mici punem în serie un isvor electric de curent continuu, o baterie de pile galvanice, sau acumulator cu tensiunea de peste 15—20 volţi. In circuitul bobinei mari introducem un bec electric de 120 volţi. Stabilind şi întrerupând circuitul bobinei mici (primare), becul din bobina mare (secundar) se aprinde şi se stinge (fig. 1). Dacă circuitul bobinei primare nu este întrerupt şi restabilit, becul în secundar nu se aprinde. Rezultă deci, că pentru a produce curentul de inducţie într'un circuit străin şi izolat (bobină secundară) acesta trebue să fie îmbrăţişat de un flux magnetic variabil. Aceasta este legea generală a inducţiei electromagnetice.

In experienţa I variaţia de flux magnetic am provocat-o stabilind şi întrerupând circuitul primar.

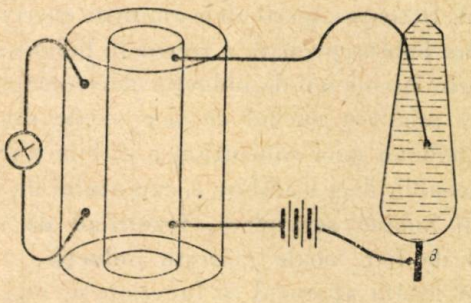


Fig. 2

Experienţa II. Introducem în circuitul bobinei primare în locul interuptorului I o pilă de ascuţit cu zimţi depărtaţi. Facem legăturile din figura 2 şi mişcăm capătul *C* al circuitului dinspre *B* în sus pe pilă; vom constata cum becul în bobina secundară se aprinde şi se stinge succesiv.

Experienţa III. Folosim montajul arătat în fig. 1, introducând în circuitul bobinei primare în locul bobinei de elemente galvanice sau a acumulatorului, redresorul electrolitric (vezi Revista Mat. şi Fizică Nr. 9 pe 1952). Punând în funcţie redresorul electrolitic vom constata că becul în bobina secundară devine şi rămâne incandescent fără să fie nevoe ca să mai stabilim şi să întrerupem circuitul primar. Acest lucru trebue să se petreacă astfel, întrucât curentul debitat de redresorul electrolitic este un curent continuu dar pulsator (de intensitate variabilă) şi deci câmpul său magnetic este variabil.

Se ştie însă că un curent alternativ poartă în jurul său un câmp magnetic alternativ (variabil) şi deci putem executa experienţa 1, fig. 1 folosind acest curent.

Pentru a preîntâmpina însă arderea siguranţei din reţeaua electrică a camerii vom lua dinainte măsurile necesare.

Experienţa IV. Alcătuim montajul din fig. 1, introducând însă în circuitul bobinei primare un reostat cu apă *R*, o siguranţă fuzibilă *S*, iar ca sursă de curent electric introducem curentul alternativ dela priza din perete (fig. 3).

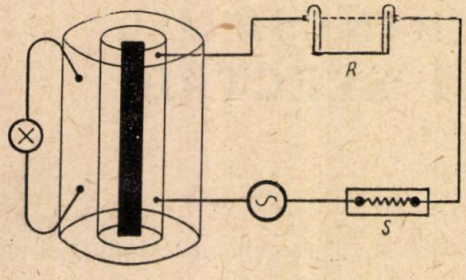


Fig. 3

Lansând curent alternativ în bobina primară, becul din bobina secundară devine şi rămâne incandescent. In toate experienţele amintite energia electrică din bobina primară a trecut în bobina secundară prin fenomenul de inducţie electromagnetică.

Dacă scoatem miezul de fier moale din interiorul bobinei mici constatăm o slăbire a intensităţii becului, deci o slăbire a curentului de inducţie din bobina secundară, rezultând de aci că miezul de fier moale măreşte inducţia.

Dacă lăsăm aparatul să funcţioneze mai multe minute, constatăm că miezul de fier moale se încălzeşte iar intensitatea becului scade; fierul moale se încălzeşte din cauza curenţilor de inducţie ce se nasc în el (curenţii de masă), iar pentru a-i înlătura se introduce în bobina mică un fascicol format din vergele de fier moale, fiecare acoperită cu lac izolator.

Experienţa V. Punem cele două bobine pe laturile unui cadru dreptunghiular format din 4 bare de fier moale, ataşând barele cap la cap, pe masă, fără să le fixăm la capete, aşa cum se vede în figura 4.

Lansând curentul alternativ în circuitul bobinei mici, becul în bobina mare devine şi rămâne incandescent şi cu cât numărul spirelor în bobina secundară este mai mare în raport cu numărul de spire din bobina primară cu atâta tensiunea la bornele becului va fi mai mare faţă de tensiunea isvorului de curent din circuirul primar. Un astfel de transformator care ridică tensiunea se cheamă de ridicare. Dacă aplicăm tensiunea în bobina din stânga iar în cea din dreapta punem becul, transformatorul va fi de scoborîre. La funcţionare prelungită cadrul de fier se încălzeşte, deaceea în tehnică el este făcut din lamele de fier izolate una faţă de alta.

Reostatul cu apă este un vas de sticlă sau argilă mai larg la gură în care se introduc două plăci de fier sau alt metal, sprijinit pe gura vasului aşa cum se vede în scheme. In apă se pune puţină sare de bucătărie. Apropiind sau îndepărtând cele două plăci, rezistenţa electrică a conductorului lichid scade sau creşte şi prin aceasta creşte sau scade intensitatea curentului în circuit: după câteva minute de funcţionare apa se încălzeşte.

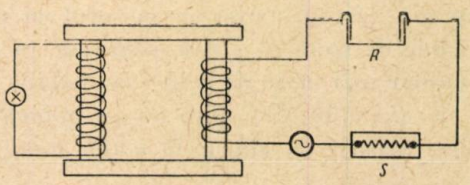


Fig. 4

Siguranţă fuzibilă. Pentru a preîntâmpina scurt-circuitul în reţeaua camerii, în orice circuit în care lansăm curentul reţelei camerii este bine să punem o siguranţă fuzibilă fig. 3; o facem dintr'o plăcuţă de lemn dreptunghiulară pe care fixăm două cuie de fier la distanţă de 34 cm unul de altul. Legăm cele două cuie de fier printr'un fir subţire de cupru (liţă), şi îl punem în circuitul dorit folosind ca borne de conexiune chiar cele două cuie de fier. In cazul unui scurt-circuit, se arde această siguranţă, salvând siguranţa din reţeaua camerii.

NOUTĂŢI DIN ŞTIINŢA ŞI TEHNICA SOVIETICĂ

LAGĂRE PE RULMENŢI ÎN TRANSPORTUL PE CĂILE FERATE

In directivele celui de al 19-lea Congres al Partidului în legătură cu cel de al cincilea plan cincinal de desvoltare a U.R.S.S. pe anii 1951—1955 se spune: «să se treacă la înzestrarea formaţiei de transport cu lagăre pe rulmenţi».

Proprietăţile cele mai importante ale lagărelor pe rulmenţi pe care nu le au lagărele de alunecare (longitudinală) constau în următoarele:

In mişcarea din loc a vagonului cu lagăre pe rulmenţi rezistenţa mişcării este de 6 ori mai mică decât la vagonul înzestrat cu lagăre de alunecare.

Aplicarea lagărelor pe rulmenţi micşorează de asemeni rezistenţa mişcării vagoanelor; de exemplu la o viteză a trenului de 10 km/oră rezistenţa se micşorează aproape de două ori, la o viteză de 30 km/oră cam cu 18% şi la viteză de 60 km/oră cu 8%.

S'a stabilit prin încercări că la lagărele de alunecare coeficientul de frecare depinde de timpul de staţionare al vagonului. De exemplu la o staţionare: de 5 minute coeficientul de frecare este egal cu 0,027, de 2 ore 0,070, iar la o staţionare de 14 ore — 0,130 *.

Coeficientul de frecare al lagărelor de rulmenţi nu depinde de durata timpului de staţionare a vagoanelor şi nici de temperatura exterioară a aerului; micşorarea forţei de reacţiune la mişcarea trenului din loc şi la luarea vitezei permite introducerea (alcătuirea) unei formaţiuni de o greutate mult mai mare, iar micşorarea rezistenţei mişcării în cazul înzestrării vagoanelor cu lagăre pe rulmenţi permite obţinerea unei economii de combustibil de 9—10%.

Ne putem da seama de marea importanţă a acestei economii, gândindu-ne că transportul feroviar consumă mai mult de a 4-a parte din întreaga cantitate de cărbune ce se extrage în ţară.

Inlocuirea lagărelor de alunecare prin lagăre pe rulmenţi fereşte de ardere partea interioară a cutiei axiale ceeace e foarte important în condiţiile creşterii continuui a vitezelor trenurilor, reduce simţitor personalul ce deserveşte, micşorează consumul de unsoare de 6 ori pentru vagoanele marfare şi de 15 ori pentru cele de persoane, măreşte durata de funcţionare a axelor vagoanelor în urma absenţei tocirii zaturilor etc. Lagărele cu rulmenţi nu necesită cheltuială de bronz şi nici aliaj alb-antifricţional.

In figura 1 este arătat unul din tipurile de cutie axială a vagonului cu rulmenţi. Lagărul pe rulmenţi constă din două inele: unul exterior 1 şi altul interior 2 între care se găsesc rulmenţii 3. Inelul interior se află în atingere cu tubul axial 4 şi se roteşte odată cu el, iar inelul exterior se fixează în corpul cutiei axiale 5.

La rotirea axului vagonului tubul antrenează rulmenţii provocând rotirea lor între inelele lagărului.

Experienţa folosirii vagoanelor în întregime de metal pentru persoane pe diverse marşrute ferate confirmă marile proprietăţi ale lagărelor de rotire.

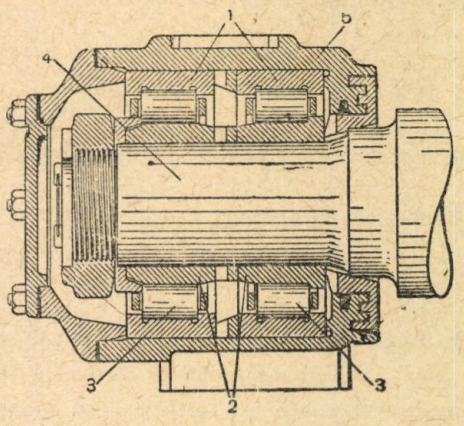


Fig. 1

Aşa de exemplu în timpul cursei Moscova-Vladivostoc-Moscova (de o lungime mai mare de 18 mii de km) cu 6 vagoane cu lagăre pe rulmenţi şi cu cinci vagoane cu lagăre de alunecare; primele vagoane în tot timpul drumului (cam 500 ore) n'au necesitat nicio cheltuială, în timp ce în al doilea grup de vagoane au trebuit înlocuiţi rulmenţii, adăugată unsoare, întărite şi înlocuite capacele cutiei axiale.

Din anul 1952 toate vagoanele de persoane în întregime din metal se construesc cu lagăre pe rulmenţi.

Acum se fac încercări pentru înzestrarea diferitelor tipuri de locomotive de tren personal sau marfar cu rulmenţi de rotire.

Trecerea dela lagărele de alunecare la cele de rotire reprezintă o intreprindere uriaşă în desvoltarea tehnică a transportului feroviar.

Importanţa acestei măsuri se poate compara doar cu trecerea la cuplarea automată şi frânarea automată.

* Creşterea coeficientului de frecare se explică în primul rând prin creşterea vâscozităţii unsorii din cauza răcirii părţii interioare a rulmentului în timpul staţionării vagonului. Aci sunt date valorile coeficientului de frecare la temp. 15°—20° a mediului ambiant.

CHESTIUNI DE EXAMEN

DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL DE PETROL ŞI GAZE, BUCUREŞTI ÎN 25 AUGUST 1953

Grupa I-a

1078. Se dă sistemul:

$$x+\frac{1}{y}=\frac{2}{m} \qquad \frac{1}{x}+y=2m.$$

Se cere:

1. Să se rezolve sistemul.
2. Să se calculeze expresia:

$$(x+\sqrt{y})^3$$

unde x şi y sunt rădăcinile sistemului.

1079. Se dă $\cos x=\frac{3}{4}$. Să se calculeze valoarea numerică a expresiei:

$$E=32\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}.$$

1080. Se dau două cercuri tangente exterior, de raze r şi r', având centrele în punctele O şi O'. Tangentele exterioare se întâlnesc în punctul P. Se notează cu A şi A', cu B şi B' cele patru puncte de contact ale cercurilor cu tangentele exterioare.

Se cere:

a) Să se demonstreze că patrulaterul $OAIC$ este inscriptibil, C fiind punctul de contact dintre cele două cercuri, iar I mijlocul segmentului AA'.

b) Să se demonstreze că cercul construit pe OO' ca diametru este tangent dreptelor AA' şi BB'.

c) Să se arate că avem relaţia $PO\cdot PO'=\overline{PI}^2$.

Grupa II-a

1081. Se dă sistemul:

$$x^3+xy^2=m^3$$
$$x^2y+y^3=n^3$$

Se cere:

a) Să se calculeze expresiile rădăcinilor x şi y.

b) Să se calculeze valorile numerice ale rădăcinilor x şi y, pentru cazul particular $m^3=n^3=2$.

1082. Se dă un triunghiu oarecare ABC. Se prelungeşte latura AB cu o lungime $BC'=AB=c$ şi la fel se procedează cu celelalte laturi. Se formează un nou triunghiu $A'B'C'$.

Se cere:

a) S şi s fiind ariile triunghiurilor $A'B'C'$ şi ABC, să se demonstreze că: $S=7s$.

b) Dacă notăm cu a', b', c' respectiv laturile triunghiului $A'B'C'$ adică $a'=B'C'$, $b'=C'A'$, $c'=A'B'$

Să se demonstreze relaţia:

$$a'^2+b'^2+c'^2=7\,(a^2+b^2+c^2)$$

1083. Pe o dreaptă se aleg două puncte A şi A'. Se duc două cercuri aşezate de aceeaşi parte şi tangente dreptei în A şi A'. Fie O şi O' centrele, iar r şi r' razele acestor cercuri. Prin punctul I aşezat la mijlocul segmentului AA' se duc două secante oarecare, prima tăind cercul O în punctele M şi N, iar a doua tăind cercul O' în punctele M' şi N'.

Se cere:

a) Să se arate că punctele M, N, şi M', N' sunt aşezate pe un acelaş cerc C.

b) Să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor C, când secantele variabile IMN şi $IM'N'$ fac între ele un unghiu constant u.

Să se cerceteze cazul particular $u=90°$.

c) Să se demonstreze că dacă triunghiurile OAI şi $O'A'I'$ sunt asemenea, cercurile O şi O' sunt tangente şi reciproca.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 637

Să se verifice inegalitatea:

$$2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}<3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

algebric şi apoi geometric.

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. 1°. Ridicând inegalitatea la patrat vom avea de arătat că

$$\frac{4}{9}<\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \qquad (1)$$

Insă

$$2-\sqrt{2+\sqrt{3}}>0{,}0682, \quad 2-\sqrt{2+\sqrt{2}}<0{,}153.$$

Prin urmare

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}>\frac{682}{1530}>\frac{4}{9}.$$

Inegalitatea este astfel demonstrată.

2°. Cei doi radicali din enunţul problemei sunt respectiv latura octogonului şi a dodecagonului

înscris în cercul de rază unu. Deci dacă în cercul de rază unu vom lua $AB = l_4$ şi vom împărţi arcul AB în două părţi egale, prin punctul C, apoi în 3 părţi egale prin punctele D şi E, va trebui să arătăm că:

$$3\,AD > 2\,AC.$$

După o teoremă cunoscută, perimetrele poligoanelor regulate înscrise în acelaşi cerc formează un şir crescător:

$$p_3 < p_4 < p_5 < p_6 < \ldots < 2\pi R.$$

Vom avea prin urmare

$$p_8 < p_{12}$$

$$\frac{1}{4}p_8 < \frac{1}{4}p_{12}$$

de unde

$$2\,AC < 3\,AD$$

Problema 703

1. *Se dau relaţiile*:

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}.$$

Să se calculeze suma:

$$x^3 + y^3 + z^3$$

1. *Să se verifice identitatea*:

$$\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg}(a+b) - \operatorname{tg}(a-b) =$$
$$= \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg}(a+b) \operatorname{tg}(a-b).$$

2. *Se dă un cerc cu diametrul AA'. Se ia*

$$\sphericalangle AOB = 60°.$$

a) *Să se calculeze volumul conului descris prin rotirea razei OB în jurul diametrului CC' perpendicular pe AA'.*

b) *Să se calculeze aria calotei sferice născută prin rotirea arcului BC în jurul diametrului CC'.*

c) *Să se calculeze aria laterală a trunchiului de con născut prin rotirea coardei AB în jurul diametrului CC'.*

* * *

Soluţie. 1. Ridicând prima relaţie la pătrat şi ţinând seamă de a doua găsim

$$xy + yz + xz = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

Din ultima relaţie scoatem:

$$xyz = c\,(xy + yz + xz) = \frac{c}{2}(a^2 - b^2).$$

Ţinând seamă de identitatea

$$(x+y+z)^3 + 2\,(x^3 + y^3 + z^3) =$$
$$= 3\,(x^2 + y^2 + z^2)\,(x + y + z) + 6\,xyz$$

obţinem

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{3ab^2 + 3c\,(a^2 - b^2) - a^3}{2}.$$

2. Dacă în identitatea

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma;$$
$$(\alpha + \beta + \gamma = 180°)$$

facem

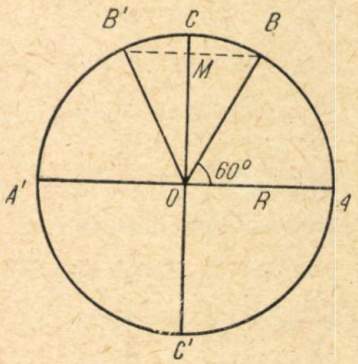
$$\alpha = 2a - 180°, \quad \beta = 180° - a - b;$$
$$\gamma = 180° - a + b,$$

obţinem identitatea din enunţ.

a) Volumul conului este

$$V = \frac{1}{3}\pi MB^2 \cdot CM = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}\,R}{2}\right)$$

$$V = \frac{\sqrt{3}\,\pi R^3}{24}.$$



b) Aria calotei este

$$S = 2\pi R \cdot CM = 2\pi R \cdot \left(R - \frac{\sqrt{2}\,R}{2}\right)$$

$$S = (2 - \sqrt{3})\,\pi R^2$$

c) Aria laterală a trunchiului de con este:

$$S = \pi\,AB\,(OA + MB) = \pi R\left(R + \frac{R}{2}\right)$$

$$S = \frac{3}{2}\pi R^2.$$

Problema 708

1. *Să se calculeze:*

a) *Suma:* $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$

b) *Termenul general din şirul de numere:*

$x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n$, unde $x_0 = a$, $x_1 = b$ şi

$$x_k = \frac{x_{k-1} + x_{k-2}}{2} \text{ pentru } k \geqslant 2.$$

2. *Să se arate că într'un triunghi dreptunghic există relaţia:*

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{a+c}{b}$$

şi reciproc, un triunghi în care există această relaţie este dreptunghic. 3. *In triunghiul ABC fie O punctul de concurenţă al mediatoarelor, H ortocentrul, A', B', C' mijloacele laturilor BC, AC, AB; A'', B'', C'' mijloacele segmentelor AH, BH, CH. Să se demonstreze că A'A'' = B'B'' = C'C'' şi că segmentele A'A'', B'B'', C'C'', OH sunt concurente într'un punct care e la mijlocul fiecăruia.*

* * *

Soluţie. 1. *a)* Fie $S=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$ Avem: $(x-1)S=nx^{n+1}-(x+x^2+x^3+\ldots+x^n)$ de unde

$$S=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}.$$

b) Conform enunţului avem:

$$\begin{aligned}
2x_n &= x_{n-1}+x_{n-2}\\
2x_{n-1} &= x_{n-2}+x_{n-3}\\
2x_{n-2} &= x_{n-3}+x_{n-4}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2x_2 &= x_1+x_0
\end{aligned}$$

Adunând aceste egalităţi obţinem

$$2x_n+x_{n-1}=2x_1+x_0=2b+a,$$

relaţie care ne permite a scrie:

$$2x_n+x_{n-1}=2b+a$$

$$(-1)^1\left(x_{n-1}+\frac{x_{n-2}}{2^1}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^1(2b+a)$$

$$(-1)^2\left(\frac{x_{n-2}}{2^1}+\frac{x_{n-3}}{2^2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(2b+a)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^m\left(\frac{x_{n-m}}{2^{m-1}}+\frac{x_{n-m-1}}{2^m}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^m(2b+a)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{x_1}{2^{n-2}}+\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2b+a)$$

Prin adunarea acestor relaţii obţinem:

$$x_n=\frac{[2^{n-1}+(-1)^n]a+[2^n-(-1)^n]b}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

2. Avem:

$$\text{ct}\ \frac{B}{2}=\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{1+\dfrac{c}{a}}{\dfrac{b}{a}}=\frac{a+c}{b}$$

Pentru reciprocă scriem:

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{2\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}}{2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}}$$

de unde

$$\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2},\ \text{deci}$$

$$A=B+C\quad\text{sau}\quad A=90°.$$

3. Segmentele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sunt coarde ale cercului lui Euler. Cum picioarele înălţimilor aparţin aceluiaşi cerc, iar aceste coarde sunt văzute respectiv sub unghiuri drepte din aceste puncte, ele sunt diametri în cercul lui Euler.

Prin urmare $A'A''=B'B''=C'C''=R$. Totdată am demonstrat că ele sunt concurente în centrul cercului lui Euler, mijlocul lui OH.

Problema 709

Să se rezolve ecuaţia

$$\log\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=\log\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{m}\right)+\log\frac{m+10}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{10}}$$

şi să se discute.

II. *Laturile unui triunghi sunt:* $a=x^2-x+1$; $b=2x-1$; $c=x^2-2x$. *Să se arate că triunghiul există pentru valorile lui x superioare lui 2 şi că* $A=120°$. *Să se arate că* $r_a-r=3R$.

III. *Intr'un trapez isoscel baza mare este egală cu diagonala şi baza mică cu laturile neparalele. Să se afle unghiurile trapezului şi apoi baza mică, baza mare fiind a.*

* * *

Soluţie. I. Ecuaţia se poate scrie

$$\log 10\left(x+\frac{1}{x}\right)=\log 10\,m\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{m}\right)$$

de unde:

$$x^2-x+1-m=0.$$

Ecuaţia are rădăcini reale pentru $m>0{,}75$.

Ambele sunt pozitive pentru $0{,}75<m<1$; sunt de semne contrare pentru $m>1$.

II. Este necesar ca $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$. Aceste inegalităţi dau respectiv $x>0$, $x<0{,}5$ sau $x>2$, $x>2$. Triunghiul există deci pentru valorile lui x superioare lui 2.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-2x^3+5x^2-2x}{2(2x^3-5x^2+2x)}=-\frac{1}{2}$$

Deci $A=120°$.

Prin urmare $r_a = \text{ptg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{3}\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)$,

$$r = (p-a)\,\text{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right),\quad R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 - x + 1).$$

Relaţia $r_a - r = 3R$ se verifică uşor.

III. Notăm $\sphericalangle BCD = 2x$. Se observă cu uşurinţă că

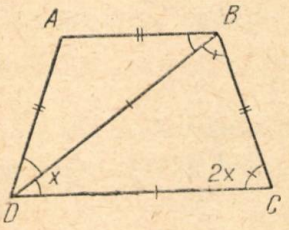
$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB$, sau $\sphericalangle BDC = x$.

Deci

$$x + 2x + 2x = 180°$$

de unde

$$x = 36°.$$



Fie $AB = BC = AD = b$.

Vom avea $\frac{b}{2} = a\cos 72°$, $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

Problema 713

Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} - \sqrt{2x+10} = 0$$

II. *Să se demonstreze identităţile*:

a) $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$

b) $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{1}{16}$.

III. *Fiind dat un trapez $ABCD$ de baze AB şi CD fie E şi F mijloacele laturilor BC şi DA; H intersecţia bisectoarelor unghiurilor A şi D, K intersecţia bisectoarelor unghiurilor B şi C. Să se arate că*:

a) *HK este paralelă cu bazele;*

b) $FH = \frac{AD}{2}$, $EK = \frac{BC}{2}$;

c) *Să se găsească condiţia ca cele patru bisectoare să fie concurente.*

* * *

Soluţie. I. Ecuaţia se poate scrie

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} = \sqrt{2x+10} - \sqrt{x+1}$$

Ridicând la patrat avem:

$$\sqrt{(x-2)(2x-5)} = 9 - \sqrt{(x+1)(2x+10)}$$

O nouă ridicare la patrat ne dă:

$$7x + 27 = 6\sqrt{(x+1)(2x+10)}$$

Printr'o ultimă ridicare la patrat obţinem:

$$23x^2 + 54x - 369 = 0$$

de unde

$$x_1 = 3 \quad \text{şi} \quad x_2 = -\frac{123}{23}.$$

Rădăcina ecuaţiei din enunţ este $x_1 = 3$. Cealaltă rădăcină convine ecuaţiei:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} - \sqrt{2x+10} = 0$$

II. Avem

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a = 4\sin a\left[\frac{3}{4} - \sin^2 a\right] =$$

$$= 4\sin a\,(\sin^2 60° - \sin^2 a) =$$

$$= 4\sin a \sin(60° + a)\sin(60° - a).$$

Analog:

$$\cos 3a = 4\cos a \cos(60° + a)\cos(60° - a).$$

Făcând $a = 20°$ obţinem:

$$4\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \cos 60°$$

$$4\sin 20° \sin 40° \sin 80° = \sin 60°$$

Prin urmare:

$$\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{\sin^2 60°}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{\cos^2 60°}{4} = \frac{1}{16}.$$

III. *a)* Unghiurile BAD şi CDA fiind suplimentare triunghiul AHD este dreptunghic. FH fiind mediană în acest triunghi, avem $\sphericalangle FHD = \sphericalangle HDF = \sphericalangle HDC$. Rezultă $FH \parallel CD$. Analog $KE \parallel CD$. Cum $FE \parallel CD$, punctele H şi K se află pe FE, deci $HK \parallel CD$. *b)* Triunghiurile AHD şi BKC fiind dreptunghice iar FH şi KE fiind mediane relative la ipotenuze, avem $FH = \frac{AD}{2}$, $KE = \frac{BC}{2}$. *c)* Bisectoarele sunt concurente când $HK = 0$ sau când $FH + KE = FE$ (conform punctului *a*).

Insă $FE = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Condiţia este deci:

$$AB + CD = AD + BC.$$

Problema 717

Se dă un con circular drept de rază şi înălţime respectiv R şi I. Să se ducă un plan paralel cu baza astfel ca volumul trunchiului de con obţinut să fie medie proporţională între întreg conul şi conul mic obţinut prin secţionarea conului cu planul dus.

Dacă r este raza bazei mici a trunchiului de con să se stabilească relaţia.

$$\frac{r^3}{R^3}+\frac{R^3}{r^3}=3.$$

Simon St. Petre

Soluţie. Fie V, V', T respectiv volumele conului dat, conului mic şi trunchiului de con. Conform enunţului va trebui să avem: $V\,V'=T^2$.

In virtutea unei teoreme cunoscute putem scrie:

$$\frac{V'}{V}=\frac{r^3}{R^3}$$

şi aplicând o proprietate a proporţiilor

$$\frac{V'}{T}=\frac{r^3}{R^3-r^3},$$

sau

$$\frac{V'}{\sqrt{VV'}}=\frac{r^3}{R^3-r^3},$$

deci

$$\sqrt{\frac{r^3}{R^3}}=\frac{r^3}{R^3-r^3},$$

de unde

$$R^6+r^6=3R^3r^3.$$

Impărţind ambii membri cu R^3r^3, obţinem relaţia din enunţ.

Valoarea lui r se obţine rezolvând în raport cu r^3 ultima ecuaţie. Cum $r<R$ nu putem avea decât

$$r=R\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Se observă că r nu depinde de I. Aceasta se explică prin faptul că volumul trunchiului de con delimitat de două cercuri pe un con circular drept de bază dată este întotdeauna în acelaşi raport cu volumul conului, oricare ar fi înălţimea sa (vezi R.M.F./1952 pag. 202).

Problema 726

Prin vârfurile A,B,C, ale unui triunghi oarecare, se duc drepte concurente care taie laturile opuse în A_1, B_1, C_1. Paralela prin A_1 la AB întâlneşte pe AC în B_2; paralela prin B_1 la BC întâlneşte pe AB în C_2 şi paralela prin C_1 la AC întâlneşte pe BC în A_2. Să se arate că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

D. C. Panu

Soluţie. Conform teoremei lui Ceva avem:

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}=-1$$

In virtutea teoremei lui Thales putem scrie:

$$\frac{A_1C}{A_1B}=\frac{B_2C}{B_2A};\quad \frac{C_1B}{C_1A}=\frac{A_2B}{A_2C};\quad \frac{B_1A}{B_1C}=\frac{C_2A}{C_2B}$$

Rezultă

$$\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{A_3B}{A_3C}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=-1.$$

In virtutea reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

Problema 732

Pentru care valori întregi şi pozitive ale variabilei x, trinomul

$$x^2-x+3$$

ia valori numerice divizibile cu 5.

Să se arate condiţia necesară ca trinomul

$$ax^2+bx+c \qquad (a,\ b,\ c \text{ întregi})$$

să ia valori numerice divizibile cu numărul întreg pozitiv d, când x, este întreg pozitiv.

N. C. Ciomu

Soluţie. Vom rezolva problema în cazul general. Orice valoare pozitivă şi întreagă a variabilei x poate fi pusă sub forma $x=md+n\ (0<n<d)$. Rezultă că ax^2+bx+c va fi divizibil prin d, când an^2+bn+c se va divide prin d. Prin urmare condiţia *necesară şi suficientă* ca trinomul din enunţ să se dividă cu d este ca produsul

$$P=c\,(a+b+c)\,(4a+2b+c)\times$$
$$\times\,(9a+3b+c)\ldots(n^2a+nb+c)$$
$$(0\leqslant n<d)$$

să conţină cel puţin un factor multiplu de d.

In cazul $a=1$, $b=-1$, $c=3$,

$$P=3\cdot3\cdot5\cdot9\cdot15=M5^2$$

Valorile lui x sunt deci

$$x_1=5m+2 \qquad (2,\ 7,\ 12,\ 17\ldots$$

$$x_2=5m+4 \qquad (4,\ 9,\ 14,\ 19\ldots$$

Condiţie *necesară* pentru ca trinomul să fie multiplu de d, mai este

$$\frac{p^2-\Delta}{4d}=\text{întreg}$$

(Δ este realizantul trinomului, p un întreg arbitrar). Ea se obţine punând $ax^2+bx+c=md$ şi scriind că discriminantul este patrat perfect.

PROBLEME PROPUSE

1053. Pentru ce valori ale lui x şi y expresia

$$z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y + 3$$

are valoarea minimă.

Să se găsească această valoare minimă prin metode elementare.

P. S. Modenov (Moscova)

1054. Intr'un triunghi dreptunghic cercul înscris în acest triunghi are ca suprafaţă kS, unde S este suprafaţa triunghiului.

Să se afle unghiurile triunghiului.

Aplicaţie: $k = \dfrac{\pi}{3 + 2\sqrt{2}}$.

P. Petrov (Reg. Viniţsc)

1055. Să se arate că există un triunghi ABC ale cărui laturi să fie exprimate prin numerele:

$$a = m\sqrt{1+n^2}\ ;\quad b = n\sqrt{1+m^2}\ ;\quad c = m+n$$

unde m şi n sunt numere reale şi pozitive; deasemenea există un triunghi $A_1B_1C_1$ cu laturile:

$$a_1 = m(1+n^2)\ ;\quad b_1 = n(1+m^2);$$

$$c_1 = (m+n)(1-mn),$$

unde m şi n sunt numere pozitive şi $mn < 1$.

C. Ionescu-Ţiu

1056. Bisectoarele interioare ale unui triunghi oarecare ABC taie cercul circumscris în punctele A_1, B_1, C_1. *a)* Să se demonstreze că aria triunghiului $A_1B_1C_1$ este mai mare decât aria triunghiului ABC. *b)* Să se demonstreze că raza cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$ este mai mare decât raza cercului înscris în triunghiul ABC.

C. Ionescu-Ţiu

1057. Se împarte un segment în trei părţi egale. Dintr'un punct exterior fiecare din cele trei segmente egale se văd sub unghiurile $a < b < c$. Să se stabilească relaţia:

$$(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)(\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c) = 4(1 + \operatorname{ctg}^2 b).$$

Florin Torjescu
elev, Ploeşti

1058. Fie A, B şi C trei puncte aşezcte pe o dreaptă în ordinea dată. Notăm valoarea raportului $\dfrac{AB}{BC} = k$ şi cu D şi E mijloacele segmentelor AB şi BC. Notăm cu M şi N punctele de contact ale tangentei comune cercurilor de diametre AD şi DC şi cu P şi Q punctele de contact ale tangentei cercurilor de diametre AE şi EC. Să se arate că:

$$\frac{MN^2}{PQ^2} = \frac{k(k+2)}{2k+1}.$$

Cristea N. Ion
elev, Constanţa

1059. Să se arate că între razele R_1, R_2, R_3, R_4 ale sferelor exînscrise unei piramide triunghiulare şi raza R a sferei înscrisă piramidei există relaţia:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{2}{R}.$$

Irinel Codreanu
elev, Buzău

1060. Să se găsească expresiile generale ale laturilor unui triunghiu, ştiind că are un unghi de $60°$ şi că laturile au ca mărimi numere întregi.

Gh. D. Simionescu

1061. Să se demonstreze că între elementele unui triunghi oarecare, există neegalitatea:

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

Marius Iosifescu
elev, Piteşti

1062. Trei cercuri egale trec printr'un punct P şi se interesectează două câte două în punctele A, B, C. Să se arate că P este ortocentrul triunghiului ABC.

Popescu I. Mihail
absolvent, Craiova

1063. Să se calculeze maximul expresiei:

$$E = \cos x\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$$

şi să se arate pentru care valoare a lui x expresia este maximă.

Kestenband Barbu
elev, Bucureşti

1064. Să se rezolve ecuaţia:

$$\left(\frac{a+b}{x} + \frac{a+x}{b} + \frac{b+x}{a} + 2\right)\left(\frac{x}{a+b} + \frac{b}{a+x} + \frac{a}{b+x} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

I. Iavorschi (Moscova)

1065. Să se rezolve ecuaţia:

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+8=0.$$

S. V. Ionescu
elev, Piteşti

1066. Să se arate că:

$$\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}-\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=2(\sqrt{3}-1)$$

fără extragerea numerică a rădăcinii patrate şi cubice şi fără logaritmi.

Stoicescu T. Dumitru
elev, Buzău

1067. Să se rezolve sistemul:

$$\log_a x+\log_{a^2} y=\frac{1}{a};$$

$\log_x a^2-\log_y a^4=3a$, unde $a>1$. Aplicaţie $a=10$ şi $a=e=2{,}718\ldots$ (numărul e).

Sălan Nicolae
student, Iaşi

1068. Să se arate că rădăcinile sistemului

$$x-3y\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}+1)x+(5-3\sqrt{3})y=2+2\sqrt{3}$$

satisfac relaţia

$$x^2+y^2=4$$

Maria Neumann

1069. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$2x^2+xy+y^2=11$$

$$x^2+xy+3y^2=9$$

Simon St. Petre

1070. Să se arate că numărul

$$N=3600^n-1200^n+69^n-207^n$$

se divide cu 2262 oricare ar fi n întreg

Miron Oprea
student Bucureşti

1071. Să se arate că ecuaţia reciprocă

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

are ca soluţii valorile

$$x=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\arcsin\frac{-a\pm\sqrt{8-4b+a^2}}{b-2}$$

şi inversele lor.

Ioan Licea
elev, Galaţi

1072. Să se arate că:

a) Pentru orice x întreg prim cu 5, trinomul $P(x)=x^{12}-273x^4+272$ ia valori numerice divizibile cu 20.

b) Pentru valorile întregi ale lui x expresia

$$E(x)=\frac{x^6(x^2-1)+x^2(x^6+1)-2}{x^3+x^2+x+1}$$

este un număr întreg.

N. C. Ciomu

1073. Pe suprafaţa pământului cade dela o distanţă foarte mare un meteorit. Cu ce viteză ar cădea meteoritul pe pământ dacă atmosfera nu ar frâna mişcarea lui?

Să se calculeze energia cinetică T a meteoritului la distanţa $h=200$ km. dela suprafaţa pământului, masa meteoritului fiind de M tone.

* * *

1074. Din garnitura unui tren care merge cu viteza constantă se desprinde ultimul vagon, care mai parcurge distanţa l metri şi se opreşte. La ce distanţă de tren se va afla vagonul oprit în momentul opririi acestuia dacă tracţiunea locomotivei este constantă, iar frecarea fiecărei părţi a trenului nu depinde de viteză şi este proporţională cu greutatea ei?

* * *

1075. Cabina unui ascensor care coboară cu o viteză constantă este susţinută de un cablu de oţel. La un moment dat se frânează cablul la capătul său de sus şi se produce oprire bruscă.

Care este tensiunea în cablu în momentul opririi şi care este tensiunea imediat după oprire.

* * *

1076. Un microscop are distanţa focală a obiectivului $f=0{,}5$ cm, distanţa ocularului $F=6$ cm; iar distanţa dintre ocular şi obiectiv de 30 cm. Ştiind că distanţa vederii clare este de 25 cm se întreabă de câte ori poate mări acest microscop.

Surdu Emil
elev, Turnu-Severin

1077. O lampă de 27 lumânări este aşezată la 3 metri în faţa unei celule fotoelectrice. Ştiind că sensibilitatea celulei este $20\,\mu$/lm şi suprafaţa catodului de 4 cm^2, se cere să se calculeze intensitatea curentului care ia naştere.

Şerban Ion
elev, Piteşti

EXERCIŢII PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E: 352. Dintr'un angrenaj cilindric există numai roata cu 46 dinţi cu diametrul de 192 mm. Distanţa dintre axe fiind 180 mm, să se calculeze diametrul şi numărul de dinţi ai celeilalte roate lipsă.

I. I.Loziciu
elev, Caransebeş

E: 353. Din gara Iaşi pleacă un tren de marfă. Ajungând în gara Vaslui lasă o doime din numărul de vagoane plus un vagon. In gara Bârlad lasă o treime din restul de vagoane plus un vagon. In gara Tecuci lasă o cincime din numărul de vagoane rămase plus un vagon. Să se afle câte vagoane a avut trenul la plecare şi cât a lăsat în cele trei gări, ştiind că după plecarea din Tecuci trenul avea numai trei vagoane.

Stănescu Viorel
elev, Vaslui.

E: 354. Din portul Constanţa pleacă la aceiaşi oră trei vapoare; unul face cursa dus şi întors în 120 ore, altul în 126 ore şi celălalt în 216 ore. Se întreabă după cât timp vapoarele vor pleca din nou la aceiaş oră.

Zaharescu Marius
elev, Tr. Severin

E: 355. Cunoscând mijloacele laturilor unui triunghi oarecare, să se găsească, numai cu ajutorul compasului, vârfurile triunghiului.

Tiţa I. Nicolae
elev, Craiova

E: 356. Să se verifice egalităţile:

$$\frac{(1+\sqrt{5})^3}{(2+\sqrt{5})^3} = 2+\sqrt{5} \quad \text{şi}$$

$$\frac{(1-\sqrt{5})^3}{(3-\sqrt{5})^3} \cdot = 2-\sqrt{5}$$

C. I. T.

E: 357. La o gospodărie agricolă colectivă, o echipă de 12 tineri seceră 6 hectare de grâu în 3 zile. O a doua echipă formată tot din 12 tineri seceră aceeiaşi suprafaţă în $3\frac{1}{3}$ zile. In cât timp ar fi secerată o suprafaţă de 12 hectare dacă lucrează 7 tineri din prima echipă şi patru tineri din a doua echipă.

Ştefan Ciocoiu
Corabia

E: 358. Suma vârstelor a doi fraţi este 25 ani. Dublul vârstei unuia plus triplul vârstei celuilalt este de patru ori cât suma dintre semisuma şi semidiferenţa vârstelor lor.

Se cere vârsta fiecăruia.

Dedu Aurel
elev, Bucureşti

E: 359. Să se construiască un triunghi echilateral când se cunoaşte suma distanţelor dela un punct din planul său la laturile sale $s = 5$ cm.

Dinu I. Schileru
elev, Bucureşti

E: 360. Să se arate că într'un patrulater în care diagonalele fac un unghi de 60°, aria acestui patrulater este $\frac{\sqrt{3}}{4}$ din produsul diagonalelor.

Silion Dinu
elev Ploieşti

E: 361. Să se arate că:

$$\frac{(a+b)(b+c)-(a+d)(c+d)}{(a+b)(a+d)-(b+c)(c+d)} = \frac{b-d}{a-c}$$

Gh. I. Bercea

E: 362. Fie un cerc de diametru AB şi un punct M pe cerc. Dreptele BM, AM, intersectează tangentele la cerc duse în A şi B respectiv în C şi D. Să se demonstreze relaţia $AB^2 = AC \cdot BD$.

Donescu Dragomir
elev, Focşani

E: 362. Puterea unui turbogenerator fiind de 60000 cai putere, să se afle intensitatea curentului dacă tensiunea la borne este 5 kilovolţi. Să se calculeze energia curentului în kilovaţioră în timp de opt ore.

* * *

E: 364. Un bec necesită o putinţă de 60 waţi. Care este intensitatea curentului ce trece prin acest bec, dacă tensiunea este 112 volţi. Becul având filament metalic lung de 25 cm cu o rezistenţă specifică $\rho = 0{,}2$; se cere grosimea filamentului.

* * *

E: 365. Ce căldură va degaja în 40 minute un fier de călcat cu o rezistenţă de 30 ohmi, alimentat de un curent de 4 amperi.

* * *

E: 366. Să se demonstreze că unei fracţii dacă i se adaugă aceeaşi cantitate pozitivă şi la numărător şi la numitor, fracţia obţinută se apropie de unitate.

Să se verifice şi prin exemple numerice.

* * *

E; 367. Dacă la orice număr prim mai mare ca trei adăugăm unitatea şi numărul obţinut nu este divizibil cu 6, atunci dacă acelui număr prim îi scădem o unitate obţinem un număr divizibil cu 6. Să se dea exemple numerice, înainte se de a se demonstra teorema enunţată.

* * *

E: 368. O bucată de sticlă cu greutatea specifică de 2,5 este introdusă într'un vas cu apă de formă cilindrică având rază de 12 cm. Constatând că nivelul apei s'a ridicat cu 35 mm, să se afle greutatea acestei bucăţi de sticlă.

Să se generalizeze problema înlocuind numerele date prin litere, apoi să se rezolve.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Din lista rezolvitorilor de probleme ce urmează sunt evidenţiaţi următorii:

Iosifescu V. Marius (Clasa X-a Piteşti), *Torjescu S. Florin* (clasa X-a Ploeşti) *Dogaru T. Mihai* (Clasa X-a Ploeşti) *Mihăilescu N. Ştefan* (clasa XI-a L.C.3, Bucureşti) *Stoicescu T. Dumitru* (clasa X-a Buzău) *Constantinescu Cr. Florin* (clasa IX-a Cluj), *Pandrea Nicolae* (clasa X-a Focşani) *Petrovici Radu* (Clasa X-a Focşani) *Popescu St. Doru* (clasa X-a Ploeşti), *Racoveanu M. Constantin* (clasa XI-a T. Severin) *Golianu Petru* (clasa XI-a Buzău) *Tiţă I. Nicolae* (clasa XI-a Craiova), *Savin Dan* (Anul III Şcoala Tehnică C. Lung Muşcel), *Ionescu V. Savin* (clasa X-a Piteşti) *Tătaru D. Emil* (Clasa IX-a Aiud) *Andreescu G. Radu* (clasa IX-a L.C.10 Bucureşti) *Bocu Mircea* (clasa IX-a, Oradea), *Stanciu N. Toma* (clasa IX-a Ploeşti), *Schileru I. Dinu* (clasa VII-a Sc. 4 Bucureşti) *Fusaru Gheorghe* clasa X-a Piteşti) *Tifui Vasile* (clasa XI-a Piatra Neamţ) *Florescu M. Sanda* (clasa VII-a Sc. 4 fete Bucureşti), *Popovici I. Radu* (clasa VIII-a L.b. 6 Bucureşti) *Nicolae Alexandru* (clasa IX-a L.b. 1 Bucureşti), *Zaharescu Marius* (absolvent, T. Severin) *Popescu Gh. Sergiu* (clasa X-a, Slatina) *Andreescu Gh. Mircea* (clasa X-a L.b. 10 Bucureşti) *Banghea Oprea* (anul III Şcoala de Petrol Nr. 2 Câmpina *Popescu Alex. Dan* (clasa X-a Reşiţa, *Filipoiu Gh. Miu* (clasa XI-a Curtea de Argeş), *Pupăzan V. Nicolae* (clasa X-a Predeal), *Hammer Ladislau* (clasa X-a Timişoara), *Pârciu Mircea* (Şcoala de Petrol Câmpina) *Mănescu Mircea* (clasa X-a C. Lung-Muşcel), *Tofan Liliana* (Codlea Regiunea Stalin) *Cazanacli Nicolae* (clasa X-a Craiova *Donescu Dragomir* (Clasa IX-a Focşani), *Brezeanu Ioanin* (clasa XI-a Târgovişte).

Până la 1 August 1953 s'au mai primit soluţii bune la cel puţin cinci probleme, arătate după fiecare rezolvitor, dela următorii:

AIUD. Liceul Mixt Român. Clasa IX-a. Tătaru D. Emil (741, 764, 775, 777 — 780, 782, 783, 785 — 788, 790 — 795, 797 — 805, P),

ARAD. Clasa X-a. Stănoiu Alexandru (621, 744, 795, E: 239, 279, 280, 286),

BACĂU. Clasa IX-a. Isar Radu (863, 904, 906, 907, 921, E: 300, 306, 309, 312, 313), Şcoala Medie Tehnică de Construcţii Anul II. Stanciu Pavel (768, E: 286, 248, 251, 279, 280, 286),

BAIA MARE. Mureşan Mihai (813, 822, 823, 824, 834, 835, 837, 839, 845, 850, 864, 871),

BOTOŞANI. Clasa VII-a. Filip Mariana (835, E: 277, 285, 289, 294, 298),

BUCUREŞTI. *Liceul 1 Băieţi* Clasa VIII-a. Litinschi Mihai (822, 863, 864, 871, 872, 873, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 911, 912, 913, 916, 929, 938, E: 276, 277, 290, 292, 293, 294, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 312. 314, 315), Mieiţă P. Cristea (743, 745, 765, 792, 823), Nicolae Alxandru (659, 701, 710, 752, 764, 765, 770, 772, 777, 778, 779, 780, 787, 791, 794, 798, 800, 804, 806, 814, 831, 832, 834), Clasa X-a Radu Ovidiu (683, 691, 765, 770, 779, 780, 819, 822, 823, 825, 863, 864, 865, 881, 872, 873, 876, 904, 905, 906, 913, 915, 916, 923, 928, 938, E: 223, 228, 290), Clasa XI-a Petcu C.V. Nicolae (685, 701, 706, 710, 726, 728, 759, 762, 787, 794, 842, 850, 863, 872, 873, 904, 906, 909, 923). *Liceul 2 Băieţi* Clasa VII-a Duduica Radu (E: 281, 282, 286, 293, 294, 298), *Centrul Şcolar 2, 10, 13 Fete.* Clasa IX-a: Roceric Maria (691, 703, 705, 716, 724, 728, 748, 749, 762, 770, 774, 775, 779, E: 223 226, 228, 231, 236, 239, 240, 245, 251, 256, 260, 261, 262 263). *Liceul Nr. 3 Băieţi* Clasa XI-a Mihăilescu N. Ştefan (640, 674, 675, 678, 717, 827, 837, 839, 840, 841, 842, 845, 850, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 881, 882, 888, 895, 897, 902, 904, 905, 906, 907, 908, 949, 910, 911. 912, 913, 915, 916, 917, 919, 920, 921, 923, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 933, 937, 938, 939, 940, 941, 942), *Şcoala Nr. 3. Mixtă.* Clasa VII-a Bănică Paul (E: 277, 292, 294, 301, 305, 306, 308, 312, 313). *Şcoala Elementară 4 Fete.* Clasa VII-a Florescu M. Sanda (E: 223, 224, 225, 226, 227, 228, 230, 236, 239, 240, 243, 245, 248, 251, 259, 258, 260, 266, 267, 271, 273, 276,277, 279, 280, 285, 289, 292, 293, 294).

Şcoala Elementară Nr. 4 Băieţi. Clasa VII-a Schileru I. Dinu (685, 715, 718, 740, 765, 767, 768, 813, 839, 841, 854, E: 233, 237, 238, 249, 261, 283, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300); *Şcoala Elementară Nr. 5 Băieţi* Clasa VII-a. Lăzărescu Cristian (E: 277, 279, 280, 292, 294) *Liceul 6 Băeţi.* Clasa VII-a Popovici I. Radu (737, 740, 743, 744, 764, 788, 863, 872, 873, 874, 975, 876, 878, 880, 904, 905, 912, 913, 915, 916, 917, 928, 937, 938, 940, 941, 942, E: 320, 233, 234, 235, 242, 244, 246, 246, 283, 285, 290, 293, 295, 296, 298, 304, 305, 306, 309, 310, 311, 312, 313, 314). Clasa IX-a Kestenband Barbu (796, 842, 861, 863, 864, E: 270, 273, 279, 280, 281, 282, 286, 288, 290, 292, 294, 296).

BÂRLAD. Clasa X-a. Chirică V. Constantin (716, 717, 718, 721, 724, 740, 744, 750, clasa XI-a Bichir Ionel (669, 677, 683, 715, 782, 735, 807, 814, 815, 822, 823, 824, 831, 834, 839, 853, 866, 869, 872, 873),

BUCUREȘTI. *Liceul 7 Băeți.* I. L. Caragiale Clasa X-a Rosinger Elmer (651, 692, 794, 808, 816, 831, 841, 865, 904, 906, 920, 921) Stoleru George (627, 823, 839, 871, 873, 876, 882, 895, 937, 938, 941, E: 237, 241, 276, 277, 279, 285, 289, 305, 306, 309). *Liceul* 10 *Băieți Aurel Vlaicu.* Clasa IX-a: Andreescu Gh. Radu (642, 645, 651, 659, 671, 676, 681, 683, 684, 787, 688, 692, 695, 696, 697, 698, 801, 703, 705, 706, 707, 716, 717, 718, 721, 722, 731, 735, 736, 739, 742, 734, 747, 749, 751, 754, 756, 757, 766, 767, 772, 773, 775, 777, 778, 783, 785, 788, 793, 804, 813, 824, 825, 826, 827, 831, P) Clasa XI-a Andreescu Gh. Mircea (625, 633, 635, 642, 671, 702, 703, 705, 706, 707, 731, 743, 756, 785, 796, 804, 814, 826, 839, 850, 856, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 877, 879, 881, 882, 885, 886). *Școala Medie de Chimie* Anul II: Comănescu Grigore (863, 864, E: 245, 292, 294), *Școala Medie de măsurători terestre* Anul II — Moga Emil (838, 871, 872, 873, 875, E: 292, 294) *Școala Medie Tehnică de Instalații* Anul II- Radu Sebastian (841, E: 258, 261, 262, 263, 290, 295, 298, 300, 305, 306, 309, 311, 312) *Școala Profesională de Comerț Nr.* 2. Anul III Dedu Aurel (871, 873, 876, 937, E: 294, 305, 310) Funcționar (M.P.T.) Matei Gheorghe (703, 704, 705, 716, 722, 744, 745, 746, 748, 751, 757, 770, 787, 800).

BURDUJENI (SUCEAVA) Clasa VII-a Novac Eugen (E: 263, 279, 280, 292, 294)

BUZĂU Clasa X-a Cucu Dan (837, 838, 865, 871, 872, 873, 876, 878, 906, 913). Stoicescu T. Dumitru (732, 760, 761, 762, 764, 767, 778, 780, 797, 804, 824, 825, 838, 839, 842, 850, 854, 863, 865, 867, 868, 870, 871, 872, 874, 875, 876, 879, 880, 882, 888, 897, 904, 905, 907, 908, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 919, 925, 926, 927, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 937, 938, 940, P) Clasa XI-a — Coman M. Nicolae (621, 651, 777, 822, 888, P) Golianu Petre (627, 658, 659, 710, 736, 744, 745, 746, 747, 748, 770, 778, 794, 805, 806, 813, 821, 822, 823, 824, 826, 834, 835, 837, 838, 839, 861, 867, 869, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 904, 908, 910. 913, 915, 916, 923, 937, 938, 940, 942,P) Sava Ion (685, 694, 706, 707, 708, 709, 714, 716, 718, 728, 744, 794, 904, 905, 906, 908, 913, 915, 916, 923, E: 304, 305, 312, 314).

CĂLĂRAȘI Clasa XI-a — Rădulescu Ioan (700, 744, 751, 759, 765, 769, 823, 824, E: 272, 278, 289).

CÂMPINA Școala Medie Tehnică de Petrol Nr. 2 Anul III Banghea Oprea (693, 701, 708, 709, 710, 714, 787, 788, 822, 823, 824, 834, 835, 839, 842, 845, 850, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 872, 873, 878, 887, 890, 898, 907, 908, 909, 910, 911, 923, 924), Pârciu Mircea (757, 788, 792, 813, 826, 835, 842, 845, 849, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 887, 904, 905, 907, 908, 916, 923, 927, P).

CÂMPULUNG-MUSCEL. Școala medie tehnică de cărbuni. Anul III. Savin Dan (600, 601, 602, 603, 604, 606, 607, 608, 609, 611, 612, 615, 618, 621, 624, 625, 627, 630, 631, 633, 640, 716, 717, 718, 721, 722, 727, 731, 732, 736, 737, 739, 744, 745, 748, 751, 756, 757, 765, 813, 823, 835, 904, 923), Clasa X-a Liceu: Mănescu Mircea (617, 625, 631, 636, 637, 641, 653, 660, 671, 680, 688, 690, 693, 696, 702, 705, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 716, 723, 727, 734, 736, 739, 744, 746, 754, 756, 775, 777, 778, 780, 787, 791, 792, 793, 794, 795, 797, P).

CLUJ Școala de 2 ani. Absolvent Muscalu C. Ștefan (687, 708, 709, 710, 714, 757, 761, 762, 788, 819, 839) Liceul de Fete clasa VIII-a — Spârchez Monica (871, 873, E: 223, 225, 230, 243, 245, 251, 261, 294 Liceul de Băeți clasa IX-a Crăciun Ionel (787, 788, 792, 813, 819, 823, 835, 839, 850, E: 285, 289, 298), Constantinescu Gr. Florin (617, 641, 642, 650, 652, 654, 664, 674, 677, 681, 683, 690, 693, 696, 697, 698, 701, 703, 705, 706, 707, 711, 714, 715, 706, 707, 711, 714, 715, 716, 717, 727, 728, 729, 734, 735, 742, 747, 750, 751, 758, 759, 760, 761, 770, 775, 777, 778, 782, 783, 787, 791, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 808, 816, 822, 831, 834, P). Clasa XI-a Spârchez Zeno (651, 765, 758, 770, 796, 816, 824, 867, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 923).

CODLEA (Reg. Stalin) Fără indicație de școală și clasă. Tofan Liliana (648, 734, 744, 765, 769, 767, 788, 792, 806, 819, 823, 824, 834, 835, 838, 839, 845, 850, 864, 867, 871, 872, 873, 875, 876, E: 235, 244, 266, 268, 269, 270, 271, 274, 275, 276, 277, 279, 280, 281, 286, 286, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 298, 299, 300).

CONSTANȚA Școala Hidrotehnică anul II — Ștefan Ion (863, 871, 873, E: 243, 245, 281, 286). Anul III — Mitescu Constantin (739, 743, 767, 794, 798, 904: E: 244,246, 251, 265, 288). Pană Eugen (662, 663, 669, 670, 682, E: 218, 220).

CORABIA Clasa IX-a — Popa Gh. Stancu (743, 770, 776, 779, 834, E: 245, 251, 287).

CRAIOVA *Liceul 1 fete.* Clasa VIII-a Ionescu N. Marioara (E: 292, 305 306, 311, 314, 335). Clasa VIII-a B Trifan Vasile (871, 873, E: 230, 236, 239, 281, 286). Livescu Jeany (871, 872, 873, 876, E: 293, 294, P) Clasa IX-a Popescu Milița (723, 724, 744, 748, 749, 770, 783, 804, 904, E: 236, 239, 246, 248, 250, 251, 258, 261, 262, 263, 273, 286, 292, 300, 304, 305, 306, 310, 312) Clasa X-a Dumitrescu I. Mircea (685, 716, 718, 744, 745, 868, E: 233, 238, 243, 245, 247, 252). Clasa XI-a Cazancli Nicolae (787, 822, 833, 867, 868, 870, 871, 872, 873, 875, 876, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 912, 913, 15, 916, 919, 923, 925, 931, 932, 934, 938, 940, 942). Iliescu M. Mihai (685, 716. 744, 745, 758, E: 231, 233, 238, 243, 247, 252), Istinie C. Crăciunel (613, 693, 770, 771, 779, 780, 783, 835, 871, 872, 873, 888, 904, 905, 906, 908, E: 268, 272, 274, 281, 285, 289, 292, 312), Tița I. Nicolae (709, 759, 760, 764, 766, 779, 784, 791, 892, 793, 799, 805, 808, 813, 816, 819, 823, 824, 835, 839, 841, 844, 850, 853, 861, 863, 864, 965, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876) P. Student Sârbu I. Ovidiu (603, 634, 664, 671, 675, 768, 681, 694, 709, 710, 711, 712, 724, 736, 737, 744, 746, 748, 761, 763, 770, 773, 774, 777, 778, 780, 795, 800, 863).

CURTEA DE ARGEȘ Liceul mixt. Boncea Vasile (839, 842, 871, 872, 873, 875), Filipoiu Gh. Miu (645, 724, 742, 766, 767, 780, 783, 787, 793 804, 805, 808, 813, 819, 823, 824, 837, 838, 841, 848, 850, 854, 856, 857, 865, 867, 868, 870, 871, 872, 873, 875, P).

DEJ. Chiricuță Gheorghe (787, 794, 813, 816, 834, 838, 842, 863, 871, 872, 873, 875).

DOROHOI. Clasa VIII a. Cotter Armand (E: 223, 225, 230, 243, 245).

FOCȘANI. Clasa IX a. Baieră Bogdan (651, 666, 685, 694, 701, 744, 765, 768, 779, 791, 792, 793, 794, 795, 798, 823, 824, Donescu Dragomir (637, 650, 657, 659, 666, 670, 681, 682, 699, 707, 724, 743, 744, 745, 748, 752, 758, 762, 765, 768, 770, 772, 776, 779, 783, 788, 792, 794, 795, 797, 798, 800, P). Pandrea Nicolae (606, 707, 675, 681, 682, 685, 696, 701, 718, 736, 746, 750, 757, 761, 767, 777, 778, 784, 792, 799, 805, 806, 816, 823, 826, 813, 834, 839, 850, 863, 864, 868, 870, 872, 873, 874, 875, P) Scurtu Gheorghe

(651, 666, 685, 765, 788, 792, 823, 835, 871, 873). Clasa X a. Petrovici Radu (701, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 714, 715, 716, 717, 724, 725, 726, 727, 728, 733, 736, 740, 744, 745, 747, 748, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 762, 765, 766, 770, 772, 775, 776, 779, 780, 782, 783, 787, 788, 790, 791, 792, 793, 794, 795, P).

GALAȚI. Clasa X a. Balaban Emil (663, 666, 670, 671, 673, 674, 675, 767, 679, 681, 682, 685, 686, 693, 694, 695, 690, 701, 702, 703, 715, 716, 718, 719, 721, 723, 730, 731, 733, 734). Grecu V. George (745, 770, 800, 873, E: 225, 239, 245, 246), Rodittis Ioan (770, E: 258, 260, 263, 304, 305).

GHERLA. Scoala Pedagogică de Băeți Anul III Butura Aurel (E: 245, 247, 258, 260, 263).

GIURGIU. Clasa VIII-a Stanciu I. Aurel (666, 685, 721, E: 276, 277, 286), Mișcol Mircea (765, 768, 872, 888, E: 240, 256, 280, 283, 290, 291, 292, 293, 294, 298, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 312.P) Măgureanu C. Iulian (654, 665, 731, 787, 788, 813, 819, 823, 834, 839, 850, 852, 863, 871, 872, 873, 874, 875, 876, E: 274, 276, 277, 286, 285, 290, 291, 292, 295, 298) Clasa IX-a Vidan Marius (731, 757, 784, 787, 792, 793, 812, 813, 823, 827, 871, 872, 873, 874, 876, E: 227, 251, 276, 277, 284, 285, 286, 289) Clasa X-a Aldea Vasile (611, 666, 685, 767, 787, 788, 792, 813, 823, 834, 839) Fotă M. Stan (610, 611, 720, 734, 738, 787, 788, 790, 792, 793, 794, 800, 813, 816, 819, 823, 824, 834, 835, 839, 844, 850, 851, 867, 872, 873) Clasa XI-a Petcu I. Dumitru (697, 82) 825, 838, 852, 853, 854, 861, 863).

HUNEDOARA. Școala Medie Tehnică. Absolvent Cimporescu Doinel (878, 881, 882, 887, 888, 891, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917).

IAȘI. Clasa IX-a Arintescu C. Virgil (737, 744, 748, 765, 768, 779, 783, E: 228, 230, 234, 246, 266, 268, 270, 272, 275) Geambașan Lică (670, 682, 691, E: 223, 224, 226, 228) Hogaș C. Constantin (770, 834, 871, 872, 878, 904, 918, 919, E: 286, 292, 306, 312, 314) Clasa X-a Weissman Izu (608, 670, 723, 724, 726, 743, 745, 748, 749, 755, 770, 775, 776, 777, 779, 782, 791, 794, 796, 797, 798) Clasa XI-a Ciobanu Maria (867 872, 904, 905, 908, 909, 911, 923, 940).

OCNA MUREȘ. Clasa IX a. Horvart Ion (748, 770, 791, 808, 827, 847).

ORADEA. Clasa IX a Jemger Robert (E: 232, 245, 260, 266, 271, 291, 292, 294, 295, 295, 301, 303, 305, 306, 308, 314, 746, 755, 770, 871, 872, 873, 906, 907, 923, 926, 937) Clasa X a Bocu Mircea (655, 656, 673, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 813, 814, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 826, 827, 929, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 837, 938, 839, 840, 841, 942) Clasa XI a Cucereanu Laurențiu (623, 624, 627, 633, 635, 637, 641, 643, 645, 648, 658, 663, 664, 666, 670, 685, 686, 687, 691 693, 740, 745, 748).

ORAȘUL STALIN Clasa VII a Școala Elementară Nr. 3 Ciobanu I. (261, 268, 292, 298, 300) Clasa VII a Podeanu Corneliu (E: 220, 243, 244, 245, 247, 248, 252, 266, 269, C271, 283, 285, 289, 292), Clasa IX a Coșa Dan (744, 745, 748, 765, 768, 770, 779, 827, 845, 864, 871, 872, 873, 875, 876) Liceul Seral Muncitoresc Clasa XI-a Iordache Nicolae (673, 675, 676, 678, 679).

ORAVIȚA. Giurgiu Ioan (666, 679, 685, 704, 706, 707, 710, 718 721, 743, 746, 749, 751, 767, 770, 792, 839, 841 E: 203, 207, 208, 209, 213, 218, 223, 233, 234, 235, 236, 239, 243, 245, 251, 259, 260, 261, 268, 269, 275, 292).

PIATRA NEAMȚ Școala Energetică Anul II Agavriloaie N. Nicolae 837, 871, 872, 873, 874) Anul III Popa Ioan (843, 871, 873, 874, 876, E: 234, 235, 239, 290, 291, 292, 293, 300) Școala Elementară Roznov. Clasa V a Gervescu M. Ioan (768 E: 252, 259, 260, 266, 271, 275) Clasa X a Vasilescu Florica (743, 745, 779, 834, E: 256, 261, 262, 263, 265, 294) Clasa XI a Țifui Vasile (640, 671, 698, 704, 709, 715, 721, 723, 740, 741, 742, 745, 747, 748, 753, 757, 770, 777, 778, 780, 783, 788, 782, 788, 792, 794, 798, 799, 804, 813, 819, 823, 834, 835, 863, 869, 871, 872, 875, E: 215, 226, 228, 243, 245, 248, 257, 258, 261, 263, 268, 269, 272, 277, 281, 285, 286, 288, 289, P) Vasilescu Stelian (716, 767, 839, E: 243, 245, 248, 292, 294).

PITEȘTI. Școala elementară Pietroșani. Clasa VII a. Oproiu Camil (E: 230, 232, 250, 281, 284, 286), Școcala medie tehnică de mecanică. Anul II. Stănescu Gh. Ion (685, 679, 878, 792, 813, 823, 871, 872, 873, E: 230, 234, 237, 239, 243, 277, 289, 291, 294, 298), Clasa VIII-a. liceu. Sămătășescu F. Dan (658, 787, E: 206, 220, 223, 225, 227, 266) Șerban G. Gabriel (679, 685, 765, 823, E: 224, 241, 243, 250, 276, 277, P). Clasa IX-a. Petcu Mircea (724, 742, 748 765, 767, 770, E: 236, 251, 262, 267, 305, 306) Săraci M. Dumitru (632, 633, 635, 651, 655, 658, 770, 722, 723, 724, 769, 770, 795, 806, 816, 819, 821, 834, E: 208, 216, 217, 218, 222, 223, 226, 230, 232) Clasa X-a Fusaru Gheorghe (607, 612, 613, 618, 620, 636, 640, 641, 642, 654, 662, 664, 668, 673, 674, 687, 688, 689, 691, 693, 695, 704, 705, 706, 707, 715, 717, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 726, 727, 728, 731, 733, 734, P) Ionescu V. Sorin (601, 603, 681, 726, 783, 787, 788, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 800, 805, 813, 819, 821, 823, 824, 825, 827, 834, 841, 842, 845, 850, 852, 864, 867, 868, 871, 872, 873, 876, E: 225, 270, 272, P). Iosifescu V. Marius (807 — 810, 812,— 814, 816 — 832, 834— 838, 840 — 842, 844, 845, 847, 853, P) Predescu Florica (736, 745, 770, 838, 863, 872, 875, E: 245, 258, 260), Clasa XI-a Dobra D. Ilie (841, 863, 876, E: 293, 294, 298) Nania I. Ion (721, 740, 765, 766, 767, 787, 871, 872, 873, 875, 804, 905, E: 248, 256, 257, 291).

PLOEȘTI Școala medie tehnică Petrol. Anul II. Coller Sergiu (E: 237, 243, 247, 253, 255). Anul IV. Jilăveanu S. Gheorghe (848, 853, 904, 905, 912, 913, 925, E: 291, 292, 298, 300, 301, 306,) Liceul I. L. Caragiale. Clasa VIIIa Jipa F. Vasile (723, 724, 726, 745, 768, 770, 775, 779, 787, 827, 834, 841, 863, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 904, 905, 906, 913, 915, 917, 923, 925, 937, 938, 939, 940, 941) Popoviei Gh. Iulian (837, 839, 845, E: 290, 291, 292, 294, 295, 296, 298, 299, 300), Clasa IX a Negrea Sorin (725, 765, 769, 770, 779, 783, 787, 791, 792, 799, 800, 806, 822, 823, 831, 834, 863, 864, 865, 871, 872, 873, 876), Stanciu N. Toma (636, 676, 682, 683, 685, 686, 691, 693, 701, 703, 745, 746, 758, 761, 761, 765, 768, 778, 780, 783, 787, 791, 792, 793, 794, 799, 800, 804, 808, 816, 819, 822, 823, 824, 831, 834, 845, 850, 853, 863, 865, 866, 867, 871, 873, 876, P), Stroe Radu (673, 713, 717, 754, 757, 790, 805, 821, 822, 839, 841, 845, 854, 861, 853, 864, 870, 871, 872, 875, 876, E: 290, 291, 293, 294, 295, 298, 200, P), Schip Z. Hary (E: 223, 237, 242, 243, 248, 258, 263, 272, 275, 281, 286, 281, 292, 294, 300,P) Târlea Alexandru (666, E: 225, 230, 277, 285, 294), Wolf Jean (E: 292, 294, 305, 306, 308,) Clasa X-a. Dogaru T. Mihai (609, 637, 642, 645, 650, 652, 660, 676, 769, 686, 687, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 717, 716, 717, 721, 723, 724, 725, 726, 728, 729, 733, 735, 736, 737, 739, 740, 741, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 751, 752, 753, 754, 755, 756,

757, 758, 765, 766, 767, 768, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 779, 780, 783, 785, 787, 788, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 803, 804, 805, 806, P). Dumitru C. Ioan (765, 768, 787, 813, 823, 824, 834, E: 277, 286), Honoiu Dan (823, 834, 838, 850, 871, 872, 913, 927), Moreanu N. Rudi (655, 662, 680, 682, 685, 690, 715, 716, 717, 720, 724, 726, 728, 734, 739, 740, 742, 743, 744, 748, 749, 751, 765, 767, 768, 769, 777, 780, 787, 813, 819, 822, 823, 824, 827, 834) Popescu St. Doru (660, 671, 678, 680, 688, 698, 715, 719. 730, 734, 736, 747, 739, 741, 742, 744, 745, 747, 748, 751, 756, 757, 765, 767, 768, 769, 770, 774, 775, 777, 780, 786, 788, 792, 793, 800, 810, 813, 816, 819, 822, 823, 824, 827, 837, 838, 843, 839, 850 P), Torjescu S. Florin (605, 622, 653, 642, 662, 671, 678, 680, 686, 692, 693, 712, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 719, 723, 728, 729, 730, 731, 734, 735, 736, 737, 738, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 751, 752, 753, 754, 756, 757, 765, 767, 768, 769, 770, 771, 775, 777, 778, 779, 780, 786, 787, 788, 790, 791, 792, 793, 794, 798, 799, 800, 801, 802, 804, 805, 806, 813, 814, 816, 818, 819, 822, 823, 824, 826, 831, 834, 835, 837, 838, 839, 841, 842, 844, 845, 847, 848, 850, 854, 862, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 876, 888, 897, 904, 906, 908, 910, 916), Silion Dinu (608, 637, 642, 770, 704, 707, 716, 724, 745, 746, 747, 751, 759, 795, 800, 804, 805, 806. 822, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, P).

PREDEAL. Clasa X-a. Alexa Ioan (618, 621, 635, 643, 647, 650, 684, 685, 715, 721, 723, 724, 728, 744, 750, 770, 772, 776, 777, 782, E: 200, 239, 244, 246, 255, 257, 258, 261, 262, 263, 264), Budin I. Constantin (650, 673, 680, 693, 697, 750, 769, 777, 783, 800), Coman Gheorghe (618, 650, 715, 724, 728, 729, 747, 750, 770, E: 244, 246, 254, 255, 257, 258, 262, 264), Nuștiuc N. (618, 621, 650, 658, 684, 715, 721, 728, 729, 744, 750, E: 200, 202, 239, 258), Pricã Gh. Constantin (607, 621, 622, 673, 679, 685, 691, 693, 717, 724, 725, 726, 728, 737, 744, 746, 752, 756, 757, 769, 770, 776, 780, 783, 784), Pupăzan V. Nicolae (635, 647, 664, 666, 687, 694, 704, 706, 709, 711, 719, 721, 727, 737, 767, 765, 768, 770, 772, 776, 777, 779, 782, 783, 784, 791, 792, 794, 796, 798, 800, 805, 816, 823, 834, 882, E: 207, 208, 216, 222, 225, 236, 237, 239, 258, 261, 262, 263, 268, 270), Răduț Nicolae (650, 723, 724, 728, 776, 777, 794, E: 256, 258, 261, 270, 274), Sărman A. Ion (625, 643, 760, E: 213, 215, 216, 218, 219, 220) Uță Marin (653, 709, 762, 764, 765, 766, 768, 769, 770, 772, 776, 777, 779, 780, 782, 783, 784, 787, 788, 791, 792, 794, 795, 796, 800, 801, 804, 805, 906, 807, E: 200, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265 P).

RĂDĂUȚI. Clasa X-a, Lazăr Dumitru (608, 613, 617, 618, 635, 650, 670, 671, 673, 682, 747, 757, 791, 800, 806, 816, 819, 822, 823, 824, 827, 834, 871, 872, 873, 874, 875, 876), Clasa XI-a. Coroamă Octavian (676, 685, 716, 718, 726. 727, 744, 745, 748, 790, 794, 864, 872, 873, E: 222, 223, 248, 251, 269, 274, 291, 292).

RÂMNICUL SĂRAT Liceul mixt Clasa VIII-a. Vlase Constantin (873, 912, 927, E: 292, 294, 296, 300, 306, 309, 314), Voicea Viorica (E: 261, 263, 305, 306, 309), Clasa IX-a. Frangu Iulia (871, 872, 904, 912, 913, E: 305, 306), Clasa X-a Stamatiu I. Alexandru (682, 693, 695, 716, 722, 723, 724, 726, 728, 737, 743, 744, 745, 748, 752, 753, 779, 787, 792, 793, 794, 821, 823, 834, 837, 839, 845, 850, 889, E: 223, 224, 225, 226, 227, 228, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 242, 243, 244, 245, P), Vâlculescu Cezar (722, 723, 737, 743, 744, 745, 848, 752, 753, 779, 787, 792, 793, 821, 834, 837, 839, 841, 845, 850, 889, E: 223 224, 226, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 240, 242, 243, 251, 257, 258, 263, 272, 291, 292, 294, 298).

RÂMNICUL VÂLCEA. Clasa X-a Liță I. Constantin 664, 745, 838, 839, 878, 904. 908, 923, 937, 938, 940, E: 213, 214, 219, 245, 248, 254, 292, 258, 295, 305, 306, 309, Pavelescu N. Dan (E: 277, 279, 280, 283, 286), Popescu Gabriel (P. Cum se determină sarcina și masa unei particule elementare).

REȘIȚA. Clasa X a. Popescu Al. Dan (605, 653, 666, 677, 678, 680, 718, 728, 735, 737, 740, 752, 753, 766, 767, 782, 788, 801, 806, 813, 822, 823, 824, 831, 846, 848, 851, 853, 858, 864, 865, 867, 870, 871, 872, 873, 876, P).

ROMAN. Școala medie tehnică de Siderurgie. Anul III. Floreș Alexandru (835, E: 276, 277, 289, 285). Clasa VIII a. liceu Brumă Ilie (787, 800, E: 243, 245, 251, 260, 263, 266, 292), Clasa IX-a Stoica C. Constantin (787, 800, E: 243, 245, 292, 294).

ROSIORII DE VEDE. Liceul mixt. Clasa X-a. Georgescu Ștefan (745, 769, E: 245, 261, 263, 266, 271, 272, 274).

SLATINA. Clasa X a Achimescu M. Sever (788, 819, 823, E: 243, 269, 285, 292, 298), Constandache Rodia (723, 775, 777, 787, 791, 824, 839, 864, E: 225, 280, 281, 286, 288), Popescu Marcela (708, 711, 712, 713, 717, 721, 723 727, 739, 740, 749, 788, 798, 821, 839, 871, 872, E: 213, 239, 276, 285, 289, 292, 294, 298), Popescu Gh. Sergiu (604, 611, 627, 660, 666, 682, 686, 699 707, 729, 740, 742, 743, 749, 754, 755, 764, 777, 788, 798, 807, 813, 821, 822, 823, 825, 834, 835, 839, 861, 871, 873, 876, 874, P), Clasa XI-a. Nicolescu Ioan (685, 748, 871, 873, 873, 875, E: 251, 292, 294, 298) Diaconu G. Const. (724, 740, 746, 765, 767, 770, 779, 792, 793, 839, 850), Pelcea M. Ilie (621, 629, 716, 717, E: 222). Zigulescu D. Marin (703, 706, 709, 751, 793, 799, 850, 873, P) Știucă M. Constantin (765, 767, 768, 780, 813, 823, 839, 850).

SUCEAVA. Clasa VIII a. Zăgărescu N. Constantin (787, 791, 794, 816, 822, 823, 834, E: 266, 268, 271, 279, 280, 281, 286, 288), Clasa IX-a Budai Teodor (765, 823, E: 242, 243, 247, 252, 271, 274, 275, 277, 279, 280, 281, 286, Popovici Stelian (673, 683, 783, 824, 834, 845, 867, 868 872, 875, E: 236, 279, 280, P), Clasa IX-a. Tiperciuc Eugen (867, 872, 873, 875, E: 239, 251, 292, 293, 294, 300, P).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VIII-a. Brebu I. Gheorghe (682, 686, 766, 769, 781, 787, 788, 791, 807, 819, 823, 827, 839, 850, 856, 863, 871, 872, 873, 875, 876, 878, P). Voiculescu V. Claudia (788, 819, E: 278, 285, 289, 292, 294). Clasa IX-a. Oprea A. Aurelian (601, 611, 630, 637, 641, 703, 704, 705, 706, 707, 709, 710, 713, 766, 767), Oproiu Cornel (E: 256, 258, 260, 261, 266) Mihăilescu V. Florian (744, 745, E: 245, 249, 251), Stoian I. Gheorghe (608, 713, 716, 740, 746, 765, 782, 800, 801, 806, 825, 838, 839, 841, 847, 853, 864, 865, 871, 872, 873, 875, 876, 888, 923, 929, P), Tache Ștefan (645, 670, 684, 698, 693, 699, 726, 744, 745, 756, 757, 765, E:247, 249,P). Clasa XI-a. Brezeanu I. Ioanin (620, 631, 643, 651, 659, 660, 675, 708, 734, 746, 759, 761, 782, 788, 890, 791, 792, 793, 974, 797, 798, 799, 800, 805, 806, 807, 813, 814, 818, 819, 822, 823, 824, 826, 831, 832 834, 835, 839, 842, 845, 848, 861, 863, 864, 867, 868, P) Dobrescu A. Marcel (642, 651, 675, 677, 736, 773, 802, 813, 822, 824, 826, 831, 835, 842, 845, 847, 848, 851, Rădulescu Eugen (630, 645, 670, 678, 718, 733, 735, 765, 770, 788, 813, 823, 841, 873) Școala medie tehnică de Petrol Nr. 2, Anul II. Bobeică I. Dumitru (691, 696, 734, 745, 787, 788, 838,

839, E: 227, 231, 232, 234, 277, 285, 289, 290, 292, 294, 295, 296, 298,P),

TÂRGU JIU Clasa X a. Cosinschi Dragoș (619, 624, 635, 636, 641, 645, 657, 659, 660, 661, 669, 676, 677, 684, 686, 687, 688, 694, 702, 703, 705, 706, 707, 718, 721, 722, 723, 724, 726, 727, 728,P) Surlin Grigore (872, 938,E: 281, 286, 287, 288, 293, 305, 306, 312), Clasa XI-a. Crăciun V. Constantin (685, 787, 834, E: 268, 274, 279).

TIMIȘOARA. Școala medie de energie electrică. Anul II. Fliker Gh. (904, 905, 910, 916, 917, 928, 937, 938, 948,), Clasa VII-a, Arsenovici Tiberiu 768, E: 200, 233, 234, 235, 237, 242, 243, 245, 247, 248, 254, 285, 285, 289, 298), Clasa XI-a. Ciosa Ioan (765, 767, 768, 770, 777 780, 800, 813, 823, 834). Hammer Ladislau (667, 673, 720, 722, 731, 764, 765, 767, 768, 770, 774, 777, 780, 787, 788, 792, 794, 795, 807, 813, 817, 819, 823, 824, 825, 831, 835, 837, 838, 839, 841, 842, 845, 848, 850, 853, 854,P). Rusnac Leonid (737, 743, 744, 748. 752, 757, 765, 767, 768, 770, 771, 777, 778, 779, 780, 791, 792, 794, 799, 800, 813, 823, 834, 878, 888, 904, 915, 923, 938, 940).

TURNU-MĂGURELE. Liceul mixt. Clasa IX-a Zătreanu P. Corneliu (834, 873, E: 243, 286, 294, 306,) Clasa X-a. Dragomirescu Elena (917, 938, 940, E: 305, 306), Clasa XI-a. Metoni Eugenia (745, 748, 765, 788, 792, 813, 823, 835, 839, 850, E: 243, 245, 276, 277, 285, 289, 290, 292, 295, 298), Popescu S. Natalia 873, 917, 923, 942, E: 248, 305,). Țugui Emil (666, 685, 716, 718, 721, 728, 745, 748, 758, 765, 767, 788, 792, 813, 823, 839, 871, 873, 876, E: 223, 226, 228, 236. 245, 266, 275, 276, 277, 285, 291, 292, 298).

TÂRGUL-MUREȘ. Clasa IX-a. Lazlo V. Ioan (787, 794, 806, 823, 834,) Maior Miron (E: 223, 225, 228, 230, 231, 239, 243, 245, 246, 248). Zaharias Ștefan (817, 823, 839, 850, E: 276, 277, 279, 285, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 298, 300), Clasa X-a, Bunica M. Octavian (765, 769, 770, 771, 772, 778, 782, 787, 792, E: 257, 275).

TECUCI. Țurcanu D. Ioan (685, 686, 689, 692, 736, 737, 742, 767, 788, 791, 792, 813, 819, 838, 839, 841, 845, 882, 884, 898, E: 235, 237, 242, 272, 276, 277, 285, 289, 291 292, 294, 296, 298, 300, 301, 304, 306, P).

TURDA. Clasa XI-a Rusu N. Vasile (618, 767, 788, 813, 823, 871, 872, 873, 875, E: 223, 255, 260, 266, 269, 271, 272, 275, 279, 280, 281, 284, 285, 286, 289, 290, 291, 292, 294, 298).

TURNU-SEVERIN. Clasa IX-a. Stănuleț Mihai (731, 743, 748, E: 206, 215, 243, 245, 246, 251), Clasa XI-a Colbert C. Virgil (647, 728, 740, 748, 764, 765, 813, 825, P). Absolvent Zaharescu Marius (667, 669, 710, 723, 726, 744, 748, 751, 752, 755, 762, 765, 767, 769, 770, 771, 775, 777, 778, 779, 784, 785, 787, 788 791, 792, 793, 794, 813, 819, 823, 825, 835, 839, 863, 871, 872, 875,P) Racoveanu Em. Constantin (716, 718, 720, 721, 723, 724, 725, 727, 728, 733, 734, 736, 737, 740, 741, 742, 744, 745, 746, 748, 757, 758, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 774, 777, 782, 787, 788, 781, 792, 794, 795, 800, 801, 807, 813, 819, 823, 825,P).

VASLUI. Clasa VIII-a. Popa St. Petru (765, 770, 904, 916, E: 257, 260, 261, 263, 305, 306, 309 311, 312,P) Stănescu Viorel (E: 200, 215, 256, 260, 266,P). Clasa XI-a Baichis J. (663. 715, 739, 740, 765, 767, 778, 787, 792, 794, 797, 799, 813, 822, 823, 826, 839, 850, 878, 879, 881, 882, 887, 888,P) Bostan G. Emil (868, 871, 872, 873, 875, 876, 904, 905, 908, 912, 913, 915, 916, 923, 927, 928, 937, 938).

ZALĂU. Clasa IX-a Hodiș Gheorghe (632, 633, 641, 814, 834, 842, 849, 861, 863, 864, 865, 866, 871, 872, 873, 875, E: 200, P).

Redactarea soluțiilor

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebue să fie făcută separat, cu aplicațiile cerute, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie; iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei și enunțul complect. După soluționarea problemei, scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați, și trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică.

— *Se mai primesc soluții* numai la problemele cu numărul de ordine 807, și următoarele, iar pentru exercițiile elementare dela E: 276, și următoarele, adică din ultimile șase numere din R.M.F.

* * *

— *Pentru premierea rezolvitorilor* de probleme din R.M.F. pe anul 1953, se va ține seama de toate soluțiile primite între 1 Noembrie 1952, și 1 Noembrie 1953, și anunțate la rubrica rezolvitorilor, de calitatea soluțiilor și de modul lor de redactare precum și de clasa pe care o urmează rezolvitorul.

— După apariția acestui număr al R.M.F. din Octombrie 1953, elevii evidențiați în ultimele 12 numere ale revistei fiind considerați concurenți la premiile R.M.F. sunt rugați să întocmească câte o fișă cuprinzând numele, adresa actuală și tabel de toate problemele ce au rezolvat, *în ordinea numerică a lor* și anunțate la rubrica rezolvitorilor începând cu numărul 11 din Noembrie 1952.

* * *

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste; iar trimiterea lor să se facă odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica.

— Dorim mai multă colaborare la R.M.F. a *profesorilor de matematică și fizică.*

— Fiecare cititor al R.M.F. este rugat *a face cunoscută revista* și altor cunoscuți, pentru a mări astfel numărul colaboratorilor.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice și fizice, articole, dări de seamă asupra activității cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, cereri, sugestii și propuneri etc. se trimit pe adresa: *Revista Matematică și Fizică Strada Dionisie Lupu* 40, *Raionul Stalin, București.*

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA; Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru întreprinderi . . . . . Lei 60 anual

Tarif pentru profesori, muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 1289. – ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. – BUCUREŞTI

Lei 1.—

E 1426/d

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT
Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEH - ÜSTRE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

Országos Műszaki Könyvtár
BUDAPEST

Tineri din școli, întăriți munca în cercurile de matematică și fizică! Faceți ca cercurile voastre să devină ajutoare prețioase la ridicarea calității științifice și tehnice!

★ ★ ★

ANUL IV

NOEMBRIE 1953

11

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

	Pag.
1. *Ce este şi ce urmăreşte Topologia de T. Ganea* ...	273
2. *Construcţia unor dispozitive pentru experienţe de electromagnetism după A. I. Glazârin*	278
3. *Noutăţi din ştiinţa şi tehnica sovietică*	283
4. *Chestiuni de examen (1024—1091)*	285
5. *Probleme rezolvate (718, 723 727, 736, 743, 749, 752, 753, 772, 775, 777, 778, 782, 798, 801, 807)*	286
6. *Probleme propuse (1092—1116)*	290
7. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 369—E: 383)*	293
8. *Rubrica rezolvitorilor de probleme*	294

ANUL IV — 11 — NOEMB. 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA; Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa priviloare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.
Anul IV, Nr. 11 Noembrie 1953

CE ESTE ŞI CE URMĂREŞTE TOPOLOGIA

TUDOR GANEA

1.

Se cunosc de multă vreme unele probleme care, deşi se referă la anumite configuraţii geometrice, nu se încadrează în geometria propriu zisă. Trăsătura care distinge acest gen de probleme de problemele de geometrie propriu-zisă, constă în aceea că forma exactă a figurii nu joacă un rol esenţial în problemă; anumite deformaţii aduse figurii nu modifică fondul problemei nici soluţia ei.

Ne propunem să expunem şi să analizăm aci, câteva probleme de acest gen; în special vom căuta să punem în evidenţă anume proprietăţi ale figurilor ce se păstrează când supunem figurile respective unor deformaţii în decursul cărora nu efectuăm tăieturi sau lipituri.

Se cunoaşte importanţa deosebită pe care o acordă geometria studiului transformărilor: deplasări, asemănări, omotetii, inversiuni, etc. Cercetările matematice moderne au făcut sensibilă necesitatea de a lărgi cadrele geometriei, de a extinde clasa transformărilor studiate. Intr'o serie de probleme importante s'a constatat că trebue examinate acele proprietăţi ce se păstrează prin transformări mai generale, în special, acele proprietăţi ce se conservă prin deformaţiile fără tăieturi sau lipituri, de care am amintit. In acest fel, limitele geometriei au fost depăşite; a luat fiinţă o nouă ramură a matematicii, topologia sau analysis situs, al cărei obiect constă în studiul proprietăţilor ce se conservă prin aşa numitele transformări topologice, care în esenţă nu sunt altceva, decât deformaţiile considerate mai sus.

Menţionăm că unele probleme şi rezultate intuitive, simple în aparenţă, ce aparţin domeniului topologiei, s'au ivit la început ca nişte curiozităţi, au fost considerate uneori ca probleme distractive. Acest fapt este desigur legat de caracterul calitativ al acestor rezultate, este legat de surprinzătoarea lor independenţă faţă de forma exactă a figurii, trasată neriguros cu mâna liberă. Matematicienii au constatat însă cu timpul, că acest gen de rezultate exprimă proprietăţi geometrice deosebit de profunde, importante tocmai datorită invarianţei lor faţă de transformări foarte generale. Topologia este astăzi, o disciplină matematică bogată, în plină desvoltare, în care noţiunile şi proprietăţile adesea intuitive capătă o formulare şi o fundamentare riguros logică şi ale cărei rezultate au multiple aplicaţii în domeniile cele mai variate ale matematicii.

2.

Un exemplu simplu ilustrează consideraţiile precedente.

Să considerăm o circumferinţă în plan, să cercetăm ce proprietăţi se păstrează când o deformăm fără tăieturi sau lipituri.

Fig. 1

Pentru a înţelege mai bine ce este o deformaţie fără tăietură sau lipitură, să dăm mai întâi exemple de deformaţii cu tăieturi sau lipituri. Tăind o circumferinţă într'un punct al ei, se poate obţine

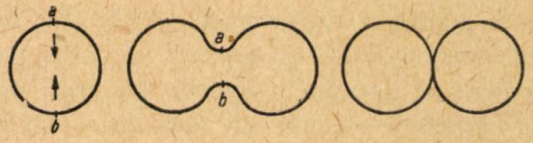


Fig. 2

din aceasta un segment (fig. 1). Tăind circumferinţa în două puncte ale ei, se poate obţine îndreptând cele două bucăţi, două segmente.

Unind însă prin apropiere, două puncte de pe cerc, obţinem o curbă compusă din două bucle cu un punct comun (fig. 2).

Putem uni prin apropiere trei puncte pentru a obține o curbă alcătuită din trei bucle (fig. 3).

Fig. 3

Dacă unim prin apropiere perechi, perechi, punctele simetrice față de un diametru, putem obține un segment (fig. 4). Putem deforma fără tăietură sau lipitură o circumferință, astfel încât să obținem din ea un patrat, sau o elipsă.

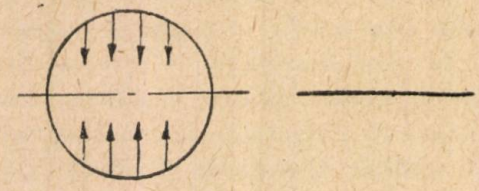


Fig. 4

Putem obține printr'o deformație fără tăietură sau lipitură o curbă mai complicată, fig. 5.

Fig. 5

Un segment nu împarte planul în mai multe porțiuni. Curba finală din fig. 2 împarte însă planul în trei porțiuni: câte una în interiorul fiecăreia din cele două bucle, și o a treia exterioară buclelor. Ultima curbă din fig. 3 împarte planul în 4 porțiuni. Constatăm deci, că prin tăieturi sau lipituri, numărul de porțiuni în care este împărțit planul nu respectă nicio lege. Cu totul altfel stau lucrurile când considerăm deformații fără tăieturi sau lipituri. Circumferința inițială împarte planul în două regiuni: interiorul și exteriorul cercului. Interiorul cercului este locul punctelor care au distanța la centru mai mică decât raza; exteriorul cercului este locul punctelor care au distanța la centru superioară razei; aceasta este caracterizarea matematică a celor două regiuni în care o circumferință împarte planul. Dacă ne referim numai la despărțirea planului în regiuni, la fel stau lucrurile și pentru un patrat sau pentru o elipsă. De asemeni, curba din fig. 5 împarte planul în două regiuni; dar aceste două regiuni nu mai sunt susceptibile de o caracterizare matematică simplă cum era cazul la circumferință; putem doar afirma că, una din regiuni e mărginită, cealaltă nemărginită. Numim cea mărginită interiorul, cea nemărginită exteriorul.

Considerarea a oricâtor exemple poate ilustra un adevăr matematic. Numai aceste considerări nu-l poate însă, niciodată demonstra. E deci, nevoe de o demonstrație matematică riguroasă a faptelor constatate intuitiv.

Prin intuiție se constată că o curbă obținută printr'o deformație fără tăietură sau lipitură dintr'o circumferință, împarte planul în două regiuni.

O demonstrație matematică riguroasă a unui adevăr nu se poate niciodată întemeia pe noțiuni insuficient precizate. In enunțul de mai sus trebue deci precizați anumiți termeni. In primul rând trebue definită precis noțiunea de deformație, fără tăietură sau lipitură, adică noțiunea fundamentală de transformare topologică. Trebue apoi, să dăm un sens precis noțiunii de împărțire a planului într'un anumit număr de regiuni.

Constatăm deci, cu acest prilej, că una din sarcinile topologiei este și aceea de a da o formulare matematică riguroasă anumitor noțiuni intuitive, care nu pot sluji însă, fără precizări suplimentare, la clădirea unei demonstrații într'adevăr satisfăcătoare.

Teorema de mai sus, deși admisă intuitiv multă vreme, a fost enunțată și parțial demonstrată pentru prima dată de C. Jordan, la sfârșitul secolului trecut. De atunci s'au dat pentru ea diferite demonstrații. O demonstrație deosebit de elegantă a fost dată în 1950 de matematicianul sovietic A. Filipov.

3.

O problemă de topologie în plan, adesea propusă ca joc, este următoarea:

Se dau trei case și trei puțuri; să se unească fiecare casă cu fiecare puț prin câte un drum, astfel încât drumurile să nu se întretaie.

Fie A, B, C, cele trei case și P, Q și R cele trei puțuri (fig. 6).

Constatăm imediat că putem uni de pildă, pe A cu P, Q, R, pe C cu P, Q, R și pe B cu P și R. In figura alăturată nu putem uni însă, pe B cu Q, fără a intersecta un drum deja existent. Problema propusă nu are soluție, oricum am trasa drumurile dintre case și puțuri. Pentru a dovedi riguros că problema este imposibilă, numai încercările nereușite de a o soluționa nu sunt suficiente.

Există însă în topologie, o teoremă înrudită cu teorema lui Jordan, denumită teorema curbei θ care ne va arăta riguros insolubilitatea problemei.

Teorema curbei θ. *Figura obținută printr'o transformare topologică dintr'un cerc plus un diametru împarte planul în trei regiuni.*

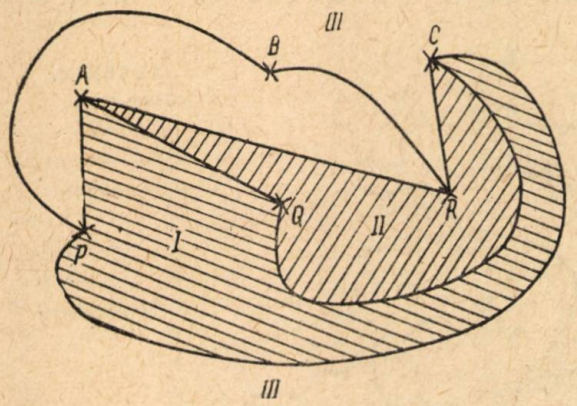


Fig. 6

Observăm, că figura 6 unde unim oricum punctele A și C respectiv cu P, Q și R poate fi obținută printr'o transformare topologică a fig. 7.

Drumurile APC, AQC, ARC, împart deci planul în trei regiuni numerotate I, II, III. Punctul B se află neapărat în una din ele, de pildă în III. Există totdeauna un puț care nu se află într'o regiune dată: R nu se află în I, P nu se află în II, Q nu se află în III. Pentru a uni pe B cu puțul care nu se află în regiunea în care se află B va trebui neapărat să tăiem un drum deja existent, care delimitează regiunea ce conține puțul respectiv. Pentru a uni de pildă pe B cu Q trebue să intersectăm unul din drumurile AR, RC, AP, PC. Problema deci, nu are soluție.

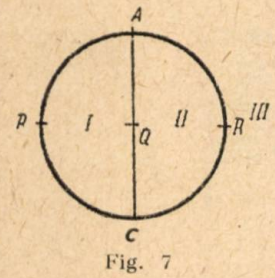


Fig. 7

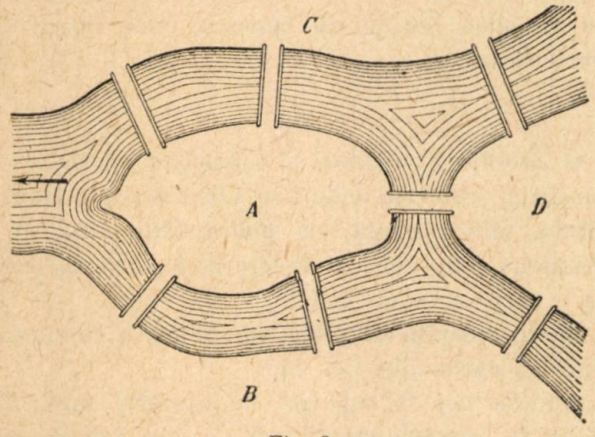


Fig. 8

O altă problemă ce datează din sec. XVIII este următoarea, cunoscută sub numele de problema celor 7 poduri: Pot fi parcurse cele 7 poduri din fig. 8, astfel încât să nu trecem decât o singură dată pe fiecare? Răspunsul e negativ.

O problemă celebră a topologiei planului este problema coloratului hărților sau problema celor patru culori. Deși în aparență nu e mai complicată decât celelalte două de mai sus, e încă astăzi, nerezolvată. Pentru atacarea ei, au fost desvoltate puternice instrumente de cercetare, care s'au dovedit apoi utile în multe alte probleme. Problema constă în a decide dacă patru culori sunt suficiente pentru a colora orice hartă, fără ca raioanele alăturate să aibe aceeași culoare. Raioanele pot avea orice formă, însă nu pot fi porțiuni din plan cu găuri. Se știe precis că trei culori nu ajung în general, însă că 5 sunt sigur suficiente. Cititorul poate constata cu ușurință că harta R.P.R. din figura 9 se poate colora cu 4 culori.

4.

Problemele de topologie în spațiu sunt în general mai complexe decât cele în plan.

Vom cita în primul rând teorema lui Euler relativă la poliedre convexe: Numărul v de vârfuri, numărul m de muchii și numărul f de fețe ale unui asemenea poliedru, sunt legate prin relația

$$v + f = m + 2$$

Pentru un cub de pildă, $v = 8$, $f = 6$, $m = 12$.

Dacă proiectăm un asemenea poliedru pe o suprafață sferică, obținem o împărțire a acestei suprafețe într'un anumit număr de porțiuni. Relația între numărul de vârfuri, de fețe și muchii în acest poliedru sferic se menține; deasemeni se menține dacă acum supunem sfera unei deformații fără tăieturi și lipituri.

Acest rezultat demonstrat de Euler în 1752, e considerat de topologul sovietic P. S. Alexandrov drept primul rezultat important din Topologie.

Teorema lui Jordan este valabilă și în spațiu. Rolul circumferinței e jucat acum de suprafața sferei.

Figura obținută prin deformația fără tăieturi sau lipituri a unei suprafețe sferice, împarte spațiul în două regiuni.

Dar aici trebue făcută o observație importantă. In cazul planului se poate demonstra că atât interiorul cât și exteriorul figurii obținute, prin transformarea topologică a circumferinței, sunt, din punct de vedere topologic, la fel cu interiorul și exteriorul circumferinței nedeformate. Cu alte cuvinte, interiorul și exteriorul figurii deformate se pot obține printr'o deformare fără tăieturi și

lipituri a interiorului, respectiv a exteriorului circumferinţei.

Cu totul altfel stau lucrurile în cazul spaţiului. Se poate deforma fără tăieturi şi lipituri o suprafaţă de sferă, aşa fel încât exteriorul, adică porţiunea nemărginită a spaţiului, limitată de noua figură, să difere în mod esenţial, din punct de vedere topologic, de locul punctelor situate la distanţă superioară razei, de centrul sferei.

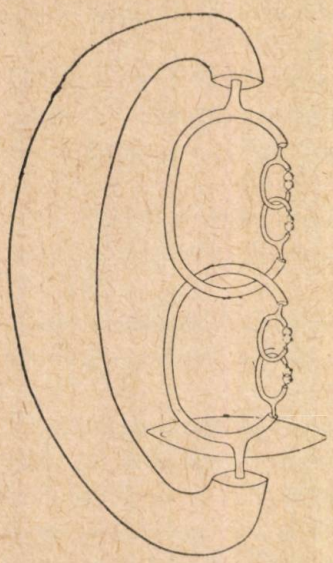


Fig. 10

In exemplul considerat în fig. 10, se constată că anumite curbe închise, C de pildă, conţinute în exteriorul figurii, nu se pot strânge până la reducerea lor la un punct fără a atinge figura considerată. Pentru o suprafaţă de sferă e însă vizibil, că orice curbă închisă, situată în exteriorul sferei, se poate strânge până la un punct, fără a atinge sfera. Spunem că exteriorul sferei obişnuite e simplu conex, iar exteriorul figurii 10 nu e simplu conex.

Exemplul din fig. 10 datează din anul 1924. Deşi era sigur că exteriorul nu e simplu conex,

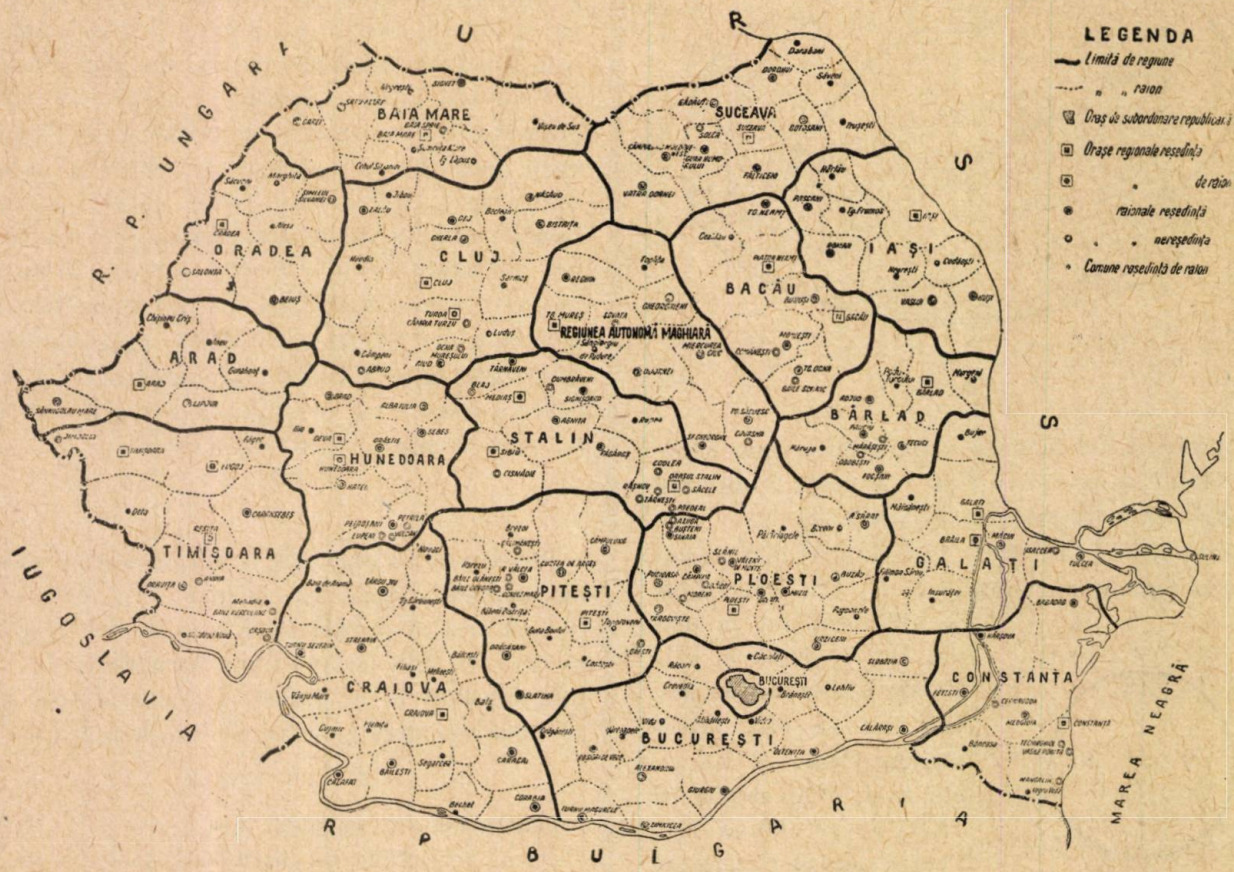


Fig. 9. (Harta RPR cu împărţirea în raioane)

acest fapt a fost demonstrat complect abia în 1947. In legătură cu acest exemplu, menţionăm următoarea problemă, încă nerezolvată. Dacă figura obţinută prin transformarea topologică a sferei are plan tangent în toate punctele, exteriorul e simplu conex? Se vede că exemplul din fig. 10 nu are plan tangent în punctele unde figura se condensează.

5.

O problemă centrală a topologiei spaţiului o constitue problema nodurilor. Când se poate transforma, fără tăietură, un nod într'un altul? Ce înseamnă din punct de vedere matematic riguros, că o curbă face un nod?

Să considerăm de pildă, în spaţiu, o circumferinţă şi curba din fig. 11.

Ambele pot fi realizate cu ajutorul unui fir sudat la capetele sale. Totuşi, e ceva care deosebeşte curba din fig. 11 de o circumferinţă obişnuită. Nu putem transforma fig. 11 într'o circumferinţă fără a o tăia şi apoi a o lipi.

Ceeace deosebeşte fig. 11 de o circumferinţă e modul în care ea e situată în spaţiu. Noţiunea de nod necesită însă, o serioasă precizare matematică; odată precizată noţiunea, se poate demonstra riguros matematic, că fig. 11 nu se poate desnoda, adică nu se poate modifica fără a o tăia, astfel încât să obţinem o circumferinţă obişnuită.

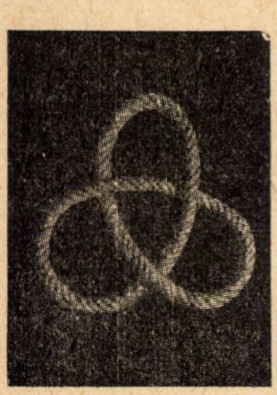


Fig. 11

Ce deosebeşte fig. 11 de fig. 12? Se poate transforma fără tăieturi una în cealaltă? Care e sensul precis matematic al noţiunii de înlănţuire, de înlănţuire multiplă? Ce deosebeşte fig. 13 de fig. 14?

Iată o serie de probleme a căror elucidare constitue una din sarcinile topologiei.

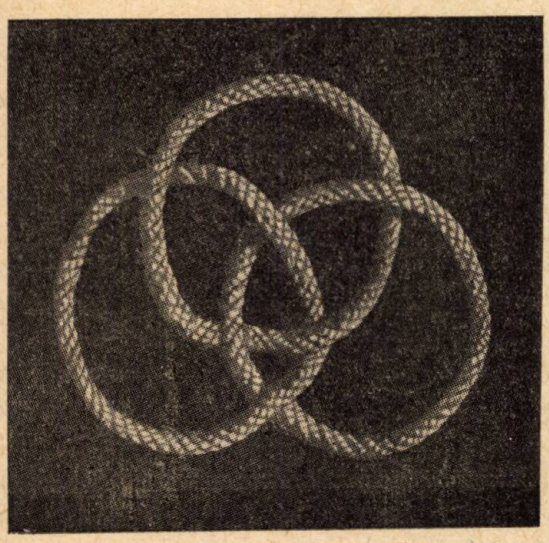


Fig. 12

Aceste probleme isvorăsc evident din necesitatea unei cunoaşteri aprofundate a spaţiului. Rezolvarea lor aduce însă, de cele mai multe ori servicii în ramuri cu totul diferite ale matematicii.

Fig. 13

Fig. 14

Topologia spaţiului studiază şi o serie de probleme relative la suprafeţe. Torul de pildă, adică colacul de salvare, e o suprafaţă importantă în Topologie (fig. 15).

Ce deosebeşte un tor de o sferă? Ce înseamnă că torul are o gaură? Ce asemănări şi deosebiri există între un tor obişnuit (fig. 15) şi un tor cu două găuri (fig. 16)?

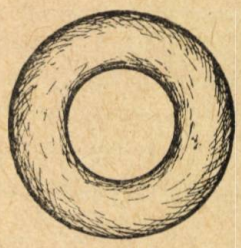


Fig. 15

Suntem obişnuiţi să credem că o suprafaţă are totdeauna două feţe: una ce se poate colora în alb, cealaltă în roşu. Aşa se întâmplă pentru o sferă, pentru un tor, pentru un tor cu mai multe găuri. Există însă, suprafeţe ce nu au această pro-

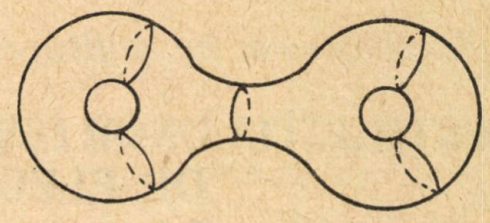
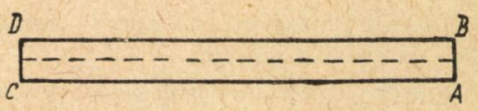


Fig. 16

prietate. Să luăm de pildă un dreptunghi de hârtie şi să lipim două muchii AB şi CD ale sale, aşa fel încât A să vie în D şi B în C (fig. 17).



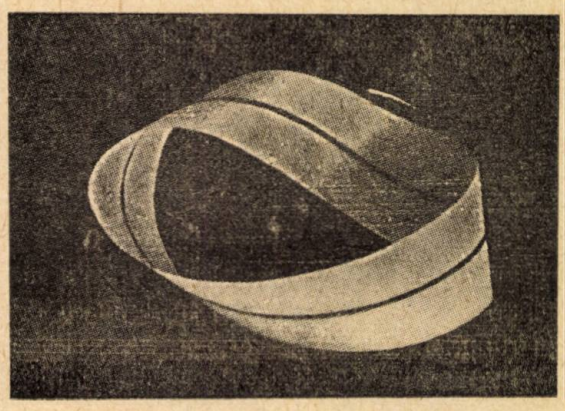


Fig. 17

Dacă ne plimbăm cu o pensulă pe suprafaţa obişnuită constatăm că o vopsim toată cu aceeaşi culoare, fără a trece prin curba frontieră care o delimitează. Suprafaţa obişnuită poartă numele de banda lui M ö b i u s; ea diferă de suprafaţa laterală a unui cilindru prin aceea că orice curbă închisă situată pe cilindru îl taie în două bucăţi, pe când curba de pe banda lui M ö b i u s ce provine dintr'o paralelă la muchia AC din dreptunghi, nu taie banda.

6.

Exemplele analizate mai sus arată bogăţia fenomenelor geometrice al căror studiu cade în sarcina Topologiei. Topologia astăzi, nu este o colecţie de fapte curioase, o colecţie de exemple disparate. Matematicienii sec. XX, şcoala sovietică în primul rând, au desvoltat Topologia într'o măsură nebănuită, au extins rezultatele ei intuitive la spaţii cu mai multe dimensiuni, au aplicat rezultatele ei la rezolvarea unor probleme ce în aparenţă nu aveau nicio legătură cu geometria.

Deşi încă în plină desvoltare, se poate spune că Topologia este astăzi una din ramurile cele mai bine închegate şi armonios desvoltate din întreaga matematică, iar câmpul ei de aplicaţii se extinde din ce în ce mai mult.

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

Să construim cu mijloace proprii modele şi aparate de fizică

CONSTRUCŢIA UNOR DISPOZITIVE PENTRU EXPERIENŢE DE ELECTROMAGNETISM

DUPĂ UN ARTICOL AL LUI A. I. GLAZÂRIN (MOSCOVA) DIN FIZICA IN ŞCOALĂ Nr. 3—1953

Verificările clasice ale fenomenelor: « Mişcarea unui curent mobil într'un câmp magnetic » şi « Producerea curentului de inducţie », se pot despărţi în patru grupe de experienţe.

1. Experienţe ilustrând mişcarea curentului mobil într'un câmp magnetic.

2. Experienţe ilustrând principiul construcţiei şi funcţionării electromotorului cu curent continuu.

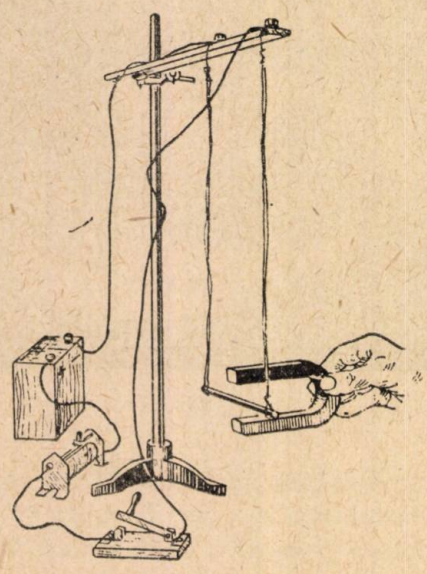


Fig. 1

3. Experienţe ilustrând producerea curenţilor de inducţie.

4. Experienţe ilustrând principiul construcţiei şi funcţionării generatorilor de curenţi continui şi alternativi.

Pentru efectuarea primei grupe de experienţe există diferite dispozitive, dintre care cele mai simple de construit cu mijloace proprii sunt următoarele:

Dispozitivul 1. Pe o placă de lemn cu o lungime de 200 mm cu secţiunea transversală de 10 mm × 20 mm, se montează două borne la o distanţă de 100 mm una de alta. De fiecare bornă se leagă capătul unui fascicol subţire de fire metalice răsucite cu o lungime de 300 mm — 400 mm fiecare. Capetele libere ale fascicolului de fire sunt prevăzute cu cârlige nu prea mari din sârmă de aramă. De aceste cârlige se poate agăţa o bucată de sârmă de aluminiu de 60 mm şi cu secţiunea de 1 mm². (fig. 1).

Dispozitivul 2. Pe o placă de lemn de mărimea indicată se montează o bornă de care este legat capătul unui fascicol de fire (de beteală) cu o lungime de 400 mm. La celălalt capăt al firului se ataşează o sârmă izolată şi moale, cu o lungime de 300 mm — 400 mm (fig. 2).

Pentru efectuarea grupelor 2 şi 4 de experienţe, se foloseşte adesea dispozitivul industrial alcătuit dintr'un solenoid ce se roteşte într'un câmp magnetic. Mai jos, vom descrie un dispozitiv ce se poate confecţiona cu mijloace proprii şi care poate înlocui în bună măsură, dispozitivele industriale.

Dispozitivul 3. Acest dispozitiv care permite experimentarea principiului de funcţionare a unui electromotor cu curent continuu şi a unui dinam, se construeşte în felul următor:

Pe suportul de lemn *a* se fixează o placă verticală *b* cu axa *c* dispusă orizontal (fig. 3). Pe axă se aşează cadrul *d* cu bobinaj din sârmă izolată; capetele sârmei, după cum vom vedea în cele ce urmează, sunt unite cu cele 2 inele pentru curent alternativ *e* şi cu colectorul de curent continuu *f*.

De ambele părţi ale bobinajului la inele şi la colector, este ataşat un disc *g* având un mâner lateral folosit pentru învârtirea cadrului.

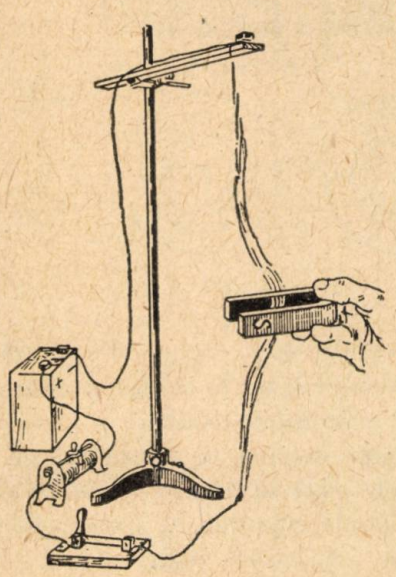


Fig. 2

Pe suportul dispozitivului sunt fixate nişte cârlige *h* pe care sunt aşezate direct periuţele *i* ce se apropie de colector sau de inele prin greutatea barelor *j*. Axa pentru periuţe se uneşte cu bornele *l* prin plăci metalice.

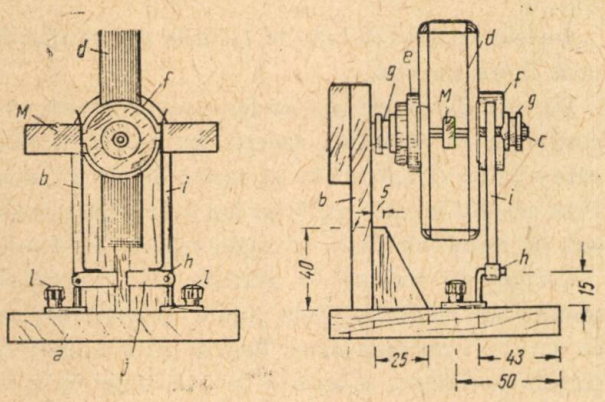


Fig. 3

Pe axă, în afară de cadru, se poate aşeza orizontal o bară de fier *M*.

Confecţionarea aparatului. Suportul dispozitivului se face din placaj cu grosimea de 9 mm — 12 mm, cu dimensiunile de 118 mm × 120 mm.

Pe suport se face o scobitură cu secţiunea dreptunghiulară având dimensiunile 9 mm × 30 mm la o distanţă de 15 mm până la marginea suportului (fig. 4).

Din placaj, cu grosimea de 9 mm se confecţionează o placă verticală de 40 mm grosime şi de 109 mm înălţime, ce urmează a fi îmbinată cu suportul dispozitivului. Partea de sus a acestei plăci este semicirculară. In partea de jos a ei se află un cui de metal ce intră adânc în scobitura suportului. In spatele plăcii verticale, se fixează un disc cu diametrul de 40 mm şi cu grosimea de 9 mm. Din sârmă de oţel cu diametrul de 3 mm — 4 mm, se face o axă cu lungimea de 106 mm.

La 18 mm dela un capăt se sudează de ax un inel de sârmă cu diametrul de 1,5 mm. La 4 mm şi la 45 mm de celălalt capăt, se fac în axă 2 găuri cu diametrul de 1,5 mm.

In centrul discului se perforează o deschidere perfect perpendiculară pe suprafaţa plăcii verticale; în această deschidere se fixează solid, capătul axei.

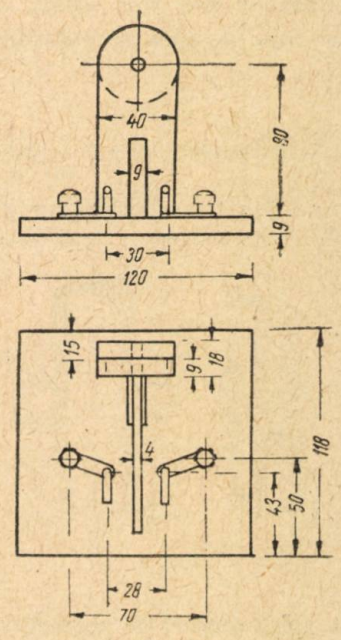


Fig. 4

Din sârmă de alamă cu diametrul de 2 mm se fac două cârlige formate fiecare din 2 braţe aşezate în unghiu drept cu lungimile de 20 mm, respectiv de 25 mm. Braţele de 25 mm se bat adânc în suport ca în fig. 4. Inainte de montarea cârligelor, se fixează în suport 2 borne dedesubtul cărora sunt aşezate 2 plăci metalice dreptunghiulare cu dimensiunile de 6 mm × 38 mm, cu găuri la capete. Plăcile acestea servesc la stabilirea contactului între cârlige şi borne. Cârligele şi pivoturile bornelor se sudează de plăci.

Pe axă se aşează cadrul *d* (fig. 5). Cadrul *d* se confecţionează astfel: din alamă sau alt metal

nemagnetic se taie placa desenată în fig. 5. Pe placă se sfredelesc 2 găuri cu diametrul de 5 mm — 6 mm şi 4 găuri cu diametrul mai mic (fig. 5 A). Placa se îndoaie după liniile marcate pe verticală şi se obţine un cadru cu marginile şi cu cele 4 segmente arcuite prevăzute cu câte un orificiu fiecare, desdoite. Capetele cadrului se unesc prin lipire, lipitura fiind cât mai uşoară (fig. 5 B).

In vederea bobinării cadrul se aşează pe o bucată de sârmă cu grosimea de 5 mm — 6 mm. Pe capetele sârmei ce ies în afară se aşează nişte tuburi mici de cauciuc sau de carton cu pereţii de 1,5 mm — 2 mm grosime. Se face apoi bobinajul cadrului cu sârmă de aramă izolată cu diametrul de 0,4 mm — 0,5 mm. Spirele se aşează des una lângă alta, strat lângă strat, până ce tot jghiabul cadrului va fi umplut cu sârmă (fig. 5 C). Inceputul sârmei N_1 cu lungimea de 35 mm se lasă liber în apropierea unui segment arcuit al plăcii cadrului, iar la întoarcerea spirei pe partea opusă a cadrului se lasă din sârmă o buclă N_2 lungă de 50 mm şi apoi se continuă bobinajul (fig. 5 D).

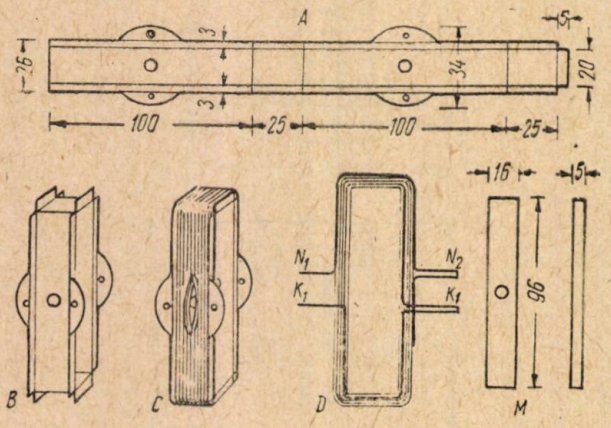


Fig. 5

Pe ultima spiră alături de segment, se lasă o a doua buclă K_2 şi apoi, la întoarcerea spirei pe partea opusă, se lasă liber capătul sârmei K_1 cu lungimea de 35 mm. Bobinajul astfel executat se ţine fix cu ajutorul unui lac special cu care se acoperă stratul exterior al bobinajului precum şi cavitatea deschiderii din ax.

Capetele bobinajului N_1, K_1, N_2, K_2 se curăţă de izolaţie, iar buclele N_2 şi K_2 nu se taie.

Din lemn de esenţă tare se taie un corp cu discuri ca în fig. 6. Suprafaţa cilindrică a discului cu diametrul mare (colectorul *f*) se acoperă cu două semi-inele cilindrice de alamă cu grosimea de 0,3 mm — 0,5 mm şi cu lăţimea de 12 mm. Intre capetele acestor semi-inele se lasă o distanţă de 4 mm.

Tot din alamă se taie un inel plat cu diametrul exterior de 28 mm şi interior de 18 mm. Inelul se taie în două jumătăţi şi se înlătură o bucată de 4 mm grosime. De marginea semi-inelului cilindric îndreptată spre cadru se sudează capătul N_1 al bobinajului, iar la celălalt semi-inel capătul K_2. Apoi, semi-inelele cilindrice şi plate se fixează pe suprafaţa discului cu diametrul de 28 mm. Semi-inelele plate se fixează pe disc prin cuişoare, iar semi-inelele cilindrice se fixează pe disc prin sudare de semi-inelele plate.

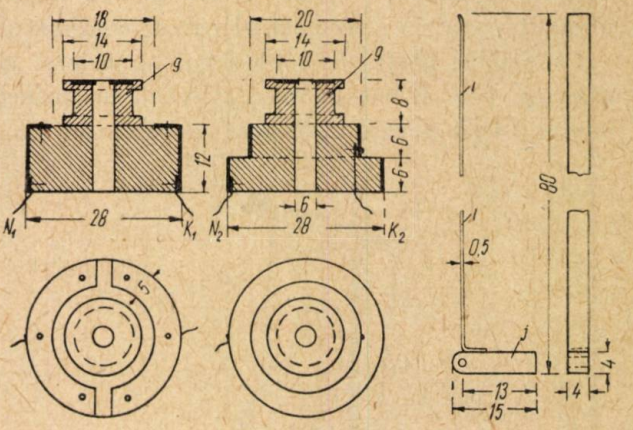


Fig. 6

Pentru celelalte discuri *e* se fac două inele cilindrice din tablă de alamă cu grosimea de 0,3 mm — 0,5 mm şi cu lăţimea de 6 mm.

Capătul bobinajului K_2 se trece printr'o deschizătură prin disc şi se sudează de partea interioară a inelului mai mic, iar capătul bobinajului N_2 se sudează de partea interioară a inelului mare. (fig. 6).

Inelele se fixează bine la locurile lor pe discuri prin lipire cu clei.

Pe una din feţele perpendiculare pe ax ale discurilor *g*, în scobituri special făcute, se fixează câte o şaibă din alamă cu grosimea de circa 1 mm. Prin centrul acestor şaibe se fac deschideri pentru axă de formă circulară cu diametrul de 3—4 mm.

Corpul de discuri se fixează de segmentele arcuite ale cadrului prin lipire şi suplimentar, cu şuruburi nu prea mari. Cadrul prins solidar cu corpul de discuri, se aşează pe axă astfel ca el să se rotească foarte uşor. Pe axă se sprijină doar marginile celor două şaibe de alamă. Discurile, bobinajul şi cadrul nu trebue să atingă axul. Deoarece fără o stabilire minuţioasă a echilibrului dispozitivul nu va putea funcţiona, cadrul va trebui să fie pus într'un echilibru indiferent.

Din tablă de fier moale sau dintr'o vergea mică din acelaş material, cu secţiunea laterală de 1 cm — 2 cm se confecţionează o bară *M* cu lungimea

de 96 mm. Prin mijlocul barei se face o deschidere prin care va trece axul dispozitivului şi perpendicular, o altă deschidere, care se încrucişează cu prima şi care corespunde cu deschiderea făcută prin axul aparatului la depărtarea de 45 mm de capăt.

Această bară servind drept miez magnetic, se aşează pe axul aparatului într'o poziţie orizontală printr'o agrafă de sârmă. Capetele barei trebue să se apropie cât mai mult de cadru, fără ca prin aceasta să-l atingă.

Din alamă, cu grosimea de 0,2 mm—0,3 mm, se taie două fâşii dreptunghiulare cu dimensiunile de 85 mm × 4 mm pentru periuţele *i*. Un capăt al fâşiei se îndoaie puţin, iar celălalt se îndoaie cu 5 mm sub un unghi drept şi se sudează de o bară *j* de dimensiunile 4 mm×4 mm×15 mm (fig. 6).

La capătul barei se face o deschidere pentru axul cârligului *h*.

Periuţele confecţionate se aşează pe cârlige; barele *j*, prin greutăţile lor, alipesc periuţele de inelele semicilindrice ale colectorului *f* sau de inelele de pe discul *e*.

Pentru asigurarea unui contact electric suficient la o frecare minimă, se schimbă prin încercări greutatea barelor adăugând la capetele libere greutăţi mici (călăreţi).

Pentru a opri deplasarea periuţelor în lungul axelor cârligelor, prin capetele acestora se fac nişte deschideri pentru agrafe de sârmă. Cadrul dispozitivului bine aşezat, trebue să se rotească atunci când dăm drumul prin el unui curent de 4 Volţi tensiune, într'un câmp magnetic format de doi magneţi lineari.

Pentru aşezarea magneţilor se fac două suporturi de lemn cu dimensiunile de 120 mm × 50 mm × 20 mm.

Dispozitivul 4. Pentru a arăta formarea curenţilor de inducţie se face uz deobicei, de două bobine ce intră una în alta (una cu miez de fier), de magneţi lineari şi de galvanometre universale. In lipsa unor asemenea dispozitive, experienţele se pot face cu bobine confecţionate cu mijloace proprii.

Aceste bobine se fac din sârmă de aramă izolată cu diametrul de 0,5 mm — 0,6 mm. Cilindrul necesar pentru bobinaj se modelează astfel încât în interiorul bobinei să poată intra uşor un magnet linear sau o parte a unui magnet în formă de potcoavă. Numărul spirelor (câteva sute) se determină pe cale experimentală, astfel ca acul galvanometrului să devieze cu una sau două subdiviziuni când asupra bobinei acţionează un magnet linear. După terminarea bobinării se scoate cilindrul din bobină, iar spirele interioare şi exterioare se acoperă cu şerlac şi eventual se înfăşoară cu aţă. Capetele sârmei de o lungime de 250 mm se aşează astfel încât să se poată stabili direcţia în care s'a făcut bobinajul.

Vom descrie pe scurt, experienţele cu dispozitivele astfel construite.

Mişcarea curentului electric într'un câmp magnetic

Experienţa 1. Placa de lemn prevăzută cu borne din dispozitivul 1, se fixează în ghiara suportului la o anumită înălţime încât capetele inferioare ale mănunchiului de fire să se găsească deasupra mesei la 15 cm — 20 cm. (fig. 1). De cârlige se agaţă o bucată de sârmă de aluminiu. Se face legătura prin borne cu un acumulator de 4 V; în lungul circuitului se introduce un reostat cu cursor şi un întrerupător.

Fără a închide circuitul electric, se apropie de dispozitiv un magnet în formă de potcoavă, astfel ca bara de aluminiu să se găsească între polii magnetului. Deschizând curentul se observă că firele împreună cu bara de aluminiu, se depărtează. Această respingere este cu atât mai puternică cu cât intensitatea curentului este mai mare. Cunoscând direcţia curentului şi a câmpului magnetic se stabileşte regula mâinii stângi.

Experienţa 2. Această experienţă este asemănătoare celei precedente. Placa de lemn prevăzută cu bornă din dispozitivul 2 se fixează orizontal în ghiara suportului la o anumită înălţime încât capătul inferior al fascicolului (firului) să se afle pe masă (fig. 2). De bornă se leagă un pol al acumulatorului de 4. V. Celălalt pol al acumulatorului se leagă prin reostat şi întrerupător de capătul inferior al firului.

Rotirea cadrului mobil într'un câmp magnetic

Pe axul dispozitivului 3, se aşează cadrul cu inelele *e* în faţă (la aşezarea sau scoatereă cadrului de pe ax periuţele se dau într'o parte). Periuţele se aşează pe inele astfel ca, un inel să fie legat cu începutul bobinajului cadrului, iar celălalt cu sfârşitul bobinajului.

Se leagă bornele la un acumulator de 4 V — 6 V (în circuit se poate introduce şi un reostat).

De bobinaj se apropie lateral doi magneţi lineari cu poli diferiţi care pot fi fixaţi pe cele două suporturi de lemn arătate, ca în fig. 7.

Cadrul aşezat orizontal se mişcă într'o parte dar nu se roteşte.

Dacă se produce cu mâna o rotire de 180° a cadrului, cadrul se va înclina, fără a se roti, în partea opusă; Se înţelege dece nu s'a produs rotirea.

Dacă schimbăm direcţia curentului în bobinaj, atunci deviaţia se produce în partea opusă, conform regulii mâinii stângi.

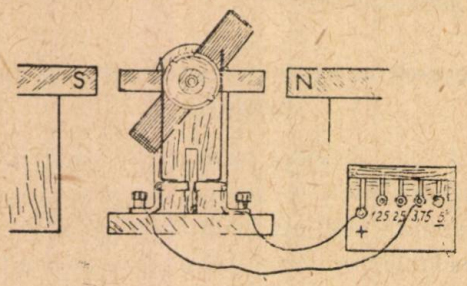


Fig. 7

Aşezăm acum cadrul *d* pe ax cu colectorul *f* în faţă. Se pun în contact periuţele cu cele 2 semiinele cilindrice aflate pe disc. Cadrul intră într'o rotaţie continuă. Se lămureşte sensul rotirii cadrului la schimbarea polilor magneţilor sau la schimbarea direcţiei curentului ce trece prin cadru. Se observă mărirea vitezei de rotaţie a cadrului când se lasă să treacă un curent mai puternic sau când se folosesc magneţi mult mai puternici (sau electromagneţi).

Se aşează pe ax bara de fier *M* în poziţie orizontală. De data aceasta cadrul se roteşte mult mai repede, ceeace arată importanţa unui miez magnetic de fier.

Prin această experienţă se explică astfel, principiul construcţiei şi funcţionării electromotorului cu curent continuu.

După această experienţă, ne putem explica uşor cum funcţionează un electromotor de 4V—5V.

Obţinerea curenţilor de inducţie

Capetele sârmei înfăşurate pe bobina făcută cu mijloace proprii se leagă de bornele unui galvanometru universal şi se arată prin metoda obişnuită condiţiile de apariţie a curenţilor de inducţie.

Pentru ilustrarea regulii mâinii drepte se foloseşte magnetul în formă de potcoavă.

In interiorul bobinei se introduce unul din capetele magnetului astfel încât partea bobinei cu capătul sârmei întors, să se găsească între poli. Găsind direcţia câmpului magnetic şi direcţia mişcării curentului într'un câmp magnetic, se stabileşte regula mâinii drepte (direcţia devierii acului galvanometrului se poate controla introducând un acumulator în circuitul galvanometrului cu o rezistenţă suplimentară).

Principiul construcţiei şi funcţionării generatorilor cu curent alternativ şi continuu

Cadrul cu miez de fier se aşează pe ax cu cele două inele în faţă. Se leagă bornele aparatului la un galvanometru. La o rotire lentă a cadrului în câmpul magnetic se observă mici deviaţii ale acului galvanometrului când într'o parte când într'alta. Pentru a roti cadrul cu o viteză mai mare se înfăşoară o sfoară pe discul din apropierea plăcii verticale şi se trage puternic de sfoară.

Aşezăm acum cadrul cu miezul de fier pe ax, având discul cu semiinelele cilindrice în faţă. La rotirea cadrului acul galvanometrului deviază cu atât mai mult cu cât rotim cadrul mai repede (fig. 8).

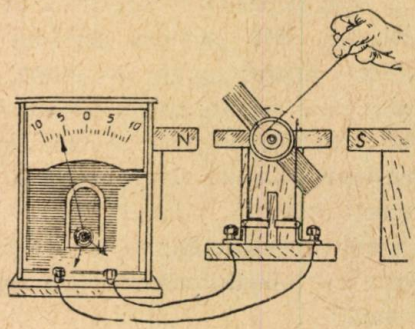


Fig. 8

Dacă înlocuim magneţii cu alţii mai puternici sau cu electromagneţi, atunci în cadru se va naşte un curent mai puternic.

NOUTĂȚI DIN ȘTIINȚA ȘI TEHNICA SOVIETICĂ

NOI TRACTOARE BELORUSE

Colectivul din Minsc al uzinei de tractoare a elaborat un nou tractor universal pe roți « Belorus » (fig. 1).

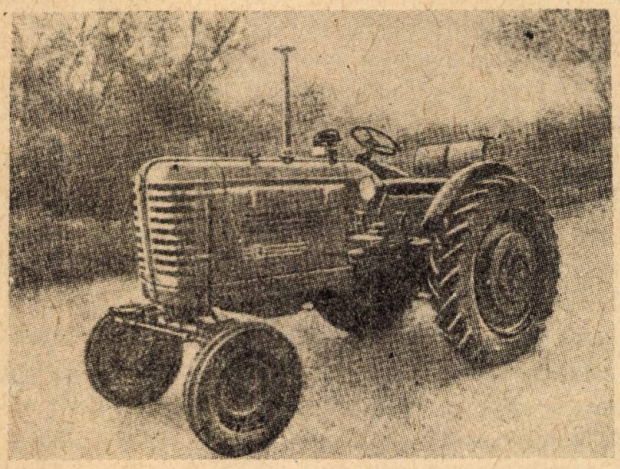


Fig. 1

El este destinat lucrărilor agricole: arat, grăpat semănat și prelucrării între rânduri a culturilor (bumbac, floarea soarelui, sfeclă, cartofi și altele).

Tractorul « Belorus » poate fi folosit pentru transportarea diferitelor mașini agricole ca treierătoare, secerătoare etc.

Tractorul « Belorus » de tipul MTZ-1 are o pârtie îngustă între roțile din față, iar tractorul MTZ-2 una lungă. La tractorul MTZ-1 lungimea pârtiei din față este în total de 220 mm, ceeace permite efectuarea lucrărilor între straturi foarte înguste.

Lungimea pârtiei din spate poate varia între 1,2—1,8 m și se fixează după condițiile lucrării; la tractorul MTZ-2 poate fi variată și lungimea pârtiei din față.

Tractorul este înzestrat cu roți cu cauciucuri și la nevoie, roțile de oțel din spate pot fi fixate cu pinteni. Pentru îmbunătățirea proprietăților de cuplare, cauciucurile din spate sunt umplute cu apă (până la 250 l).

Tractorul se pune în mișcare cu un motor cu 4 cilindri în 4 timpi D-35 cu aprindere prin comprimare.

Capacitatea acestui motor eftin și la îndemână, acționând cu un combustibil disselian eftin, este de 37 litri.

O însușire caracteristică a tractorului « Belorus » constă în aceea că mecanismul de manevrare este dispus în legătură cu axa longitudinală (de transmisie) a tractorului (ca la automobil).

Astfel se realizează pentru tractorist cea mai bună vizibilitate a axelor între straturile culturilor agricole.

Cutia de viteze permite obținerea vitezelor: 4,6; 5,65; 6,04; 6,93; și 12,2 km/oră. Corespunzătoare acestor viteze se pot obține și forțele de tracțiune (pe mirişte): 1400; 1200; 1100; 900; 450 kg. Lungimea tractorului este de 3,7 m, lățimea de 1,9 m, înălțimea la radiator de 1,6 m, greutatea cu încărcătură pe roțile din spate 3100—3200 kg.

Indelungatele experiențe făcute cu tractoarele « Belorus » în diferite condiții climaterice pe diferite terenuri cu diferite mașini agricole (pluguri cu 3 brazde, cultivator, grapă, extractor de sfeclă etc...) arată buna și ușoara mânuire a tractorului și siguranța în lucru.

Tractoarele « Belorus » prin calitățile lor tehnice și dinamice răspund cerințelor gospodăriei agricole.

Fabricarea acestor tractoare va permite mecanizarea și mai mult a lucrărilor dificile în prelucrarea între rânduri a culturilor.

ELECTROMOTOARE PUTERNICE

Industria națională fabrică pentru marile construcții ale comunismului mașini și mecanisme de o capacitate de producție nemaivăzută.

Pentru pornire trebue motoare electrice de o capacitate mare. In ultimul timp constructorii sovietici au creiat electromotoare de curent alternativ cu o capacitate de 4400 kilowați și o tensiune de 6000 și 10000 volți.

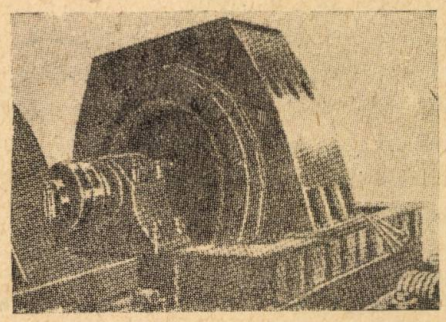


Fig. 2

Electromotorul asincron DAP-260 (fig. 3) așezat pe un postament terestru mobil pune în mișcare o pompă centrifugă cu o producție de 10—12 mii m^3 pe oră.

La partea sudată a statorului se anexează partea lui activă *) formată din 27 mii segmente stanțate

*) Partea activă a statorului este acea parte a mașinii care apare ca izvor al energiei electrice.

dintr'un oţel electrotehnic. Diametrul părţii active a statorului este de 2,6 m (fig. 3).

Bobinajul din sârmă de aramă cu secţiunea de 10 mm² format din câteva sute de straturi duble izolate pentru o sarcină de lucru de 6 mii volţi se aşează în orificiile părţii active a maşinii.

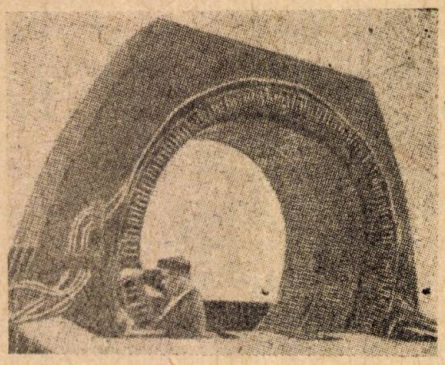


Fig. 3

Pentru fabricarea în întregime numai a unei bobine a statorului se consumă mai mult de 10 km sârmă. Lungimea rotorului e cam de 1 m, iar diametrul mai mare de 2 m.

Partea activă a rotorului — (inima) — se formează prin presarea a câteva zeci de mii de segmenţi ştanţaţi cu orificii pentru bobinaj.

Pe axul rotorului sunt aşezate deasemeni trei inele de aramă pentru contacte cu diametre de 80 cm.

Mărirea distanţei dintre — inima — fixă a statorului şi rotorul mobil trebue să fie numai de 3 mm; o abatere dela această mărime chiar cu o zecime provoacă supraîncălzirea bobinelor şi chiar oprirea din lucru *).

Construcţia specială a maşinii asigură constanţa spaţiului antrefer, şi siguranţa în lucru.

Motorul DAP-260 are o ventilaţie proprie.

Rotorul rotindu-se absoarbe aerul care trecând prin canale speciale în stator răceşte oţelul şi bobinele.

*) Este interesant de ştiut că o abatere chiar de 0,3 mm dela acest spaţiu provoacă atracţii laterale ale rotorului de către stator cu o forţă de aproape 10 t.

Aerul încălzit se elimină prin orificii în corpul statorului.

Electromotorul la o tensiune de 6000 volţi face 297 turaţii pe minut. Reglarea vitezei de rotaţie a motorului o face un reostat special format din câteva sute de rezistenţe cu greutatea generală cam de 8 t. Acest reostat poate consuma până la 600 kilowaţi tensiune şi să reducă totodată numărul turaţiilor la 240 pe minut.

Greutatea generală a electromotorului este de 55 t. Înălţimea motorului de 3,45 m, lungimea 5,9 m, lăţimea 5,9 m.

Al doilea tip de motor cu ax vertical VDS-325 pune în mişcare un agregat de pompe centrifugale cu o capacitate de 15 m³ de apă pe secundă. Aceste motoare fiind calculate pentru o tensiune de 10 mii volţi, bobinele lor de înaltă tensiune cer o izolare perfectă. Dacă întreaga bandă izolatoare cheltuită pentru izolarea statorului am reprezenta-o de exemplu ca o dreaptă cu o lăţime de 2 cm atunci lungimea ei va fi de 42 km. Motorul VDS-325 are un ciclu închis de ventilaţii. Aerul încălzit parcurgând nişte răcitoare cu apă pătrunde din nou în interiorul maşinii şi elimină căldura dela bobinajul statorului şi rotorului şi apoi pătrunde iar în răcitoarele cu apă, etc.

Ciclul închis de ventilaţii apără maşina de murdărie. Acţionarea maşinilor de supratensiune VDS-325 şi mânuirea lor sunt complect automatizate.

Releuri speciale supraveghează temperatura lagărelor maşinii, nivelul uleiului în baia lagărului, numărul turaţiilor rotorului. Coeficientul randamentului util al electromotorului este de 96%, diametrul corpului statorului atinge 4 m, înălţimea maşinii 5,5 m.; greutatea 53,5 t; numărul turaţiilor 250 pe minut. Creearea de electromotoare de putere mică şi perfect construite cu un indice tehnico-economic ridicat reprezintă o realizare uriaşă a construcţiei sovietice de electromaşini şi dovedesc înaltul ei nivel tehnic.

Noile maşini lucrează fără întrerupere la marile construcţii ale comunismului.

CHESTIUNI DE EXAMEN

DATE LA ADMITERE IN FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ. BUCUREŞTI LA 25 AUGUST 1953

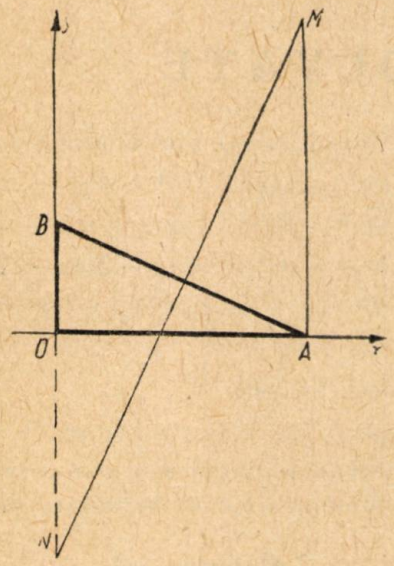
Grupa I-a

1084. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\sqrt{7x - \sqrt{x^2 + 21}} = 3.$$

* * *

1085. Se consideră un triunghi dreptunghic AOB cu catetele $OA = a$, $OB = b$, aşezate pe axele Ox şi Oy. Mediatoarea ipotenuzei taie dreapta OB în N şi paralela dusă prin A la OB în M.



a) Să se calculeze distanţa AM în funcţie de catetele a şi b.

b) Să se calculeze ON.

c) Dacă punctul B rămâne fix iar A descrie semidreapta Ox cu viteză uniformă, ce mişcare are punctul N pe axa Oy?

d) Ce curbă descrie punctul M când A e variabil pe Ox? (Se ţine seama de expresia lui $y = AM$ ca funcţie de $x = OA$).

* * *

Grupa II-a

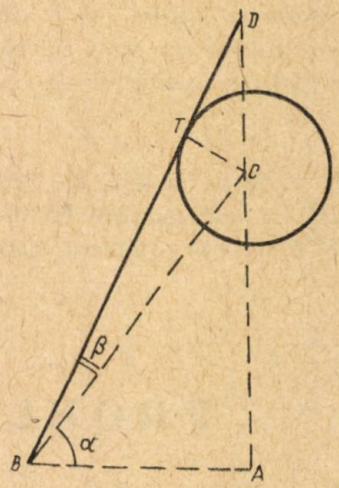
1086. Se dă: $AB = 3\,dm$, $AC = 8\,dm$, raza cercului $C = 1\,dm$, $\sphericalangle A = 90°$, BD tangentă la cerc (vezi figura).

a) Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ şi, cu ajutorul lor, $tg\ (\alpha + \beta)$.

b) Să se calculeze AD, trigonometric, prin algebră şi geometrie.

c) Prin rotirea cercului şi a segmentului BD în jurul axei AD ia naştere o sferă şi un con.

Presupunând că sfera este un glob luminos iar conul un abajur opac şi ştiind că vârful conului este la 5 m. de pământ, să se afle raza cercului de lumină de pe pământ şi raza cercului de penumbră



(punctele din care se vede numai o parte din glob).

* * *

CHESTIUNI DATE LA ADMITEREA IN FACULTATEA DE FIZICO-MATEMATICI SECŢIA SERALĂ. BUCUREŞTI 10 SEPTEMBRIE 1953

Grupa I-a

1087. *a)* Se dau două cercuri egale de centre O şi O' aşa fel că centrul unuia din cercuri să se afle pe celălalt cerc. Ştiind că raza fiecăruia este de 20 metri să se afle aria înscrisă între cercuri.

b) Să se rezolve inecuaţia:

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x}{x+1} < 1$$

c) Să se rezolve ecuaţia trigonometrică:

$$\cos x - \sin x = -\sqrt{2}.$$

Grupa II-a

1088. *a)* Se dă triunghiul dreptunghic ABC în care se cunoaşte latura $c = 8$ cm şi proiecţia laturei c pe ipotenuză $= 6{,}4$ cm. Se cere volumul generat de rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei.

b) Să se rezolve ecuaţia:

$$7^{2+3x} - 5^{4x+1} = 5^{4x+1} - 7^{3x}$$

c) Două sfere au suma razelor egală cu 9 cm şi suma volumelor egală cu $324\ \pi$ cm^3.

Să se afle razele sferelor.

CHESTIUNI DATE LA ADMITEREA IN INSTITUTUL DE CONSTUCŢII. BUCUREŞTI, AUGUST 1953

1089. Intr'un semicerc de diametru $AB = 2R$ se duce o coardă CD paralelă la AB şi egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul din care face parte semicercul.

a) Să se determine pe segmentul AB un punct P, astfel ca să avem

$$PC^2 + PD^2 = l^2$$

unde l este o lungime dată. Discuţie.

b) Să se găsească poziţia lui P când unghiul $CPD = 90°$ şi în acest caz să se calculeze catetele triunghiului PCD în funcţie de R.

* * *

1090. Prin vârfurile B şi C ale unui triunghi oarecare ABC se duc paralele de direcţie arbitrară pe care o secantă arbitrară dusă prin A le taie respectiv în M şi N. Din M se duce o paralelă la latura AC şi din N o paralelă la latura AB. Să se arate că aceste paralele se întâlnesc în acelaş punct pe latura BC.

* * *

1091. Să se demonstreze dubla inegalitate

$$\frac{\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{8} > \frac{3}{8}$$

şi cu ajutorul ei să se calculeze $\sin\frac{\pi}{8}$ cu o zecimală exactă.

* * *

PROBLEME REZOLVATE

Problema 718

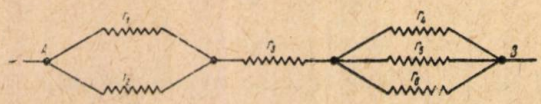
In schema de mai jos să se afle intensitatea curentului în fiecare derivaţie (vezi figura) dacă $r_1 = 3$ *ohmi,* $r_2 = 2$ *ohmi,* $r_3 = 7{,}55$ *ohmi,* $r_4 = 2$ *ohmi,* $r_5 = 5$ *ohmi,* $r_6 = 10$ *ohmi, iar* $U_{AB} = 100$ *volţi.*

* * *

Soluţie. Rezistenţa totală dintre punctele A şi B este

$$R_{AB} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r_3 + \frac{r_4 r_5 r_6}{r_4 r_5 + r_5 r_6 + r_4 r_6};$$

$$R_{AB} = 10 \text{ ohmi}$$



Deci curentul principal între A şi B este

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = 10 \text{ amperi.}$$

Prin urmare

$$i_1 = \frac{I r_2}{r_1 + r_2} = 4 \text{ amperi,}$$

$$i_2 = I - i_1 = 6 \text{ amperi,} \quad i_3 = I = 10 \text{ amperi,}$$

$$i_4 = \frac{I r_5 r_6}{r_4 r_5 + r_4 r_6 + r_5 r_6} = 6{,}25 \text{ amperi.}$$

$i_5 = 2{,}5$ amperi, $i_6 = 1{,}25$ amperi.

Problema 723

Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = m^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = n^2$, *să se arate că*

$$(bz - cy)^2 + (ay - bx)^2 + (cx - az)^2 < m^2 n^2.$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. Inmulţind relaţiile de condiţie obţinem:

$$\begin{aligned} m^2n^2 = {} & b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + \\ & + b^2x^2 + c^2x^2 - 2acxz + a^2z^2 + a^2x^2 + \\ & + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz = \\ = {} & (bz - cy)^2 + (ay - bx)^2 + (cx - az)^2 + \\ & + (ax + by + cz)^2. \end{aligned}$$

Avem deci, evident:

$$m^2n^2 > (bz - cy)^2 + (ay - bx)^2 + (cx - az)^2.$$

Inegalităţi analoage obţinem prin permutări circulare ale literelor a, b, c, în inegalitatea de mai sus.

Problema 727

Să se determine λ *astfel ca rădăcinile ecuaţiei*

$$x^4 - (3\lambda + 5)x^2 + (\lambda + 1)^2 = 0$$

să fie în progresie aritmetică.

N. I. Berianu
student, Bucureşti

Soluţie. Rădăcinile ecuaţiei bipatrate sunt două câte două egale şi de semne contrare. Progresia aritmetică pe care ele ar forma-o poate fi deci reprezentată prin $\div$; $-\alpha$; $-\beta$; β; α.

Se vede astfel uşor că numerele de mai sus formează o progresie aritmetică dacă $3\beta = \alpha$, sau

$$\alpha^2 = 9\beta^2.$$

Dar

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3\lambda + 5$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\lambda + \beta)^2.$$

Eliminând α şi β între ecuaţiile de mai sus obţinem:

$$\frac{100}{9} = \frac{(3\lambda + 5)^2}{(\lambda + \beta)^2}, \text{ de unde}$$

$$\lambda = 5 \quad ; \quad \lambda = -\frac{25}{19}.$$

Problema 736

Să se demonstreze că dacă între cifrele numărului 1331 *se scrie un număr egal de zerouri, se obține un cub perfect.*

P. Savciuc

Soluție. Avem:

$$N = 1\underbrace{0\,0\ldots0}_{n}3\underbrace{0\,0\ldots0}_{n}3\underbrace{0\,0\ldots0}_{n}1 =$$

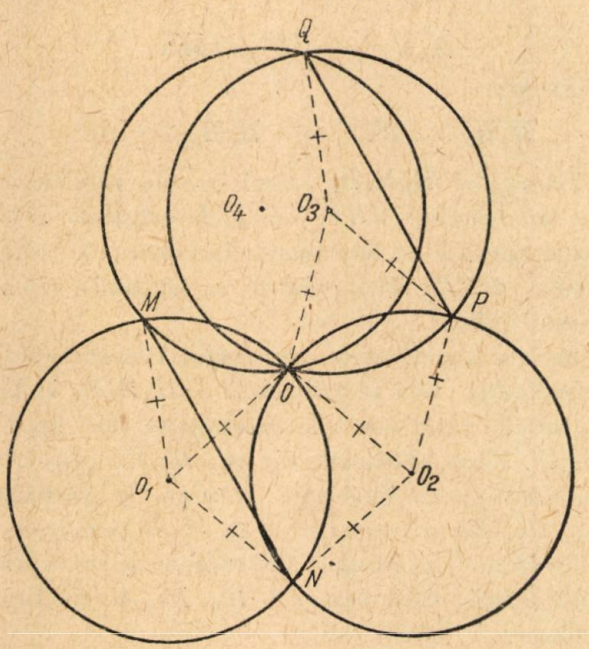
$$= 10^{3n+3} + 3\cdot10^{2n+2} + 3\cdot10^{n+1} + 1 = (10^{n+1}+1)^3$$

Problema 743

Patru cercuri egale trec prin același punct O. Notând cu M, N, P, Q, intersecțiile consecutive ale cercurilor, să se arate că aceste puncte sunt vârfurile unui paralelogram.

Matei Nazarie
elev, București

Soluție. Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele celor patru cercuri egale.



Se observă de îndată că patrulaterele O_1OO_2N și O_2OO_3P sunt romburi și ca urmare:

$$NO_1 \parallel O_2O \parallel PO_2$$

Analog $O_1M \parallel O_3Q$.

Rezultă de aici că triunghiurile isoscele NO_1M, PO_3Q sunt egale, deci că $MN \parallel = PQ$, ceea ce arată că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

Problema 749

Se dau două drepte paralele Δ_1 și Δ_2 și un punct fix A. Să se construiască un triunghi ABC cu vârful B pe Δ_1 și vârful C pe Δ_2, care să fie asemenea cu un triunghi MNP dat.

Tiberiu Weszely
elev. Tg.-Mureș

Soluție. Perpendiculara prin A pe dreptele Δ_1, Δ_2 determină pe acestea punctele $N'P'$.

Construim triunghiul $M'N'P'$ asemenea cu triunghiul dat MNP. Perpendiculara prin M' pe AM' întâlnește paralelele date în B și C.

Justificarea este evidentă: patrulaterele $AM'BN'$ și $AM'CP'$ sunt inscriptibile.

Problema are două soluții: două triunghiuri egale și simetrice față de $N'P'$.

Observare. Problema este cunoscută. Ea nu diferă de următoarea: să se construiască un triunghi cu vârfurile pe 3 paralele date, și care să fie asemenea cu un triunghi dat.

Deasemenea, ea nu este decât un caz particular al problemei 297 din Culegerea de Geometrie cl. VIII și XI-a.

Problema 752

Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi oarecare și M_1, M_2, M_3 trei puncte pe laturile triunghiului astfel că A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 sunt concurente în interiorul triunghiului.

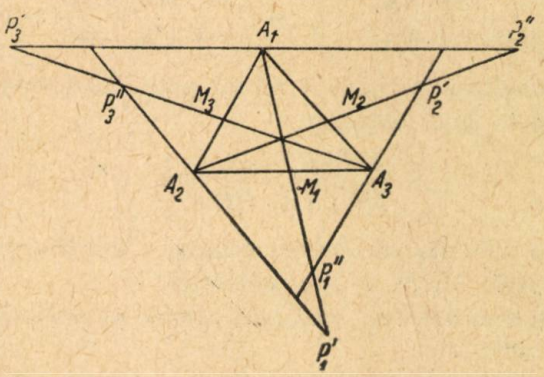
Notăm cu P_1' și P_3'' intersecțiile paralelei dusă prin A_2 la A_1A_3 cu dreptele A_1M_1 și A_3M_3. Punctele P_3' și P_2'' sunt intersecțiile paralelei dusă prin A_1 la A_2A_3 cu dreptele A_3M_3 și A_2M_2.

Punctele P_2' și P_1'' sunt intersecțiile paralelei dusă prin A_3 la A_1A_2 cu dreptele A_2M_2 și A_1M_1.

Să se stabilească:

$$P_2'A_3 \cdot P_1'A_2 \cdot P_3'A_1 = P_1''A_3 \cdot P_3''A_3 \cdot P_2''A_1 =$$
$$= A_1A_2 \cdot A_2A_3 \cdot A_3A_1.$$

Soluție. Ținând seama de asemănarea triunghiurilor:



$(A_1A_2M_2$ și $P_2'A_3M_3)$, $(A_1A_3M_1$ și $P_1A_2M_1)$;
$(A_2A_3M_3$ și $P_3'A_1M_3)$ avem respectiv relațiile:

$$(1)\quad \frac{P_2'A_3}{A_1A_2} = \frac{M_2A_3}{M_2A_1}; \qquad (2)\quad \frac{P_1'A_2}{A_1A_3} = \frac{M_1A_2}{M_1A_3};$$

$$(3)\quad \frac{P_3'A_1}{A_2A_3} = \frac{M_3A_1}{M_3A_2}.$$

Inmulţind relaţiile (1), (2), (3) şi ţinând seamă că:

$$\frac{M_2A_3}{M_2A_1}\cdot\frac{M_3A_1}{M_3A_2}\cdot\frac{M_1A_2}{M_1A_3}=1$$

obţinem:

$$P_2'A_3\cdot P_1'A_2\cdot P_3'A_2=A_1A_2\cdot A_2A_3\cdot A_3A_1$$

şi prin raţionament analog se obţine şi relaţia a II-a a enunţului.

Problema 753

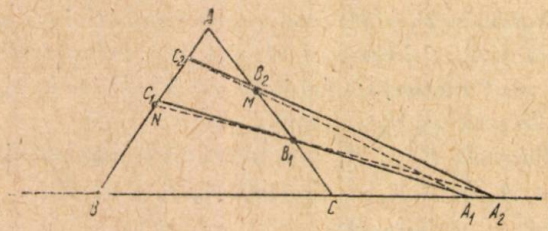
Două drepte Δ_1, Δ_2, taie laturile BC, AC, AB ale unui triunghi oarecare ABC respectiv în A_1, B_1, C_1 şi A_2, B_2, C_2. Dreptele A_1C_2, A_2C_1 taie pe AC în M, M'; dreptele B_1A_2, B_2A_1 taie pe AB în N, N' şi dreptele C_1B_2, C_2B_1 taie pe BC în P, P'.

Să se arate că punctele M, B, P şi M', N', P' sunt respectiv colineare.

D. C. Panu

Soluţie. In virtutea teoremei lui Menelaus avem:

$$\frac{A_1C\cdot BC_1\cdot AB_1}{A_1B\cdot C_1A\cdot B_1C}=1;\qquad \frac{A_2C\cdot BC_2\cdot AB_2}{A_2B\cdot C_2A\cdot B_2C}=1$$



Triunghiul ABC tăiat respectiv de transversalele A_1MC_2, $A_2B_1N_2$ PC_1B_2 ne dă:

$$\frac{A_1C\cdot BC_2\cdot AM}{A_1B\cdot C_2A\cdot MC}=1$$

$$\frac{A_2C\cdot BN\cdot AB_1}{A_2B\cdot NA\cdot B_1C}=1 \quad \text{şi} \quad \frac{PC\cdot B_2A\cdot C_1B}{PB\cdot CB_2\cdot AC_1}=1$$

Inmulţind ultimile 3 relaţii şi ţinând seamă de primele două obţinem:

$$\frac{AM\cdot BN\cdot PC}{MC\cdot NA\cdot PB}=1$$

In virtutea reciprocei teoremei lui Menelaus punctele M, N, P sunt colineare.

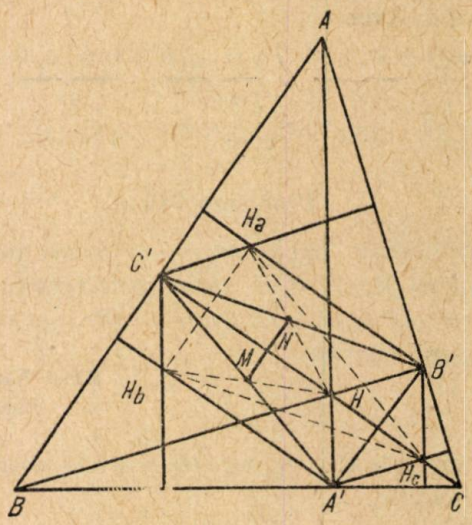
O demonstraţie analoagă pentru punctele M', N', P'.

Problema 772

Să se construiască triunghiul ABC cunoscând poziţiile H_a, H_b, H_c ale ortocentrelor triunghiurilor $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, A', B', C' fiind picioarele înălţimilor triunghiului ABC.

N. Gheorghiu
student

Soluţie. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, $M\equiv(A'C'; H_bH)$, $N\equiv(B'C'; HH_a)$. Patrulaterele $HB'H_aC'$, $HA'H_bC'$ fiind paralelograme, punctele N şi M sunt respectiv mijloacele segmentelor HH_a, $B'C'$ şi HH_b, $A'C'$. Rezultă



$$\overline{H_aH_b}=\|\overline{A'B'}=2\overline{MN}.$$

Analog:

$$\overline{H_bH_c}=\|\overline{B'C'} \quad \text{şi} \quad \overline{H_aH_c}=\|\overline{A'C'}.$$

Triunghiul $H_aH_bH_c$ având laturile paralele cu ale triunghiului $A'B'C'$ are şi bisectoarele interioare paralele cu bisectoarele interioare ale triunghiului $A'B'C'$, deci paralele cu înălţimile triunghiului ABC.

Deducem următoarea construcţie: Paralelele duse prin fiecare vârf al triunghiului $H_aH_bH_c$ la bisectoarele interioare ale acestuia se taie în A', B', C'. Perpendicularele din A', B', C' respectiv pe bisectoarele interioare relative la vârfurile H_a, H_b, H_c se intesectează în A, B şi C.

Problema este posibilă întotdeauna şi are o singură soluţie, dacă punctele H_a, H_b, H_c nu sunt colineare.

Problema 775

Să se arate că dacă $A+B+C+D=180°$, există relaţia:

$$\cos^2A+\cos B\cos(B+2C)=$$
$$=\cos^2C+\cos D\cos(D+2A)$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. Avem:

$$\cos B\cos(B+2C)-\cos D\cos(D+2A)=$$
$$=\frac{1}{2}[\cos(2B+2C)+\cos 2C-\cos(2D+2A)-\cos 2A]=$$
$$=\frac{1}{2}(2\cos^2C-1-2\cos^2A+1)=\cos^2C-\cos^2A$$

întrucât

$$\cos(2B+2C)=\cos(360^\circ-2D-2A)=$$
$$=\cos(2D+2A).$$

Problema 777

Să se stabilească identităţile:

$$1+\frac{1}{2}(\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b)\sin 2b=\frac{\cos b}{\cos a}\cos(a-b)$$

$$a\cos x-b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

A. I. Stan

Soluţie. Pentru prima identitate avem:

$$1+\frac{1}{2}(\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b)\sin 2b=$$

$$=1+\frac{1}{2}\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}2\sin b\cos b=$$

$$=\frac{\cos a+\sin b\sin(a-b)}{\cos a}=$$

$$=\frac{\cos b\cos(a-b)-\sin b\sin(a-b)+\sin b\sin(a-b)}{\cos a}=$$

$$=\frac{\cos b}{\cos a}\cos(a-b).$$

Pentru a doua notăm

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$$

şi avem

$$a\cos x-b\sin x=\frac{a}{\cos\varphi}(\cos x\cos\varphi-\sin x\sin\varphi)=$$

$$=\frac{a}{\cos\varphi}\cos(x+\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Problema 778

Să se rezolve sistemul

$$\operatorname{arctg}(x+3y)+\operatorname{arctg}(x-y)=\operatorname{arc\,sin}\frac{5}{\sqrt{61}}$$
$$2x+y=7$$

L. Hammer
elev, Timişoara

Soluţie.

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{5}{\sqrt{61}}=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-\frac{25}{61}}=\operatorname{arc\,cos}\frac{6}{\sqrt{61}},$$

deci prima ecuaţia se poate scrie:

$$\operatorname{arctg}(x+3y)+\operatorname{arctg}(x-y)=\operatorname{arctg}\frac{5}{6}.$$

Luând tangenta in ambii membri avem:

$$\frac{x+3y+x-y}{1-(x+3y)(x-y)}=\frac{5}{6}.$$

Substituind

$$y=7-2x$$

obţinem ecuaţia

$$75x^2-478x+656=0$$

de unde

$$x_1=\frac{328}{75}\qquad\text{şi}\quad x_2=2$$

deci

$$y_1=-\frac{131}{75}\qquad\text{şi}\quad y_2=3$$

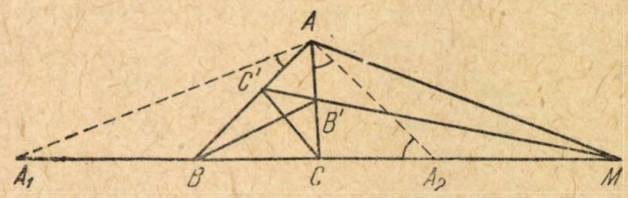
Problema 782

Intr'un triunghi oarecare ABC, ducem bisectoarele BB' şi CC'. Prelungim pe $B'C'$ până ce intersectează latura BC în M. Pe prelungirile laturei BC, luăm punctele A_1 şi A_2 astfel ca $BA_1=AB$ şi $CA_2=AC$. Să se arate că

$$\sphericalangle A_1AA_2=\sphericalangle BAM$$

Fl. Dudiţă
student, Oraşul Stalin

Soluţie. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABC tăiat de transversala $MB'C'$ şi



ţinând seamă că

$$\frac{C'B}{C'A}=-\frac{BC}{CA}\quad\text{şi}\quad\frac{B'A}{B'C}=-\frac{AB}{BC}$$

obţinem

$$\frac{MC}{MB}=\frac{AC}{AB}.$$

Rezultă că AM este bisectoarea exterioară a unghiului A, deci

$$\sphericalangle A_2AM=\sphericalangle CAM-\sphericalangle CAA_2=\frac{B+C}{2}-\frac{C}{2}$$

$$\sphericalangle A_2AM=\frac{B}{2}=\sphericalangle A_2AB.$$

sau

$$\sphericalangle A_1AA_2=\sphericalangle BAM.$$

Egalitatea de mai sus este justă când

$$\sphericalangle C>\sphericalangle B.$$

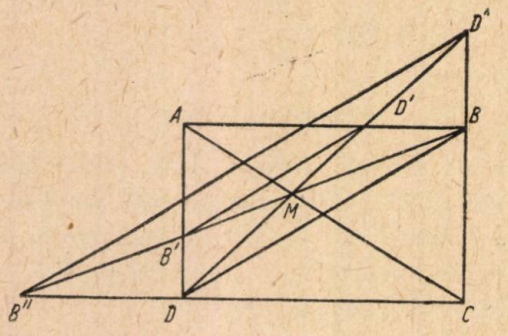
Dacă $\sphericalangle B>\sphericalangle C$, avem $\sphericalangle A_1AA_2=\sphericalangle CAM$.

Problema 798

Pe diagonala AC a dreptunghiului ABCD se ia un punct M. Dreapta BM întâlneşte laturile AD, CD respectiv în B' şi B''. Analog, dreapta DM determină punctele D', D'' respectiv pe AB, CB. Să se arate că diagonala dreptunghiului este medie geometrică între segmentele B'D', B''D''.

Eugen I. Gheţia
elev, Bucureşti

Soluţie. Dreptele care unesc două vârfuri ale unui triunghi cu un punct al medianei relative



la vârful al treilea, determină prin intersecţia lor cu laturile triunghiului o dreaptă paralelă cu latura corespunzătoare medianei considerate [1]).

Prin urmare:

$$\overline{B'D'} \,||\, \overline{BD} \,||\, \overline{B''D''}.$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $AB'B$ şi BCB'' avem:

$$\frac{AB'}{BC} = \frac{AB}{B''C} \quad \text{sau} \quad \frac{AB'}{AD} = \frac{CD}{B''C}.$$

Insă

$$\frac{AB'}{AD} = \frac{B'D'}{BD} \quad \text{şi} \quad \frac{CD}{B''C} = \frac{BD}{B''D''}.$$

Deci

$$B''D'' \cdot B'D' = BD^2.$$

[1]) Demonstraţia se face foarte uşor aplicând teorema lui *Ceva*.

Problema 801

Să se arate că:

$$(x+a)^9 + C_9^2 (x+a)^5 (x^2-a^2)^2 + C_9^4 (x+a)(x^2-a^2)^4 + C_9^6 (x-a)^3 (x^2-a^2)^3 + C_9^8 (x-a)^7 (x^2-a^2) = 2^8 (x^9+a^9).$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. Dacă în identitatea:

$$(m+n)^9 + (m-n)^9 = 2(m^9 + C_9^2 m^7 n^2 + C_9^4 m^5 n^4 + C_9^6 m^3 n^6 + C_9^8 m n^8)$$

facem substituţia $m+n=x$, $m-n=a$

$$m = \frac{x+a}{2}; \quad n = \frac{x-a}{2};$$

obţinem identitatea din enunţ.

Făcând aceeaşi substituţie în identitatea:

$$(m+n)^p + (m-n)^p = 2(m^p + C_p^2 m^{p-2} n^2 + C_p^4 m^{p-4} n^4 + \ldots)$$

obţinem o identitate mai generală. Deasemenea obţinem:

$$(x+a)^n + C_n^2 (x+a)^{n-2} (x-a)^2 + \ldots + C_n^{n-1} (x+a)(x-a)^{n-1} = 2^{n-1} (x^n + a^n).$$

Problema 807

Roata unui strung este luminată intermitent printr'un disc prevăzut cu 5 deschideri echidistanţate şi pare că ea se mişcă în sens opus celui real făcând 5 rot/sec. Care este rotaţia reală a roţii strungului şi câte rotaţii face discul, ştiind că la 8 rot/sec. ale discului, roata strungului este în repaus stroboscopic.

N. Stănescu

Soluţie. Rotaţia reală a roţii strungului este:

$$\nu = N = np = 8 \times 5 = 40 \text{ rot/s}.$$

Rotaţia discului se scoate din relaţia

$$N = np = f + \nu$$

$$n = \frac{f+\nu}{p} = \frac{5+40}{5} = 9 \text{ rot/s}.$$

PROBLEME PROPUSE

1092. Să se rezolve ecuaţia

$$x^7 + a^7 + b^7 = (a+b+x)^7$$

unde $a > 0$, $b > 0$.

I. Iavorschi (Moscova)

1093. Să se rezolve ecuaţia:

$$(8x+7)^2 (4x+3)(x+1) = 4{,}5.$$

A. P. Bodnarenco

1094. Să se reprezinte grafic funcţiile

a) $y = \sin x + \sin^2 x$

b) $y = \cos x + \cos^2 x$.

P. S. Modenov (Moscova)

1095. Să se arate că dacă $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ putem construi triunghiuri ale căror laturi să fie propor-

ţionale cu expresiile a, $\sqrt{1-a^2}$, $1-2a^2$. Se va ţine seamă că orice latură a unui triunghi este mai mică decât suma celorlalte două.

C. Ionescu-Ţiu

1096. Să se găsească geometric rădăcinile sistemului:

$$by = ax\sqrt{2}$$
$$x + y = \sqrt{2a(a+b) + b^2}$$

unde a şi b sunt două segmente date.

Racoceanu Valentin
student, Bucureşti

1097. Fie un triunghiu ABC dreptunghic în A, de laturi a, b, c, iar N un punct pe BC aşa ca: $n \cdot \overline{BN} = \overline{CN}$. Perpendiculara din B pe AN taie pe AC în M. Să se arate că:

$$\overline{BM} = \frac{c}{b}\sqrt{b^2 + c^2 n^2}.$$

Gh. I. Bercea

1098. Se proiectează piciorul înălţimii AA' a unui triunghi ABC pe laturile AB şi AC, respectiv în D şi E.

Să se deducă relaţia:

$$\left(\frac{A'B}{A'C}\right)^2 = \frac{AE \cdot BD}{AD \cdot CE}.$$

Arcanu Dumitru
student, Bucureşti

1099. Se dă punctul M, mobil pe dreapta AB. Pe segmentul care uneşte punctul M cu un punct fix C din plan se ia punctul N, aşa încât:

$$\overline{CM} \cdot \overline{CN} = k^2.$$

Fie H proiecţia lui C pe AB. Se cere locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului variabil NMH.

N. C. Ciomu

1100. Se dau două drepte paralele AX, BY şi o perpendiculară AB pe aceste drepte. Pe AX se ia un punct C şi pe BY de cealaltă parte a lui AB în raport cu C, un punct D, astfel ca $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = -\overline{AB}^2$.

Să se arate că cercul de diametru CD trece prin două puncte fixe.

Marius Iosifescu
elev, Piteşti

1101. Se dă cercul de diametru AB şi în el o coardă CD egală cu latura patratului înscris.

Dacă M şi N sunt intersecţiile perpendicularelor ridicate în D şi C pe CD cu BC şi AD, iar E este intersecţia lui AD cu BC, să se arate că:

$$\frac{1}{ME} + \frac{1}{NE} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = 2\left(\frac{1}{AE} + \frac{1}{BE}\right).$$

N. Păun
student, Bucureşti

1102. Să se determine lucrul mecanic efectuat la comprimarea cu 20 cm a unui resort, cunoscând că forţa este proporţională cu comprimarea resortului şi că, pentru comprimarea resortului cu 1 cm, este necesară o forţă de 2 kgf.

C. Dragomir
elev, Piteşti

1103. Dacă între două plăci paralele de sticlă se află apă, ele se atrag cu o forţă de 0,5 kg; iar dacă între ele se află glicerină se atrag cu o forţă de 0,2 kg. Să se determine cantitatea de apă şi de glicerină dintre plăci, dacă împreună cântăresc 2 grame.

Se socoteşte unghiul limită $\varphi = 0$ şi se dă tensiunea superficială a apei $\alpha = 73$ dyne/cm, iar a glicerinei 65 dyne/cm.

Ioan Licea
elev, Galaţi

1104. Să se calculeze energia elaborată la contopirea picăturilor mici de glicerină de rază $r = 5.10^{-4}$ mm într'o picătură de rază $R = 5$ mm.

Brezeanu Ioanin
elev, Târgovişte

1105. Un berbec de greutate $P = 100$ kg. este ridicat la înălţimea de 1 metru; la ultima lovitură un pilon intră în pământ la o adâncime de 1 cm. Ce sarcină maximă în kg/cm^2 va suporta acest pilon, fără a mai ceda, considerând că rezistenţa pământului faţă de mişcarea pilonului este constantă, că secţiunea pilonului este 15 dm^2, iar massa pilonului poate fi neglijată.

* * *

1106. Pentru a fierbe un litru de apă cu temperatura iniţială 5°C şi a vaporiza o anumită cantitate de apă, un fierbător electric funcţionează timp de 15 minute cu un curent electric la intensitatea de 5 amperi şi tensiunea de 110 volţi.

Randamentul fierbătorului fiind 0,9 să se afle cantitatea de apă vaporizată. Căldura de vaporizare a apei este 539.

Cetăţeanu Cecilia
elevă, Craiova

1107. Care este raportul de transformare al unui transformator dacă în înfăşurarea primară are $N_1 = 4490$ spire, iar în cea secundară dă *o.f.e.m.* $E_2 = 1000$ V. Miezul de fier are o secţiune $S = 10$ cm^2 şi o permeabilitate $\mu = 50$, iar câmpul magnetic are o intensitate $H = 20$ oerstezi şi o frecvenţă $f = 50$ per/s.

Fusaru George
elev, Piteşti

1108. Pe feţele interioare ale unui condensator electric plan se găsesc iniţial un electron pe placa negativă şi o particulă afla pe placa pozitivă. Să se găsească viteza căpătată de fiecare particulă precum şi lungimea de undă a undei asociate fiecărei particule, atunci când accelerate de diferenţa de potenţial U aplicată plăcilor, particulele ating simultan un plan paralel cu plăcile. Să se găsească şi raportul în care acest plan împarte distanţa d dintre plăci. Să se demonstreze că, indiferent de masele acestor particule, raportul energiilor lor cuantice este direct proporţional cu raportul sarcinilor lor.

Popescu Gabriel
elev, Rm.-Vâlcea

1109. O sanie alunecă pe o pantă de unghi $\alpha = 40°$ dela o înălţime $h = 5$ metri. Coeficientul de frecare între planul înclinat şi sanie este 0,025. Să se determine distanţa ce o mai parcurge sania pe un plan orizontal până se opreşte dacă coeficientul de frecare între sanie şi planul orizontal este de 0,03.

* * *

1110. Se dă o coardă de argint având lungimea 75 cm iar raza secţiunii 0,02 cm.

Să se găsească tensiunea în dine şi grame aplicată extremităţilor corzii, aşa încât făcută să vibreze, să emită sunetul la_3 din gama muzicală.

Miu Gh. Filipoiu
C. de Argeş

1111. Să se arate că dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghi oarecare, există triunghiuri ale căror laturi să fie exprimate prin valorile absolute ale expresiilor $\cos A$, $\cos 2B$, $\sin(B - C)$. Se va ţine seamă că o latură a unui triunghi este mai mică decât suma celorlalte două.

C. Ionescu-Ţiu

1112. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 2x + \cos x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$$

Gh. Bazacov

1113. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{16} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{16} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{24} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{24} = 2\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 1\right).$$

Mihalcea S. Constantin
student, Bucureşti

1114. Intr'o instalaţie se găseşte în serie un dinam cu o putinţă de 5 cai putere şi cu o rezistenţă de 25 ohmi, apoi o baie electrică cu o rezistenţă de 150 ohmi în care se găseşte o soluţie de SO_4Cu în concentraţie de 10%. Dinamul având un randament de 80%, se cere:

a) Tensiunea la bornele dinamului şi tensiunea întregului circuit dacă tensiunea la bornele băii electrice este de 28 volţi;

b) Intensitatea circuitului;

c) Cantitatea de cupru (Cu) depusă la catod în timp de o oră 40 minute şi 20 secunde.

Petcu I. Dumitru
elev, Giurgiu

1115. Un corp de greutate P kg este aruncat vertical în sus cu viteza iniţială V_0. Presupunând că rezistenţa aerului este proporţională cu patratul vitezei corpului, coeficientul de proporţionalitate fiind k, să se afle cu ce viteză va cădea corpul pe pământ.

* * *

1116. Se dă un punct A de coordonate:

$\varphi = +44°10'$
$\lambda = +28°41'$ (coordonatele farului Constanţa).

Se consideră cercurile mari C_1 şi C_2 ce trec prin A.

C_1 este tangent la paralele $\varphi = +50°$.

C_2 taie paralela $\varphi = +60°$ în două puncte B şi C. Iar distanţa corespunzătoare C_1B_1 depe ecuator este de 2000'. (BB_1 şi CC_1 sunt latitudinele punctelor B şi C).

Se cere:

a) Unghiul dintre planurile celor 2 cercuri;

b) Punctele unde cercurile C_1 şi C_2 taie ecuatorul;

c) Latitudinea maximă atinsă de C_2 (vertex);

d) Distanţa ortodromică AB (distanţa pe arc de cerc mare).

C. V. Costăchescu

ERATĂ. E · 356 din numărul precedent al revistei se rectifică astfel:
Să se verifice egalităţile:

$$\frac{(1+\sqrt{5})^3}{(3+\sqrt{5})^3} = -2+\sqrt{5} \quad \text{şi} \quad \frac{(1-\sqrt{5})^3}{(3-\sqrt{5})^3} = -2-\sqrt{5}.$$

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E: 369. La o căruță roatele dinainte au 1,02 m diametru, iar cele dinapoi au 1,38 m. După un parcurs oarecare roata mică a făcut 620 învârtituri mai mult decât roata mare. Ce drum a parcurs căruța?

* * *

E: 370. Eu am 21 ani, iar tatăl 49. Când a fost tatăl de trei ori mai bătrân decât mine?

Gh. Bercea

E: 371. Să se calculeze expresia

$$E = \cfrac{1 - \cfrac{1 + \cfrac{1}{7}}{1 + \cfrac{1}{9}}}{\cfrac{1}{3} + \cfrac{1}{7 - \cfrac{5}{9}}}$$

E: 372. Cu ce număr trebue să sporim ambii termeni ai fracției $\frac{5}{8}$ pentru ca noua fracție să difere de unitate cu mai puțin de o miime?

* * *

E: 373. Să se arate că

$$\frac{1}{\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^n}} + \frac{1}{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n+1}}} = a^n.$$

C. I. Ț.

E: 374. Se dau două vase identice. Intr'unul se pune apă până ce se umple, iar în altul o bucată de fier cu densitatea de 7,8 In modul acęsta al doilea vas cântărește cu 5 kg mai mult. In al doilea vas s'ar mai putea turna încă 2,12 litri apă pentru ca să se umple. Se cere capacitatea celor două vase și greutatea bucății de fier.

* * *

E: 375. Să se restabilească înmulțirea

$$\begin{array}{r} 5\ -\ - \\ 5\ -\ - \\ \hline 5\ -\ - \\ -\ -\ 5\ - \\ -\ -\ -\ 5 \\ \hline -\ -\ -\ 5\ -\ - \end{array}$$

Liniuțele sunt cifre diferite de 5.

* * *

E: 376. Două trenuri merg în sens contrar pe două linii paralele alăturate cu viteze de 36 km/oră și 45 km/oră. O persoană din primul tren vede trenul al doilea trecând pe dinaintea ei în 6 secunde, iar o persoană din trenul al doilea vede trenul întâi trecând pe dinaintea ei în 8 secunde. Se cere să se calculeze în cât timp ar fi trecut cele două trenuri pe dinaintea persoanelor dacă trenurile ar fi mers în același sens cu aceleași viteze. Care este lungimea fiecărui tren?

* * *

E: 377. Se dă:

$+30\ x = 59 - [(-11) - (+19) + (-61)]$

$(-30)\ y = -[(-59) - (+11) + (+19) + (+61)]$

$(+30)\ z = +[(+59) + (-61)] - [-19 - (-11)]$

$(-30)\ t = -(59 - 91) + [-(-19) - (+11)]$

Să se arate că:

$$x + x + z + t = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}.$$

* * *

E: 378. Se consideră triunghiul ascuțitunghi ABC cu înălțimea $AD = BC$. Bisectoarele unghiurilor ADB și ADC intersectează pe AB și AC respectiv în M și N. Să se arate că:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1.$$

Popescu I. Mihail
Student, București

E: 379. Să se calculeze cu eroare mai mică de o miime raportul

$$\frac{3{,}141592653}{2{,}718281828}.$$

* * *

E: 380. Să se arate că:

$$a(b-c)^2 - b(c-a)^2 = a(b+c)^2 - b(c+a)^2$$

$$a(b+c)^2 + b(c-a)^2 = a(b-c)^2 + b(c+a)^2$$

$$\frac{a-b}{a+b}\left(1 + \frac{abc}{(a+b)^2}\right) + \frac{(a^3-b^3)c}{(a+b)^3} = \frac{(a-b)(1+c)}{a+b}$$

C. I. Ț.

E: 381. Ce devine expresia

$$\sqrt{x^2 - ax + a^2} + \sqrt{x^2 - bx + b^2}$$

pentru $x = \dfrac{ab}{a+b}$

* * *

E: 382. Cu 125 kilograme făină, s'au făcut 220 pâini a 750 grame fiecare. Ce procent de apă a absorbit făina?

* * *

E: 383. Durata oscilației unui pendul este proporțională cu rădăcina patrată a lungimii lui. Știind că un pendul de 223 mm face o oscilație într'o jumătate de secundă, în cât timp va face o oscilație un pendul de 3,15 metri lungime?

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Până la 15 Septembrie 1953 s'au mai primit soluții bune la cel puțin cinci probleme din Revista Matematică și Fizică, probleme propuse (P), note (N) și articole (A) dela următorii corespondenți:

ALBA IULIA. Clasa IX-a: Șincu Iacob (838, 839, 882, E: 290, 292, 294, 295, 298, 300, 305, 306, 309), Mandel Robert (841, 871, 873, 874, 876, E: 291, 292, 293, 294, 295, 296, 300, 306), Absolvent. Romoșan S. Nicolae (721, 751, 823, 879, 904, 905, 907, 908, 913, 923, 927, 938, 942, P).

ARAD. Clasa X-a: Oniță Aurel (651, 659, 770, 775, 842, 868, 871, 872, 875, 888, 904, 908, 923, 940, 958); clasa XI-a: Csakany Romulus (673, 716, 742, 758, 759, 760, 761, 762, 784, 786).

BACĂU. Clasa XI-a: Tofan V. Ioan (683, 685, 692, 694, 698, 716, 717, 721, 724, 726, 728, 734, 774, 787, 788, 791, 792, 793, 794, 795, 797, 798, 800, 803, 804, 813, 816, 819, 822, 823, 824, 827, 834, 835, 837, 838, 839, 842, 844, 845, 848, 850, 853, 854, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, P). Școala medie tehnică de construcții. Anul III: Stanciu Pavel (871, 872, 873, 874, 875, 876, 904, 905, 913, 917, 925, 937, 939, 940, 941, E: 281, 282, 285, 290, 292, 294, 304, 305, 306, 311).

BÂRLAD. Clasa VIII-a: Bichir Ilie (669, 715, 723, 734, 778, 804, 814, 822, 823, E: 252, 253, 254, 255, 256, 257); clasa X-a: Cristian I. Gheorghe (904, 937, 938, E: 305, 306, 311, 314), Bichir Constantin (746, 747, 752, 798, 841, 853, 863, 864, 865, 868, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 880, 895, 904, 905, 907, 909, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 919, 920, 925, 927, 929, 931, 935, 937, 940, 941, E: 293, 294, 300, 303, 304, 305, 306, 309, 310, 311, 312).

BOTOȘANI. Clasa X-a: Casianov Eugenia (659, 715, 716, 717, 722, 727, 728).

BRĂILA. Școala medie electrotehnică. Anul III: Lungu L. Ștefan (709, 710, 711, 718, 721, 747, 752, 765, 766, 767, 768, 780, 783, 788, 792, 813, 819, 823, 835, 839, 842, 850, 853, 854, 861, 863, 864, 868, 871, 872, 873, 875, 876, E: 234, 235, 236, 237, 238, 242, 243, 245, 247, 253, 257, 259, 261, 263, 277, 295, 298, 299, 300, P).

BUCUREȘTI. *Liceul 1 fete.* Clasa V-a: Predoescu Marieta (E: 237, 238, 247, 252, 259). *Liceul 1 băieți.* Clasa X-a: Astrahanțev Dumitru (716, 726, 743, 744, 752, 753, 794, 834, E: 257). Radu Ovidiu (659, 684, 690, 706, 707, 787, 795, 806, 854, 931, 937, 941, 946, 971, 972, 973, 974, 975). Zamfirescu Mihnea (743, 744, 745, 748, 768, 780, 845, 871, 872, 873, 876, 906, 907, 910, 938, 972, 973, E: 243, 247, 261, 286, 292). *Centrul școlar 2—10—13 fete.* Clasa X-a D: Petrică Zamfira (769, 785, 787, 788, 789, 797, 800, 801, 802, 806, 808, 810, 814, 816, 818, 822, 824, 826, 827, 831, 832, 833, 834, 838, 841, 842, 845, 848, 854, 863, 866, 868, 869, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 906, 913, 920), Roceric Maria (794, 797, 808, 823, 824, 834, 841, 842, 867, 871, 872, 873, 874, 875, E: 268, 271, 274, 275, 279, 280, 281, 292, 293, 294, 299, 300). Ulmeanu V. Aurelia (904, 906, E: 305, 306, 309, 311). *Liceul 3 băieți.* Clasa VIII-a: Tomescu Dan (863, 864, 866, 871, 872, 873, 904, 905, 906, 912, 913, E: 290, 292, 293, 294, 296, 298, 300, 302); clasa X-a: Radu Gh. Nicolae (737, 787, 794, 845, 861, 863, 867, 871, 872, 873, 875, 878, 904, 911, 913, 915, 916, 923, 927, 938, 942, E: 257, 261, 262, 263, 273, 275, 288, 290, 292, 293, 294, 295, 298, 300, 304, 312, 314); clasa XI-a: Radu I. Dumitru (766, 788, 835, 871, 873, 913, 923, 926, E: 266, 270, 271, 291, 292, 306). *Liceul 4 fete.* Clasa VII-a: Florescu M. Sanda (E: 305, 306, 309, 312, 315, 316, 317, 318, 321, 322, 324). *Liceul 5 băieți.* Clasa X-a: Manea Marin (904, 927, 938, 940, 942, E: 304, 306, 312). *Liceul 6 băieți.* Clasa VIII-a: Luzi Florea (E: 266, 268, 271, 272, 274, 281, 286, 305, 306, 309, 311, 312, 313, 314); Popovici Radu (841, 888, 910, 971, 973, 974, 976, E: 257, 265, 282, 308, 318, 321, 322, 324); clasa X-a: Kestenband Barbu (847, 878, 887, 897, 904, 906, 913, 923, E: 293, 303, 304, 306, 309, 312, 313). *Liceul 10 băieți «Aurel Vlaicu».* Clasa X-a C: Andreescu G. Radu (704, 709, 710, 711, 714, 750, 758, 759, 760, 761, 762, 790, 805, 817, 837, 838, 839, 841, 842, 845, 848, 850, 854, 861, 863, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 878, 880, 887, 888, 889, 890, 894 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 919, 921, 923, 926, 927, 930, 931, 932, 933, 934, 937, 938, 940, 942, 944, 945, 946, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 958, 959, 962, 964, 965, 971, 972, 973, 974, 975, 976); clasa XI-a: Andreescu Gh. Mircea (704, 735, 747, 750, 761, 772, 783, 790, 810, 834, 841, 842, 845, 915, 916, 917, 919, 921, 923, 926, 927, 930, 931, 933, 934, 937, 938, 940, 942, 944, 945, 946, 949, 950, 952, 954, 957, 958, 959, 962, 964, 965, 972, 973, 974, 975, 976, P). Absolvenți. Mândru Anatolie (763, 814, 816, 822, 823, 824, 835, 841, 842, P); Șincan Corneliu (823, 824, 878, 879, 882, 883, 891, 895, 896, 897, 904, 905, 908, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 920, 922, 923, 925, 927, 929, 930, 931, 944, 946, 948, 950, 954, 964, 969, 971, 972, 973, 974, 975, P). *Liceul 12 fete.* Clasa VIII-a: Clondescu Ioana (E: 260, 261, 263, 266, 268, 286, 290, 292, 300). *Școala elementară 45 băieți.* Clasa VII-a: Teodorescu Radu (E: 252, 254, 255, 257, 258, 260, 264, 266, 279, 280, 281, 283, 286, 290, 294, 296, 300, 304, 307, 310, 311). *Școala elementară 50 băieți.* Clasa VII-a: Pătrășcioiu Adrian (304, 307, 311, 319, 324). *Școala medie tehnică de Instalații.* Anul II. Radu Sebastian (898, 946, 950, E: 311, 318). *Școala medie tehnică de drumuri și poduri.* Anul II. Fomov T. Mihai (838, 871, 872, 880, 904, 916, 927, 938, 973, 974, 976, E: 292, 294, 305, 306, 311, 313, 314, 316, 318). *Școala medie comercială Nr. 2.* Anul III. Dedu Aurel (872, 904, 915, 938, E: 306, 314, P). *Școala medie de măsurători terestre.* Anul III: Tănase Dumitru (756, 838, 842, 845, 861, 867, 871, 872, 873, 874, 876, 878, 888, 895, 897, 904, 905, 906, 907, 910, 915, 916, 919, 923, 925, 929, 930, 934, 937, 938, 940, 941, 942). Electrician, Cucuet Ioan (871, 884, 3 P). Student Oprea Constantin (685, 744, 745, 746, 756, 770, 775, 777, 778, 819, 850, 906, 908, 923, 934, 938).

BUZĂU. Clasa VIII-a: Ioniță Aurelia (770, 778, E: 257, 263, 292, 293); Voineagu Alexandru (753, 884, 885, 904, E: 242, 245, 247, 304, 306, 309, P). Clasa X-a: Cucu Dan (879, 915, 946, 950, 952, 974); Jarcău I. Aurel (878, 887, 888, 897, 899, 904, 929, 942, 944, 950, E: 305, 306, 314, P).

CĂLĂRAȘI. Clasa VII-a: Nicolescu Dan (873, E: 243, 244, 245, 250, 251, 286, 304, 305, 306, 309, 324); clasa XI-a: Rădulescu Ion (756, 758, 760, 798, 819, 822, 834, 839, 875, 904, 905, 906, 908, 910, 923, 927, 928, 937, 938, 939, 940); Vasilescu Constantin (723, 743, 744, 745, 746, 751, 787, 799, 816, 839, 841, 850, 853, 863, 871, 872, 873, 875, 876, 878, 879, 882, 888, 900, 904, 905, 906, 908, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 923, 927, 929, 931, 934, 938, 940, 946, 950, 952, 971, 972, 973, 974).

CÂMPINA. *Şcoala medie tehnică de petrol Nr. 1.* Anul I: Florea C. Gheorghe (E: 236, 239, 263, 286, 297, 303, 305, 306, P); Anul II: Robitu Nicolae (823, 950, E: 279, 280, 290, 291, 292, 294, 305, 306, P).

CÂMPULUNG (MUSCEL). *Şcoala pedagogică.* Anul IV: Duţă I. Gheorghe (871, 872, 873, 876, 904, 912, 937, 938, E: 254, 259, 266, 271, 305, 306). *Şcoala medie tehnică de cărbuni,* anul III: Savin Dan (730, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 824, 831, 906, 908, 909, 910, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 919, 921, 926, 927, 944, 946, 971, 976); Clasa XI-a liceu: Marinescu I. Nicolae (716, 721, 724, 740, 745, 748, 788, 813, 819, 822, 823, 827, 834, 882, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 914, 915, 916, 923, 927, 937, 938, P).

CÂMPULUNG MOLDOVENESC (SUCEAVA). *Şcoala elementară, Comuna Fundul Moldovei.* Clasa VII-a: Apetrei Nicolae (315, 316, 317, 318, 320, 322, 324).

CAREI. Liceul mixt. Clasa IX-a: Sichet Ovidiu (834 871, 872, 873, 904).

CARACAL. Clasa X-a: Anastasiu Răsvan (879, 881, 908, 910, 915, 917, 931, 938, 940, 972, 974, E: 278, 289, 305, 306, 309, 313, 314, 320, 323). Stănescu Rodica (871, 872, 913, 938, E: 261, 270, 270, 306, 314).

CARANSEBEŞ. Clasa X-a: Matiaş Nicolae (685, 915, 923, 938, 940, E: 245, 305, 306).

CLUJ. *Şcoala specială de doi ani.* Absolvent, Muscalu C. Ştefan (706, 746, 878, 879, 881, 882, 904, 908, 909, 910, 916, 923, 927, 938, 940, 944, 950, 954, 972, 974, E: 306, 314, 320, 323, P). Clasa VIII-a: Costin Lucia (676, 863, 871, 873, 913, E: 245, 250, 251, 264, 268, 292, 305, 306, 312, 313). *Liceul 3 băieţi,* clasa X-a: Haiduc Ionel (905, 906, 908, 913, 915, 923, E: 286, 312, 313). Absolvent Grecu Dan (701, 734, 826, 837, 839, 841, 842, 845, 847, 850, 853, 861, 863, 864, 866, 868, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 882, 888, 889, 893, 894, 900, 901, P). Constantinescu Florin (633, 678, 679, 713, 755, 803, 810, 814, 820, 824, 826, 837, 838, 841, 842, 845, 848, 851, 853, 863, 864, 866, 873, 906, 907, 908, 913, 923).

CONSTANŢA. Clasa XI-a: Andreşoiu Glanco (704, 718, 783, 872, 873, 875, 878, 881, 915, 923, 938, E: 243, 245, 261, 290, 292). Mitescu Constantin (788, 813, 819, 839, 888, 906, E: 272, 277, 304, 305, 306, 309). *Şcoala Hidrotehnică*: Alexandru Ştefan (769, 863, 871, 872, 873, 904, 904, 912, 913, 917, 917, E: 247, 253, 257, 259, 260, 281, 286, 290, 292, 294, 296, 302, 304, 305, 306, 307, 309, 310, 312).

CORABIA. Liceul mixt, clasa X-a: Bădănac N. Alexandru (727, 728, 772, 979, 799, 838, 842, 845, 863, 864, 871, 872, 873, 888, 889, 894, 900, 904, 905, 906, 908, 910, 911, 913, 923, 929, 937, 938, P).

CRAIOVA. *Liceul 1 fete,* clasa IX-a: Schiopu Eugenia (620, 679, 691, 745, 787, 791, 834, 838); Cetăţeanu Cecilia (721, 765, 767, 770, 777, 792, 813, 819, 823, 827, 834, 835, 839, 841, 863, 871, 872, 873, 875, 882, 890, 904, 905, 907, 908, 910, 913, 915, 923, 938, E: 263, 270, 285, 286, 289, 294, 298, 312, 313, P); Popescu Miliţa (863, 871, 872, 873, 898, 900, 906, 908, 910, 913, 916, 919, 929, 938, 940, 972, E: 234, 238, 240, 244, 245, 265, 274, 279, 280, 281, 288, 293, 294, 313, 321, 324); Clasa X-a: Popescu Cireşica (654, 682, 691, 698, 679, 703, 704, 723, 743, 744, 748, 770, 777, 779, 794, E: 200, 209, 213, 236, 261, 263, 270, 286). Liceul 2 fete, clasa X-a: Enăchescu Gigia (824, 826, 827, 834, 838, 845, 846, 861, 867, 906, 908, 910, 913, 915, 916, 917, 923, 938, 940, E: 306, 312, 313); Păun Elena (E: 216, 230, 236, 286, 306); Mitan Paraschiva (746, 834, E: 245, 261, 266); Clasa XI-a: Livescu Jeana (767, 778, 787, 788, 813, 819, 823, E: 252, 255, 260, 266, 271, 276, 295, 298). Şcoala elementară Balş. Clasa VII-a: Gagiu T. Mihai (744, 872, 938, E: 245, 246, 305, 306). *Liceul 1 băieţi.* Clasa VIII-a, Trifan Vasile (304, 305, 306, 309, 314); clasa X-a: Dumitrescu I. Mircea (871, 873, 876, E: 279, 280, 281, 284, 286, 288); clasa IX-a Pavel N. Ionel (700, 701, 721, 729, 923, E: 239, 242, 243, 245, 281, 289, 306). Liceul de băieţi: clasa XI-a C: Botescu Marin (816, 824, 834, 878, 904, 907, 909, 910, 913, 917, 923, 940, E: 288, 306, 312).

CURTEA DE ARGEŞ. Liceul mixt, clasa X-a: Dabija Mircea (740, 757, 758, 759, 777, 778, 779, 813, 819, 823, 904, 905, 906, 908, 912); Student Miu Gheorghe Filipoiu (723, 727, 756, 806, 845, 853, 878, 880, 882, 904, 905, 906, 908, 910, 912, 915, 923, 938, 940, 942, 946, 954, 966, 974, 976, P).

DOROHOI. Clasa XI-a: Cojocaru V. Mihai (706, 744, 745, 746, 765, 766, 767, 768, 770, 789, E: 242, 243, 244, 245, 248, 254, 257, 258, 260, 261, 262), Eftimescu Nicolae (676, 779, 791, 834, 913, 915, E: 243, 245, 247, 248, 251, 272, 274, 281, 286, 288, 294, 305, 306, 312).

FĂGĂRAŞ. Panait Mihai (726, 779, 787, 788, 792, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 904, 905, 906, 913, 916, 937, 938, P).

FOCŞANI. Clasa IX-a: Donescu St. Dragomir (677, 696, 703, 705, 709, 711, 712, 714, 716, 733, 734, 753, 755, 756, 759, 760, 767, 770, 775, 783, 787, 790, 791, 793, 804, 810, 816, 823, 827, 834, 835, E: 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 251, P), Robănescu N. Adrian (627, 686, 687, 701, 721, 724, 740, 743, 766, 778, 787, 788, 791, 792, 793, E: 234, 259, 260, 269, 271, 272, 275, 276, 277, 285, 289, 290, 291, 292, 294, 295, 298, 303, 305, 306, P).

GALAŢI. Clasa XI-a: Chiosana Cornelia (669, 690, 707, 710, 724, 742, 743, 758, 823, 834, 837, 839, 845, 882, 888, 900, 904, 905, 906, 923).

GIURGIU. Clasa V-a: Avat Corneliu (E: 239, 243, 245, 247, 254, 290, 304, 305, 306); clasa X-a: Drăgan St. Marin (658, 670, 675, 685, 718, 740, 744, 745, 748, 765, 770, 778, 783, 788, 813, 823, 835, 839, 844, 871, 872, 873, 874, 876, 882, 888, 904, 937, 938, 940, 971, 972, 973, 974, E: 261, 276, 286, 292, 294, 306, P); Mişcol Mircea (718, 723, 724, 727, 744, 748, 767, 808, 822, 834, 835, 841, 854, 857, 904, 905, 907, 908, 913, 915, 918, 919, 923, 937, 938, 939, 950, 959, E: 248, 267, 315, 316, 317, 319, 321, 322, 323, 324, P); Stanciu E. Mirel (745, 767, 768, 788, 800, 837, 839, 871, 872, 873, 878, 881, 904, 905, 910, 912, 913, 916, 919, 925, 937, 938, 941, 944, 950, 971, 973, 974, 976, E: 252, 266, 275, 290, 291, 292, 295, 301, 305, 306, 309, 310, 311, 312, 316, 317, 318, 320, 322, P); Vidan Marius (721, 823, 878, 882, 887, 904, 905, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 927, 929, 930, 931, 932, 937, 938, 941, 944, 946, 950, 965, 972, 973, 974, 976, P). Clasa XI-a: Mitu St. Velicu (675, 697, 707, 739, 744, 761, 765, 767, 768, 770, 778, 787, 788, 791, 792, 800, 805, 806, 808, 813, 819, 823, 825, 835, 838, 839, 846, 850, 852, 854, 859, 861, 863, 864, 868, 875, 876, 880, 881, 882, 884, 885, 901, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 923, 926, 927, 928, 930, 934, 937, 939, 940, 941, 942; E: 257, 258, 261, 262, 266, 268, 269, 270, 271, 272, 274, 276, 277, 279, 280, 281, 283, 284, 285, 286, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 298, 300, P). Petcu I. Dumitru (675, 824, 860, 868, 879, 880, 881, 882, 884, 885, 888, 889, 890, 901, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 923, 925, 927, 928, 929, 930, 934, 937, 938, 939, 940, 941, 942).

HUNEDOARA. Şcoala medie siderurgică. Absolvent, Cimporescu Doinel (929, 930, 931, 933, 935, 937, 938, 944, 946, 950, 952, 956, 959, 961).

HUŞI. Şcoala pedagogică, anul I, Maxim Lucia (938, E: 305, 306, 310, 311); Nicolau Artemiza (938, E: 305, 306, 310, 311).

IAŞI. Clasa IX-a: Fişman Samuel (748, E: 245, 261, 286, 312); Lolica Radu (744, 748, 779, 794, 872); Onică Dan (787, 878, E: 268, 271, 305, 306, 309, 312, 313).

ORADEA. Şcoala medie tehnică de construcţii, anul III, Găbrian Cornelia (713, 824, 905, 908, 909, 910, 923, E: 292, 312). Şcoala elementară Inad (Salonta), clasa VII-a: Daina Iosif (768, 838, 871, 872, 873, 876, 888, 904, 905, 912, 915, 916, 917, 919, 925, 937, 938, 939, 940, E: 255, 267, 269, 271, 272, 279, 280, 281, 282, 283, 286, 290, 292, 293, 294, 300, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 311, 312, 313, 314), Iuhas Ioan (768, 823, 872, 873, 876, 888, 904, 905, 912, 915, 917, 919, 937, 938, 952, E: 255, 266, 267, 269, 271, 272, 279, 280, 281, 282, 283, 286, 290, 292, 293, 294, 300, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 311, 312, 314); Maxim Maria (768, 838, 871, 872, 873, 876, 888, 904, 905, 912, 915, 916, 917, 919, 925, 937, 938, E: 255, 266, 267, 269, 271, 272, 279, 280, 281, 282, 283, 286, 290, 293, 294, 300, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 311, 312, 313, 314). Clasa VIII-a liceu: Buzuloiu Florin (E: 261, 263, 271, 306, 309, 310, 311, 317); Bocu Monica (721, 724, 765, 766, E: 276, 277, 278, 279, 280, 281, 283, 285, 286, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 302, 303, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 322, 323, 324); Guiaşu Silviu (740, 765, 793, 823, 871, 872, 873, 904, 912, 913, 916, 925, 937, 938, 971, 972, 973, 974, 976, E: 271, 291, 292, 294, 295, 298, 300, 305, 306, 309, 314, 315, 316, 317, 318). Clasa IX-a A. Bocu Mircea (844, 845, 846, 848, 850, 861, 852, 853, 854, 856, 858, 860, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 887, 889, 890, 891, 892, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 902, 903); Buzuloiu Vasile (673, 674, 675, 678, 684, 685, 690, 691, 693, 694, 698, 699, 701, 703, 704, 705, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 716, 717, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 731, 733, 734, 736, 742, 743, 744, 745, 748, 749, 765, 768, 770, 774, 776, 783, 788, 791, 794, 796); Rus A. Ioan (658, 791, 812, 823, 864, 871, 872, 873, 875, 876, 888, 904, 905, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 919, 937, 972, 973, E: 254, 255, 265, 278, 278, 304, 305, 306, 308, 309, 310, 311, 319, 324); Venter Dumitru (787, 792, 793, 823, 871, 872, 873, 904, 907, 913, E: 275, 279, 280, 286, 287, 292, 306).

ORAŞUL STALIN. Clasa X-a: Ionescu Caius (744, 745, 748, 765, 766, 767, 788, 823, E: 276, 277); student Mihălcescu V. Ion (871, 872, 873, 875, 876, 878, 905, 906, 908, 912, 913, 923, 938, 950, E: 292, 294, 305, 306, 313, 318, 323, P).

PIATRA NEAMŢ. *Şcoala medie hidroenergetică*, anul III: Popa Ioan (878, 904, 906, 915, 916, 923); clasa VI-a: Roznov. Gervescu M. Ioan (871, 904, 912, 914, 916, 937, 941, E: 290, 291, 306, 309, 314); clasa IX-a: Minuţ M. Petre (675, 703, 716, 736, 744, 745, 748, 751, 764, 765, 768, 770, 780, E: 223, 224, 225, 226, 227, 229, 230, 231, 232, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 243, 245, 247, 249, 250, 251, 252, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 264); clasa XI-a: Niţică Gheorghe (670, 718, 724, 780, 813, 835, E: 243, 257, 261); Tifui Vasile (706, 707, 710, 712, 756, 762, 800, 824, 826, 839, 845, 853, 906, 923, 938, 940, 944, 946, 950, 952, 957, 959, 964, 974, E: 276, 279, 280, 312, 321, 324); Vasilescu Stelian (745, 748, 788, 915, 940, 954).

PITEŞTI. *Şcoala medie tehnică mecanică*, anul I. D. Marin C. Marin (871, 872, 873, E: 304, 305, 306, 318); Şcoala elementară Găeşti, clasa VII-a, Nica Emilian (873, E: 223, 245, 292, 294, 306, 309); clasa X-a: Dragomir Constantin (683, 686, 724, 809, 813, 817, 819, 822, 823, 824, 825, 826, 831, 834, 835, 839, 843, 871, 872, 873, 875, 876, 878, 881, 882, 885, 901, 904, 906, 938, 940, E: 230, 231, 232, 276, 277, 285, 288, 289, 306); clasa XI-a: Cucurezeanu P. Ion (654, 659, 665, 667, 668, 674, 675, 682, 683, 687, 688, 689, 692, 693, 694, 695, 698, 703, 704, 706, 718, 720, 721, 726, 729, 731, 734, 736), Predescu Florica (716, 722, 768, 780, 871, 873, 904, 916, 923, 929, 938, 940, E: 250, 261, 266, 271, 279, 285, 289, 294, 303, 305, 306, 309, 314).

PLOEŞTI. Clasa VI-a: Bezdead. Paraschiv G. Elena (294, 297, 308, 318, 323); clasa VII-a Brăneşti: Bucur D. Gheorghe (261, 271, 272, 275, 295, 306, 307, 309, 314, 316, 317, 318, 320, 324); clasa VII-a A: Sorin Geroşanu (E: 243, 245, 247, 305, 306), Popescu Călin (E: 276, 277, 279, 281, 282, 285, 286, 288, 289, 290, 291, 292, 294, 295, 298, 300, 304, 305, 306, 309); clasa VIII-a: Lupuţiu Ioan (691, 692, 718, 819, 835, 838, 863, 864, 871, 872, 873, 875, 876, 878, 894, 904, 905, 910, 912, 913, 915, 917, 927, 928, 930, 937, 938, 940, 941, 971, 972, 973, 974, 975); Jipea Ionel, strungar (723, 744, E: 223, 225, 230, 231, 234, 235, 237, 239, 240, 242, 243, 244, 245); clasa IX-a: Pavelescu I. Petre (745, 748, 810, 823, 827, 831, 834, 871, 872, 874, 878, 904, 906, 913, 915, 926), Stanciu N. Toma (651, 659, 706, 708, 709, 711, 723, 728, 751, 766, 775, 777, 779, 806, 857, 875, 878, 879, 882, 888, 902, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 913, 915, 916, 917, 918, 919, 923, 926, 929, 930, 931, 937, 938); Stroe Radu (878, 879, 887, 904, 905, 906, 912, 913, 915, 916, 917, 923, 927, 929, 930, 937, 938, 940, 950, 952, 962, 972, 973, 974, 975, 992, 999, 1000, 1025, P); clasa X-a: Hodoiu Dan (873, 904, 905, 938, 966); Ciauş Valentin (716, 717, 721, 722, 723, 724, 727, 728, 729, 733); Niculescu Gheorghe (686, 690, 694, 695, 701, 703, 709, 711, 716, 718, 721, 724, 726, 728, 731, 787, 788, 792, 797, 798, 800, 819, 824, 825, 850, 866, 867, 868, 870, 872, 873, 874, 875, 882, 885, P); Ungureanu M. Gheorghe (748, 799, 823, 827, 834, 864, 871, 872, 873, 874, 937, E: 266, 281); clasa XI-a: Călinescu I. G. Şerban (651, 664, 665, 670, 673, 682, 683, 685, 687, 690, 692, 695, 703, 704, 716, 717, 718, 721, 724, 728, 731, 744, 745, 746, 748, 751, 759, 831, 834, 878, 887, 891, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 937, 939, 940, 941, 942, P); Puşcaşu A. Alexandru (636, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 733, 744, 745, 746, 748, 749, 751, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 777, 778, 787, 788, 792, 795, 800, 804, 810, 813, 817, 819, 822, 823, 824, 827, 831, 834, 835, 838, 839, 842, 845, 846, 848, 852, 854, 853, 855, P); Torjescu Florin (696, 736, 746, 748, 758, 759, 760, 761, 762, 773, 783, 784, 831, 832, 846, 848, 852, 853, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 880, 881, 882, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 895, 896, 897, 900, 902, E: 285, 286, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, P).

PREDEAL. *Şcoala medie Dimitrie Cantemir*, clasa X-a. Budin I. Constantin (662, 740, 748, 754, 757, 765, 766, 767, 768, 769, 772, 774, 776, 825, 864, 871, 872, 873, 875, 876).

RĂDĂUȚI. Clasa X-a. Chifan Aurel (787, 788, 792, 804, 813, 823, 824, 827, 833, 839, 845, 850, 863, 867, 868, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 884, 885, 878, 880, 904, 905, 906, 908, 915, 916, 923, 925, 927, 929, 931, 934, 937, 938, 940, E: 292, 293, 294, 295, 298, 303, 306, 312, 313, E: 269, 270, 276, 277, 285, 286, 288, 289, 290, 291).

RÂMNICUL SĂRAT. *Liceul mixt*, clasa X-a. Dorobăț I. Eftimie (736, 744, 745, 748, E: 244, 248), Stamatiu I. Alexandru (683, 685, 689, 691, 698, 704, 705, 718, 721, 729, 739, 742, 746, 756, 757, 758, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 776, 778, 780, 788, 791, 795, 819, 827, 831, 835, 841, 842, 849, 871, 872, 873, 875, 878, 881, 888, 904, 905, 906, 907, 910, 913, 916, 923, 927, 938, 952, E: 251, 257, 258, 263, 281, 285, 286, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 298, 300, 303, 304, 305, 306, 308, 309, 310, 311, 312, 313, P), Vâlculescu Cezar (718, 729, 739, 742, 757, 764, 765, 766, 776, 781, 819, 831, 835); clasa XI-a, Mocanu Marin (658, 670, 724, 748, E: 206, 236, 248).

RÂMNICUL VÂLCEA. Clasa XI-a, Cocoș N. Ioan (871, 872, 873, 878, 904, 906, 908, 916, 923, 934, 937, 938, 940, E: 305, 306, 309), Paulescu N. Dan (787, 838, 871, 873, 876, 904, 912, E: 243, 248, 258, 260, 266, 271, 292, 294, 303, 305, 306, 309, 311, 314). Școala medie tehnică de comerț, anul II. Ungureanu Elena (871, 873, 876, 904, 912, 914, 916, 925, 937, 940, E: 252, 254, 259, 260, 261, 263, 280, 283, 292, 294, 300, 304, 305, 306, 309, 310, 311, 314, P), Lița I. Constantin (875, 876, 905, 906, 912, 916, 934, 939, 941, 942).

REȘIȚA. Clasa XI-a. Popescu Al. Dan (645, 669, 682, 704, 707, 710, 729, 741, 774, 780, 785, 791, 793, 819, 821, 833, 834, 839, 841, 842, 863, 874, 875, 878, 881, 882, 885, 886, 887, 888, 891, 897, 988, 900, 901, 902, 904, 906, 908, 910, 915, 923, 929, 931, 932, 934, 938, 940, P).

ROMAN. Clasa IX-a. Stoica C. Constantin (774, 775, E: 259, 305, 314).

ROȘIORII DE VEDE. *Liceul mixt*. Miclăuș Vasile (657, 662, 671, 683, 702, 708, 729, 741, 761, 771, 776, 782, 786, 787, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 801, 804, 806, 814, 816, 818, 819, 820, 822, 823, 824, 825, 826, 831, 834, 838, 839, 841, 842, 844, 845, 848, 850, 851, 853, 854, 857, 858, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876).

SIBIU. *Școala medie tehnică de mecanică*, anul I D. Balteș Simion (764, 768, 769, E: 252, 253, 257, 258, 259, 260, 261, 266).

SIGHIȘOARA. Clasa X-a. Borzea Eugen (878, 904, E: 305, 306, 309, 311, 314).

SLATINA. Clasa VII Oporelu. Constantin C. Gheorghe (E: 292, 305, 306, 309, 311); clasa VIII-a. Voloc Nicolae (744, 746, 748, 755, 768, 770); clasa IX-a. Drăganciu Gheorghe (770, 871, 872, 873, E: 243, 245, 257, 260, 261, 262, 263, 265, 266, 268, 270, 271, 274, 280, 281, 286, 292, 294, 305, 306, 314); clasa X-a. Dumitrescu I. Ilie (871, 872, 873, E: 263, 266, 270, 274, 279, 281, 286, 292, 294), Florea I. Ion (651, 670, 703, 704, 708, 714, E: 281).

SUCEAVA. Clasa VIII-a. Apetrei Nicolae (E: 243, 245, 266, 268, 277, 282, 285, 286, 287, 288, 294, 295, 296, 298, 300, 305, 306, 307, 314); clasa IX-a. Tiperciuc Gh. Elena (E: 248, 251, 288, 294, 306, 308); clasa X-a. Budai Teodor (768, 787, 822, E: 255, 256, 259, 272), absolvent Tiperciuc Eugen (888, 904, 905, 906, 908, 915, 940, E: 306, 308).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VI-a. Bendic V. Vasile (871, 837, E: 256, 261, 262, 263, 270, 277, 298, 306); clasa IX-a. Oprea A. Aurelian (650, 651, 652, 653, 654, 659, 661, 665, 675, 682, 711, 712, 728, 764, 768, 782, 801, 823, 839, 864, 869, 871, 872, 873, 875, 904, 905, 906, 908, 911, 923, 929, 930, 938, 940, 972, 973, E: 256, 263, 270, 272, 277, 292, 294, 298, 303, 312, 322, 324), Stoian I. Gheorghe (698, 709, 710, 722, 741, 771, 779, 816, 824, 827, 854, 867, 885, 896, 904, 905, 907, 910, 912, 913, 916, 917, 925, 931, 932, 938, 939, 942, P); clasa X-a. Bunica M. Octavian (775, 797, E: 260, 262, 274), Ionescu I. Ioan (692, 695, 703, 704, 705, 706, 707, 714, 717, 733, 737, 751, 757, 761, 769, 838, 839, 847, 850, 854, 855, 864, 865, 867, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 882, 904, 905, 908, 910, 912, 913, 923, 929, 931, 938), Sipoteanu A. Ioan (873, 876, 913, 937, 939, E: 306, 309, 314); clasa XI-a. Dumitru, Gh. Stan (737, 739, 744, 756, 843), Nica Gh. Ioan. (670 718, 721, 724, 871, 872, 873, 908), absolvent Bălescu Gr. Eftimie (712, 713, 822, 842, 845, 887, 887, 888, 904, 905, 906, 908, 923, P); Școala medie tehnică de petrol, anul IV. Drăgan T. Gheorghe (742, 765, 766, 767, 768, 770, 780, 783, 786, 787, 788, 792, 794, 800, 805, 807, 813, 816, 819, 823, 824, 827, 831, 834, 837, 838, 839, 850).

TÂRGU MUREȘ. Clasa IX-a. Laszlo Ioan (872, E: 268, 269, 278, 286); clasa X-a. Moisoiu Adrian (685, 737, 768, 770 787, 819, 835, 871, 872, 873, 904, 906, 912, 913, 937, 938, E: 251, 257, 260, 261, 266, 268, 271, 274, 286, 292, 298, 306, 309, 312, 314), Zacharias Ștefan (871, 872, 873, 874, 876, 904, 905, 906, 908, 912, 913, 915, 916); clasa XI-a. Pașcanu St. Eugen (648, 675, 703, 705, 707, 715, 716, 724, 737, 746, 748, 768, 749, 770, 771, 774, 776, 780, 783, 787, 788, E: 224, 228, 230, 234, 248, 257, 263, 266, 271, 274, P).

TÂRGU-JIU. Clasa IX-a. Buțurcă Mircea (834, E: 245, 248, 260, 306); clasa X-a. Gornoviceanu Coriolan (794, 863, 871, 872, 873, 916); Surlin Gr. Grigore (905, 906, 927, E: 294, 305); clasa XI-a. Olariu Grigore (703, 710, 733, 743, 752, 753, 764, 765, 766, 767, 768, 770, 775, 776, 777, 778, 779, 807, 813, 816, 819, 822, 823, 825, 834, 878, 879, 885, 887, 888, 893, 897, 898, 900, 901, 904, 906, P); Tivig Constantin (655, 666, 691, 693, 709, 710, 711, 718, 721, 724, 728, 734, 748, 765, 767, 813, 816, 839, 850, 861, 905, 909, 910, 911, 913, 923, 929), Tomescu C. Petre (744, 748, 756, 770, 824, 834, 864, 876, 897, 904, 906).

TECUCI. Clasa IX-a. Morozan Teodor (787, 794, 800, 838, 842, 845, 848, 853, 854, 861, 863, 864, 866, 871, 872, 873, 876, 878, 880, 887, 888, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 923, 925, 926, 927, 929, 930, 931, 936, 937, 938, 939, 940, E: 266, 268, 269, 271, 272, 274, 302, 303, 304, 305, 306, 308, 311, 313, 314); clasa X-a. Corban Adrian (739, 743, 745, 748, 768, 904, 905, 910, 913, 915, E: 250, 252, 254, 258, 259, 261, 306, 309, 312, 313, 314); Micu V. Gheorghe (748, 904, 905, 912, 913, 913, 916, 937, 938, E: 257, 259, 306, 309, 311, 312, 314); clasa XI-a Turcanu D. Ioan (683, 690, 723, 724, 727, 746, 756, 770, 775, 802, 822, 831, 853, 854, 858, 863, 864, 867, 871, 873, 875, 876, 916, 923, 972, 973, 974, 975).

TIMIȘOARA. Clasa VII-a. Arsenovici Tiberiu (742, 765, E: 238, 239, 241, 249, 260, 294, 305, 306, 311); clasa IX-a. Brașovan Ioan (766, 837, 839, 850, 852, 865, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 885, 904, 910, 915 ,928, 938, 940), Chiosa Ioan (888, 909, 908, 911, 913, 915, 917, 923, E: 308), Gheorghiu Monica (944, 945, 946, 950, 959); Școala Pedagogică, anul III. Mettler Martin (871, 872, 873, E: 305, 306, 311).

TULCEA. Clasa IX-a. Slavov Leonid (736, 739, 744, 745, 904, 906, 908, E: 243, 245, 259, 262, 263, 274).

TURNU MĂGURELE. *Şcoala medie tehnică de chimie*, anul I. Colomei Stelian (685, 718, E: 223, 227, 229, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 240, 266, 268, 272, 274, 275, 277, 281, 290, 291, 294, 295, 298, 300, 304, 305, 306, 309); clasa XI-a liceu. Voiculescu P. Stelică (728, 839, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 904, 909, 910, 927, 938, 940, 942).

TURNU SEVERIN. Clasa XI-a. Pârvulescu Emil (709, 710, 711, 752, 758, 768, 783, 792, 839, 842, 850, 853, 854, 861, 863, 864, 867, 868, 871, 872, 873, 875, 876, E: 234, 235, 237, 238, 242, 243, 290, 292, 293, 294, 296, 298, 299, 300), Zorilescu Dan (845, 868, 872, 873, 878, 888, 891, 904, 906, 908, 909, 913, 915, 916, 938, 940, 942).

VASLUI. Clasa XI-a. Baichis Jean (682, 675, 701, 746, 777, 782, 783, 831, 834, 842, 897, 950, 959), Bostan Gh. Emil (704, 707, 751, 757, 759, 769, 770, 787, 845, 878, 925, 942, 964, 971, 972, 973, 974, E: 260, 266, 268, 269, 270, 271, 292, 293, 294, 298, 300, 305, 306, 313).

ZALĂU. Hodiş Gheorghe (816, 888, 904, 905, 906, 907, 910, 911, 913, 915, 916, 930, 937, 938, 939, 940, E: 303, 304, 305, 306, 308, 309, 311, 312, 313, 314).

EVIDENŢIAŢI

Dintre rezolvitorii trecuţi în lista precedentă s'au evidenţiat următorii: *Stanciu N. Toma* (Clasa IX-a, Ploeşti), *Petrică Zamfira* (Clasa X-a D, Centrul 2—10—13 fete, Bucureşti), *Andreescu Gh. Radu* (Clasa X-a L.B. 10, Bucureşti), *Mitu St. Velicu* (Clasa XI-a, Giurgiu), *Miclăuş Vasile* (absolvent, Roşiorii de Vede), *Tofan V. Ioan* (Clasa XI-a, Bacău), *Torjescu Florin* (Clasa XI-a, Ploeşti), *Puşcaşu A. Alexandru* (Clasa XI-a, Ploeşti), *Buzuloiu Vasile* (Clasa IX-a, Oradea), *Andreescu Mircea* (Clasa XI-a, L. B. 10, Bucureşti), *Morozan Teodor* (Clasa IX-a, Tecuci), *Popescu Al. Dan* (Clasa XI-a, Reşiţa), *Stamatiu I. Alexandru* (Clasa X-a, R. Sărat), *Sincan Corneliu* (absolvent L.B. 10, Bucureşti), *Bocu Mircea* (Clasa IX-a, Oradea), *Vasilescu Constantin* (Clasa XI-a, Călăraşi), *Lupuţiu Ion* (Clasa IX-a, Ploeşti), *Călinescu I. Gh. Şerban* (Clasa XI-a, Ploeşti), *Petcu I. Dumitru* (Clasa XI-a, Giurgiu), *Bichir Constantin* (Clasa X-a, Bârlad), *Chifan Aurel* (Clasa X-a, Rădăuţi), *Niculescu Gheroghe* (Clasa X-a, Ploeşti), *Oprea Aurelian* (Clasa IX-a, Turnu Măgurele), *Olariu Grigorie* (Clasa XI-a, Târgu Jiu), *Donescu Şt. Dragomir* (Clasa IX-a, Focşani), *Cetăţeanu Cecilia* (Clasa IX-a, Craiova), *Tănase Dumitru* (Anul III, Şcoala de măsurători terestre, Bucureşti), *Lungu I. Ştefan* (Anul III, Şcoala medie tehnică, Brăila), *Drăgan Marin* (Clasa X-a, Giurgiu), *Stanciu Em. Mirel* (Clasa X-a, Giurgiu).

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— *Rezolvarea* fiecărei probleme trebue făcută separat, cu aplicaţiile necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie, iar fiecare soluţie să fie precedată de numărul de ordine al problemei şi enunţul complect. După soluţionarea problemei, scrieţi citeţ numele, clasa şi şcoala unde urmaţi şi trimiteţi problemele aşezate în ordinea lor numerică.

— *Se mai primesc soluţii* numai la problemele cu numărul de ordine 836 şi următoarele, iar pentru exerciţiile elementare dela E: 290 şi următoarele, adică din ultimele şase numere din R.M.F.

* * *

PREMIILE R.M.F. PE ANUL 1953

— Pentru premierea rezolvitorilor de probleme din R.M.F. pe anul 1953 se va ţine seama de toate soluţiile primite între 1 Noembrie 1952 şi 1 Noembrie 1953 şi anunţate la rubrica rezolvitorilor, de calitatea soluţiilor şi de modul lor de redactare, precum şi de clasa pe care o urmează rezolvitorul.

— *Evidenţiaţii* în ultimile 12 numere ale revistei fiind consideraţi concurenţi la premiile R.M.F. sunt rugaţi să întocmească câte o fişă cuprinzând numele, adresa actuală şi tabel de toate problemele ce au rezolvat în ordinea lor numerică şi anunţate la rubrica rezolvitorilor începând cu numărul 11 din Noembrie 1952, până în prezent.

* * *

— Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste, iar trimiterea lor să se facă odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au soluţionat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica.

— Dorim mai multă colaborare la R.M.F. a profesorilor de matematică şi fizică.

— Fiecare cititor al R.M.F. este rugat a face cunoscută revista şi altor cunoscuţi, pentru a mări astfel numărul colaboratorilor.

— Reclamaţiile de neprimirea R.M.F. sau cereri de numere vechi se pot face Centrului de Difuzare a Presei din Bucureşti, strada Const. Mille nr. 14, telefon 5—28—90.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice şi fizice, articole, dări de seamă asupra activităţii cercurilor de matematică şi fizică pentru elevi, cereri, sugestii şi propuneri, etc. se trimit pe adresa: «*Revista Matematică şi Fizică*», Strada Dionisie Lupu Nr. 40, Raionul Stalin, Bucureşti.

ABONAMENTELE

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru întreprinderi . . . . . Lei 60 anual

Tarif pentru profesori, muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

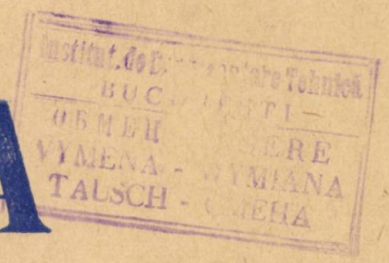
C. 1540. — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Lei 1.—

E 1426
d

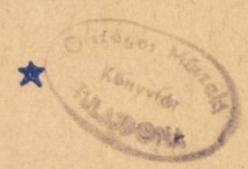
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT



REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET



Trăiască scumpa noastră patrie
Republica Populară Română!

★ ★ ★

ANUL IV

DECEMBRIE 1953

12

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*A şasea aniversare a Republicii Populare Române* ...	297
2.	*Despre principiul lui Toricelli de Alexandru Stoenescu*	300
3.	*Calculul cu diferenţe finite de M. Cotariu*	305
4.	*Probleme rezolvate (755, 776, 799, 809, 810, 813, 816, 818, 822, 826, 829, 832, 835, 836, 837, 839, 840, 844, 850, 851, 852, E: 231, 262, 265, 293)*	313
5.	*Probleme propuse (1117—1139)*	321
6.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 384—E: 400)*	323
7.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	324
8.	*Tabla de materii a Revistei Matematice şi Fizice. Anul IV (1953)*	327

ANUL IV 12 DECEMBRIE 1953

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA; Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul IV, Nr. 12 — Decembrie 1953

Országos Mészeti Könyvtár TULAJDONA

A ŞASEA ANIVERSARE A REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

Cu nestăvilit entuziasm şi cu profundă încredere în justeţea şi invincibilitatea cauzei sale, cu inima plină de bucurie, poporul nostru sărbătoreşte la 30 Decembrie 1953 un eveniment de însemnătate istorică: proclamarea Republicii Populare Române.

La 30 Decembrie 1947 lupta dârză a poporului, condusă de partidul clasei muncitoare, a pus capăt celor 80 de ani de sângeroasă stăpânire a hohenzollern-ilor, de al căror nume va rămâne legat pentru totdeauna, amintirea vie a celor 11.000 de ţărani ucişi în 1907 — răsculaţi împotriva asupririi şi exploatării moşiereşti — sutele de mii de morţi căzuţi jertfe în primul război imperialist în care ţara noastră a fost târîtă de monarhie, măcelărirea muncitorilor la 13 Decembrie 1918 şi în Februarie 1933, înfeudarea ţării jefuitoarelor trusturi imperialiste, înscăunarea dictaturii fasciste şi participarea la războiul cotropitor împotriva Uniunii Sovietice.

Răsturnarea monarhiei — unul dintre cei mai puternici stâlpi ai burgheziei şi moşierimii — şi instaurarea Republicii Populare Române au marcat momentul trecerii întregii puteri în mâinile clasei muncitoare; aceasta a însemnat trecerea dela desăvârşirea revoluţiei burghezo-democratice la revoluţia socialistă.

Veacuri dearândul poporul nostru a fost subjugat de diferiţi cotropitori, a cunoscut diferite orânduiri sociale care întăreau stăpânirea exploatatorilor; veacuri dearândul poporul nostru a luptat pentru libertate şi independenţă, dar abia prin făurirea Republicii Populare a dobândit o patrie adevărată în care el este stăpân, nu tagma jefuitorilor.

Această măreaţă cucerire este consfinţită în Constituţia Republicii Populare Române şi este o urmare a victoriei istorice a Uniunii Sovietice asupra hitlerismului. Eliberând ţara noastră Glorioasa Armată Sovietică a dat putinţa poporului muncitor condus de partid, să doboare dictatura fascistă, să nimicească pe exploatatori şi să făurească statul democrat popular.

Victoriile poporului muncitor în cei şase ani care s'au scurs dela proclamarea Republicii Populare Române demonstrează forţa şi superioritatea statului democrat-popular faţă de statul burghez, demonstrează forţa ideologiei marxist-leniniste care a călăuzit şi călăuzeşte Partidul Muncitoresc Român în construirea şi întărirea statului nostru de democraţie populară.

Superioritatea orânduirii noastre de stat rezultă din faptul că aceasta reprezintă adevărata democraţie, democraţia celor mulţi, rezultă din faptul că întreaga putere de stat, ca şi uzinele, băncile, minele, bogăţiile subsolului, nu mai sunt în mâinile unui grup de exploatatori ci în mâinile milioanelor de oameni ai muncii. Participarea activă a maselor la conducerea treburilor obşteşti garantează tăria statului democrat-popular.

Indeplinind funcţiile dictaturii proletariatului, statul nostru — elementul cel mai important al suprastructurii noastre democratice-populare — a obţinut succese istorice în lupta pentru întărirea şi apărarea independenţei noastre naţionale în lupta pentru reprimarea uneltirilor duşmanilor din afara şi dinăuntrul ţării, care au încercat — prin organizarea unor acte de sabotaj, spionaj şi comploturi criminale — să submineze dezvoltarea tinerii noastre republicii; în lupta pentru lichidarea înapoierii economico-culturale şi construirea unei economii şi culturi noi, socialiste.

Făcând bilanţul celor şase ani, poporul nostru îşi dă seama că strălucitele succese obţinute se datoresc politicii marxist-leniniste a partidului — bazată pe cunoaşterea şi folosirea legilor obiective ale naturii şi economiei, pe experienţa bogată şi glorioasă a marelui partid al lui Lenin şi Stalin, pe ajutorul permanent şi neprecupeţit al Uniunii Sovietice.

Politica partidului nostru, călăuzită pas cu pas de învăţătura atotbiruitoare a dascălilor proletariatului mondial — Marx, Engels, Lenin, Stalin — folosind pe larg experienţa de luptă a Partidului

Comunist al Uniunii Sovietice, s'a dovedit a fi atât în trecut cât şi în anii care au urmat după proclamarea Republicii Populare Române o uriaşă forţă organizatoare şi mobilizatoare, s'a dovedit a fi singura politică pe deplin corespunzătoare intereselor poporului muncitor, verificată de acesta în lupta lui pentru pace şi socialism.

Aplicând cu consecvenţă şi în mod creator această învăţătură, partidul a isbutit prin lupte grele, învingând diferitele obstacole ce-i stăteau în cale, să transforme ţara noastră dintr'o ţară semicolonială a imperialismului — cum era în trecut — dintr'o ţară înapoiată economiceşte într'o ţară independentă, într'o ţară cu o industrie în continuă creştere, cu o agricultură care merge pe drumul mecanizării.

Partidul nostru bazat pe învăţătura marxist-leninistă despre industrializarea socialistă a ţării a dat lovituri sdrobitoare acelora care voiau să-l abată de pe această cale. El a condus cu hotărîre clasa muncitoare în lupta pentru desvoltarea rapidă a industriei mijloacelor de producţie, în reorganizarea pe baze noi, socialiste, a vechilor întreprinderi, în lupta pentru crearea unor noi ramuri industriale, ca de pildă, industria de tractoare, industria de utilaj petrolifer şi minier, industria electrotehnică, industria cinematografică, etc. Ţara noastră, care în trecut, sub stăpânirea burghezo-moşierimii era nevoită să importe până şi ace de cusut, furci şi coase, fabrică azi, tractoare, locomotive, vapoare, utilaj petrolifer etc.

Cu şase ani în urmă, mii de familii de ţărani mai robeau pe moşiile coroanei, iar astăzi, în fostele castele de vânătoare şi în conacele paraziţilor regali sunt instalate sedii ale gospodăriilor colective, cămine culturale, case de naşteri, etc. A fost lichidată clasa moşierilor care a supt veacuri dearândul vlaga şi sângele ţărănimii. Ţăranii muncitori, stăpâni azi pe pământul ce-l muncesc, obţin cu ajutorul statului recolte tot mai bogate.

Cele 9680 de tractoare cu care sunt înzestrate SMT-urile şi alte 4400 de tractoare ale gospodăriilor agricole de stat, cele 2850 semănători, 1440 secerători, 2970 cultivatoare şi alte maşini agricole, puse la îndemâna ţărănimii înlocuiesc plugurile de lemn şi uneltele de muncă înapoiate. Pe bază de liber consimţământ, aproape 300.000 familii de ţărani muncitori au alcătuit peste 1980 de gospodării colective şi aproape 2000 de întovărăşiri agricole care arată zi de zi superioritatea agriculturii socialiste. Alianţa clasei muncitoare cu ţărănimea muncitoare călită în focul luptei pentru lichidarea moşierimii şi îngrădirea chiaburimii este temelia trainică a puterii populare.

Partidul nostru a zdrobit împotrivirea îndârjită a duşmanului de clasă, a demascat şi nimicit acţiunea antipopulară şi antistatală a deviatorilor de dreapta, netezind astfel calea spre obţinerea de noi succese în lupta pentru ridicarea nivelului de trai şi cultură a celor ce muncesc.

Călăuzindu-se în politica sa, după cerinţele economice fundamentale ale socialismului, partidul nostru porneşte dela ideea stalinistă că spre deosebire de producţia capitalistă care urmăreşte realizarea unor profituri maxime din munca celor exploataţi, scopul producţiei socialiste este buna starea clasei muncitoare adică, satisfacerea maximă a nevoilor sale materiale şi culturale.

Plenara lărgită a CC. al P.M.R. din 19—20 August 1953 subliniind succesele şi scoţând la iveală cu curaj lipsurile, a hotărât luarea unei serii de măsuri pentru ridicarea nivelului de trai material şi cultural al oamenilor muncii. In acest scop, comitetul central al partidului şi guvernul au socotit necesar pentru anii 1953—1955 să reducă fondul de acumulare la 27,8% din venitul naţional, iar fondul de consum destinat satisfacerii nevoilor materiale şi culturale ale oamenilor muncii să-l mărească până la 72,2%.

Plecând dela ideea marxist-leninistă că făurirea socialismului este strâns legată de făurirea unei culturi noi, socialistă în conţinut şi naţională în formă, că pătrunderea în masă a ştiinţei şi culturii este un factor de bază în obţinerea unor noi succese în construirea economiei socialiste şi în formarea conştiinţei socialiste a milioanelor de oameni ai muncii, partidul şi guvernul desfăşoară larg revoluţia culturală în ţara noastră. Dintr'un privilegiu al claselor avute — cum era în regimul burghezo-moşieresc — şcoala a devenit azi, un bun al poporului. Ştiinţa, arta şi literatura înfloresc tot mai mult în patria noastră şi se bucură de îndrumarea şi sprijinul permanent al partidului şi guvernului. Milioanele de oameni ai muncii dela oraşe şi sate, care veacuri dearândul au fost ţinute în întuneric de către clasele exploatatoare se ridică la lumină însuşindu-şi cuceririle ştiinţei. Constituţia R.P.R. consfinţeşte dreptul la învăţătură şi cultură pentru toţi cetăţenii; zeci de mii de studenţii şi elevi, fii ai oamenilor muncii primesc burse şi locuesc în căminele statului; se construesc şcoli, se lichidează analfabetismul, plagă moştenită dela regimul trecut.

Pe baza hotărîrii adoptată de plenara din 19—20 August 1953, s'au redus taxele şcolare şi s'a mărit alocaţia pentru elevi şi studenţi; se vor construi noi şcoli şi cămine pentru elevi şi studenţi, noi cluburi şi cămine culturale, biblioteci, cinematografe, teatre şi baze sportive. Se vor îmbunătăţi condiţiile mate-

riale pentru cei ce activează în institutele ministerelor, în presă, radio şi în domeniul artelor.

Burghezia şi moşierimea română au căutat decenii întregi să strivească cultura naţională a poporului, să înăbuşe independenţa sa spirituală. Ştiinţa şi învăţământul, arta şi literatura, aservite claselor exploatatoare, cultivau ploconirea oarbă în faţa apusului imperialist, imitarea servilă a «modului de viaţă» occidental. Împotriva cosmopolitismului predicat de clasele exploatatoare, împotriva încercării lor de desnaţionalizare culturală s'a afirmat orientarea democratică în cultura noastră, orientare care exprima interesele şi năzuinţele poporului. Oameni ca Bălcescu, Eminescu, Grigorescu, Caragiale, Marinescu, Babeş, au luptat pentru promovarea acestei orientări democratice, progresiste.

Construind o cultură socialistă în conţinut şi naţională în formă, poporul nostru înlătură fără cruţare toate rămăşiţele reacţionare care exprimă ideologia capitalistă, însuşindu-şi în acelaş timp, toate elementele progresiste ale culturii trecutului.

Făurirea unei asemenea culturi presupune înarmarea maselor cu singura ideologie ştiinţifică — marxism-leninismul — educarea în spiritul dragostei faţă de Uniunea Sovietică, în spiritul nobilei concepţii a internaţionalismului proletar, al luptei pentru stârpirea naţionalismului burghez din conştiinţa oamenilor şi pentru răspândirea în popor a ştiinţei înaintate.

Pe această linie, sub îndrumarea şi conducerea partidului, s'au obţinut succese remarcabile în toate domeniile vieţii culturale. In ultimii ani, sute de mii de analfabeţi au învăţat să scrie şi să citească, iar învăţământul public de toate gradele a luat o adevărată desvoltare de neconceput în trecut în condiţiile regimului burghezo-moşieresc. Tineretului din ţara noastră i-au fost deschise cele mai largi perspective. El are posibilitatea să studieze în orice şcoală la care năzuieşte, el îşi poate însuşi ştiinţa cea mai înaintată, ştiinţa sovietică. Tineretul nostru, înarmat cu o justă ideologie şi cu temeinice cunoştinţe este chezăşia progresului şi democraţiei.

Festivalul şi Congresul Mondial al Tineretului ţinute în acest an în Capitala republicii noastre, au scos la iveală gigantica forţă de care dispune tineretul lumii în toate domeniile de activitate şi a arătat tuturor cu toată claritatea că unitatea şi înţelegerea între popoare sunt cu putinţă. Deasupra deosebirilor de sisteme sociale de convingeri şi credinţe politice şi religioase, există probleme în care toţi tinerii pot fi de acord. Asemenea probleme sunt pacea, schimburile economice şi cultural-artistice între popoare, întrecerile sportive internaţionale, dreptul tineretului la viaţă liberă şi fericită.

Festivalul a dat prilej zecilor de mii de oaspeţi să se convingă în mod direct de falşitatea propagandei calomnioase dusă de cercurile agresive imperialiste şi de către agenturile lor interne împotriva ţării noastre, prin constatarea faptelor reale, a modului de viaţă din Republica noastră populară. S'a dovedit odată mai mult, că adevărul slujeşte pacea. Oaspeţii au putut constata la faţa locului marile libertăţi şi drepturi ale poporului nostru, ritmul rapid care în ţara noastră a înaintat pe calea desvoltării economice, preocuparea principală a partidului şi guvernului nostru de a asigura ridicarea continuă a nivelului de trai şi de cultură al poporului muncitor.

Cercetătorii ştiinţifici din ţara noastră desfăşoară o bogată activitate punându-şi cunoştinţele şi talentele lor în slujba poporului, concentrându-şi tot mai mult eforturile spre rezolvarea problemelor practice ale construirii socialismului.

Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. creată din iniţiativa partidului sprijină şi îndrumează tineretul nostru studios dornic să-şi îmbogăţească cunoştinţele în domeniul matematicii şi fizicii. Tot mai mulţi tineri sunt antrenaţi în această muncă, tot mai mare este numărul colaboratorilor Revistei de Matematică şi Fizică; ei învaţă cu îndârjire pentru a se pregăti cât mai bine şi pentru a forma cât mai repede cadrele tehnice necesare ţării. Ei îşi dau seama că fizica şi matematica sunt ştiinţele care stau la baza desvoltării tehnicii, iar tehnica înaintată este factor de căpetenie în construirea socialismului, în construirea unei vieţi noi.

Cei şase ani de existenţă ai Republicii Populare Române s'au încheiat cu alegerile de deputaţi în sfaturile populare, cele mai democratice organe ale puterii de stat, baza politică a regimului democrat-popular. Alese la 20 Decembrie 1953, ele sunt chemate să îndeplinească un mare rol organizator în desvoltarea economică şi culturală a regiunilor, raioanelor, oraşelor şi satelor.

Trecând în revistă marilor realizări din toate domeniile de activitate şi continua preocupare a Partidului pentru bunăstarea celor ce muncesc — recentele măsuri cu privire la reducerea impozitului pe salarii şi îmbunătăţirea sistemului de salarizare, la acordarea de credite avantajoase pentru construirea de locuinţe individuale şi colective — poporul nostru îşi îndreaptă gândurile pline de dragoste spre conducătorul său încercat, spre partidul clasei muncitoare. Intre partid, guvern şi popor s'a făurit o unitate indisolubilă care constitue o forţă în stare să birue toate greutăţile şi lipsurile care mai sunt de înfruntat, o forţă în stare să sdrobească

toate uneltirile dușmanului de clasă din interiorul țării, cât și provocările imperialiștilor americani și ale slugilor lor.

Cea de-a șasea aniversare a R.P.R. găsește poporul nostru muncitor în plină luptă pentru construirea socialismului, pentru întărirea economică și politică a patriei.

Devotați cauzei păcii, oamenii muncii din țara noastră, consideră apărarea patriei, a independenței și suveranității sale o datorie sfântă.

Pășind în cel de-al șaptelea an al existenței Republicii Populare Române, poporul nostru are în față perespectivele măreț ale unor noi victorii și realizări pe frontul construcției pașnice. Zorile unei vieți mai bune s'au ridicat deasupra patriei noastre. Un viitor luminos se deschide în fața poporului nostru muncitor. Pentru făurirea acestui viitor merită să ne dăm toate forțele, toate cunoștințele, tot elanul revoluționar!

«Nimic nu va abate — spune tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej — democrația românească în frunte cu avangarda ei comunistă din drumul ei spre eliberarea celor ce muncesc de sub jugul expolatării omului de către om, spre viitorul socialist al României». Sunt cuvinte verificate în practica măreață a construirii socialismului în țara noastră.

DESPRE PRINCIPIUL LUI TORICELLI

Alexandru Stoenescu
profesor la Institutul Politehnic București

Principiul lui *Toricelli* se referă la *determinarea condiției de echilibru* a unui *sistem material* oarecare supus numai *acțiunii greutăților pieselor componente* și având diferite *legături exterioare fără frecări.*

Conform acestui principiu, pentru *starea de echilibru* a unui asemenea sistem, *poziția centrului de greutate al întregului sistem* trebue să fie:

a) cea mai de jos din toate pozițiile învecinate posibile permise de legături;

b) *cea mai de sus* din toate pozițiile învecinate posibile permise de legături;

c) *la un nivel orizontal constant* pentru toate pozițiile învecinate posibile permise de legături.

Cazul *a)* corespunde poziției de *echilibru stabil.*

Un sistem material este în echilibru *stabil,* când îndepărtat puțin din poziția sa de echilibru într'o altă poziție învecinată permisă de legături și lăsat apoi liber, se *reîntoarce* singur în poziția inițială.

Cazul *b)* corespunde poziției de *echilibru instabil* (*labil*).

Un sistem material este în echilibru *instabil,* când îndepărtat puțin din poziția sa de echilibru, nu se mai reîntoarce, *ci se depărtează* de poziția inițială din ce în ce mai mult.

Cazul *c)* corespunde poziției de echilibru *indiferent.*

Un sistem material este în echilibru *indiferent* când îndepărtat puțin din poziția sa de echilibru, *rămâne mai departe în noua poziție.*

Aceste trei cazuri pot fi și altfel definite și anume: un sistem material este în echilibru stabil (respectiv instabil sau indiferent) după cum revine la această poziție (respectiv se depărtează de poziția de echilibru sau rămâne în noua poziție) în urma unor mici viteze date sistemului în poziția sa inițială de echilibru.

Exemple obișnuite pentru ilustrarea acestor cazuri de echilibru sunt date prin fig. 1 și 2.

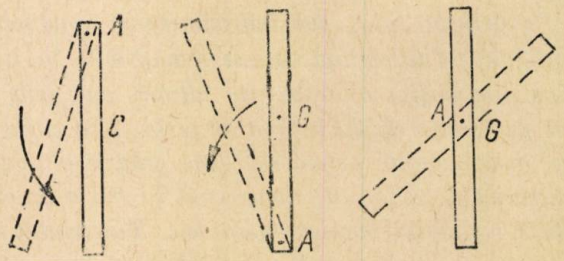


Fig. 1

In fig. 1 este arătată o riglă suspendată într'un cui A și care se află în echilibru stabil, instabil sau indiferent după cum centrul de greutate *G* se află sub cui (poziția cea mai de jos a lui *G*), deasupra cuiului (poziția cea mai de sus a lui *G*) sau chiar coincide cu cuiul (*G* are o poziție fixă).

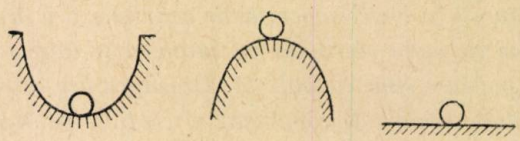


Fig. 2

In fig. 2 se arată o bilă sferică în echilibru stabil când este așezată în fundul unei cupe (suprafață concavă), în echilibru instabil când este așezată

în vârful unei suprafeţe convexe şi în echilibru indiferent când este aşezată pe un plan orizontal.

Unele corpuri pot căpăta toate cele trei feluri de echilibru, spre exemplu, un con circular drept omogen aşezat pe o masă orizontală pe baza sa (echilibru stabil), pe vârf (echilibru instabil) şi pe o generatoare a sa (echilibru indiferent).

Cu titlu de curiozitate menţionăm ca exemplu de echilibru *stabil* experienţa populară dată de fig. 3 cu un dop de care sunt prinse două furculiţe, totul rezemându-se pe un ac cu vârful aşezat pe dopul unei sticle; explicaţia acestui echilibru constă în faptul că centrul de greutate ocupă poziţia cea mai de jos permisă de ac.

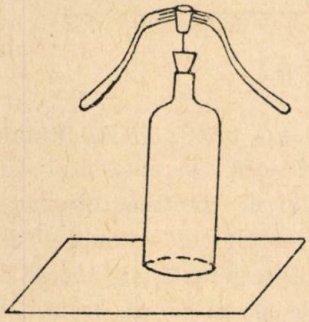


Fig. 3

Cu aceste enunţări, definiţii şi exemple, să mergem mai departe şi să demonstrăm principiul lui Toricelli.

Să considerăm un sistem material în poziţia de echilibru. Fie G_1, $G_2 \ldots$, G_n greutăţile corespunzătoare celor n piese din care este alcătuit sistemul şi h_1, $h_2 \ldots h_n$ distanţele punctelor de aplicaţie ale acestor greutăţi la un plan orizontal fix. Notând cu G greutatea totală şi cu h distanţa punctului său de aplicaţie la acelaşi plan orizontal avem:

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n \qquad (1)$$

$$h = \frac{G_1h_1 + G_2h_2 + G_nh_n}{G_1 + G_2 + \ldots G_n} \qquad (2)$$

(relaţii cunoscute dela *centre de greutate*).

Să aplicăm acum, principiul *deplasărilor virtuale.*

Forţele care se echilibrează sunt greutăţile G_1, $G_2, \ldots G_n$ şi reacţiunile în punctele de legătură.

Dând sistemului o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, reacţiunile dau lucru mecanic nul (sistemul s'a presupus *fără frecare*) aşa încât în expresia lucrului mecanic virtual total $\delta\mathfrak{L}$ nu va interveni decât lucrul mecanic al greutăţilor G_1, $G_2, \ldots G_n$.

Fie δh_1, $\delta h_2, \ldots, \delta h_n$ deplasările virtuale pe verticală corespunzătoare punctelor de aplicaţie al acestor n greutăţi.

Va rezulta pentru greutatea totală G deplasarea δh dată de relaţia:

$$\delta h = \frac{G_1\delta h_1 + G_2\delta h_2 + \ldots + G_n\delta h_n}{G_1 + G_2 \ldots + G_n} \qquad (3)$$

obţinută prin înlocuirea în (2) a lui h, h_1, h_2, etc. prin $h + \delta h$; $h_1 + \delta h_1$; $h_2 + \delta h_2$ etc. şi ţinând apoi seama chiar de (2).

Principiul deplasărilor virtuale ne dă condiţia de echilibru:

$$\delta\mathfrak{L} = G_1\delta h_1 + G_2\delta_2 + \ldots + G_n\delta_n = 0 \qquad (4)$$

Sau ţinând seama de (3)

$$\delta\mathfrak{L} = (G_1 + G_2 + \ldots + G_n)\,\delta h = G\delta h = 0$$

Deoarece $G \neq 0$ rezultă:

$$\delta h = 0 \qquad (5)$$

Relaţia (5) ne demonstrează principiul lui *Toricelli* deoarece ne arată că pentru *poziţia de echilibru* trebue ca $h = h$ *minim* (echilibru *stabil*) sau $h = h$ *maxim* (echilibru *instabil*) sau $h =$ *constant* (echilibru *indiferent*), deoarece numai în aceste cazuri variaţia lui h anume δh este nulă.

Prin urmare, *poziţiile de echilibru* ale sistemului corespund *poziţiilor maxime, minime* sau de *nivel constant ale centrului de greutate al sistemului.*

Acest rezultat are o *imagină geometrică* interesantă; dând sistemului toate deplasările permise de legături, punctul de aplicaţie al centrului de greutate total va descrie *un arc de curbă* sau în unele cazuri, chiar o *curbă închisă.*

Poziţiile de echilibru vor corespunde punctelor de pe această curbă în care se pot duce *tangente orizontale*; în adevăr, în aceste puncte centrul de greutate are poziţia maximă, minimă sau de nivel constant.

Principiul lui *Toricelli* poate fi înţeles şi în mod intuitiv fără demonstraţii, plecând dela o idee simplă, şi anume, că o greutate nu este în echilibru decât aşezată pe un plan orizontal; dacă aşezăm greutatea pe un plan înclinat, ea va cădea prin alunecarea pe planul înclinat (frecarea s'a presupus nulă).

De aceia poziţia de echilibru a sistemului corespunde poziţiei punctului de aplicaţie al greutăţii rezultante pe curba pe care se mişcă acolo unde tangenta este orizontală, (plan orizontal) şi în toate celelalte poziţii, greutatea alunecă pe tangenta oblică la curbă (plan înclinat).

Şi acum, spre a ne da seamă de importanţa principiului lui Toricelli, să trecem la câteva exemple şi aplicaţii.

1°. *Uşa care se închide singură.* Să presupunem o uşă cu balamalele prinse oblic ca în fig. 4. Singura forţă exterioară ce acţionează uşa este greutatea al cărei punct de aplicaţie G descrie în timpul deschiderii uşii, un cerc într'un plan perpendicular pe linia balamalelor, cu centrul în O şi raza OG. Se vede uşor că G (uşa închisă) este poziţia

cea mai de jos (echilibru stabil) şi G' (uşa complect deschisă) este poziţia cea mai de sus (echilibru instabil). Desigur o asemenea uşă lăsată liberă se închide singură.

2°. *Uşa care nu poate să stea închisă.* In fig. 5 este arătat cazul unei uşi care tinde să se deschidă singură. Demonstraţia este identică celei precedente (G poziţia de echilibru instabil când uşa este închisă, iar G' poziţia de echilibru stabil când uşa este complect deschisă).

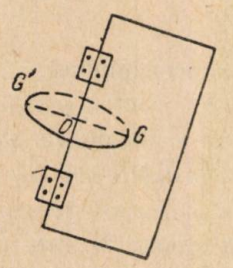


Fig. 4

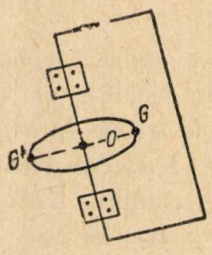


Fig. 5

3°. In fig. 6 este dată jucăria cunoscută sub denumirea « Hopa Mitică » care din orice poziţie se ridică singură vertical. Jucăria este compusă schematic, dintr'un sector sferic complectat cu un corp de revoluţie. Materialele şi dimensiunile sunt astfel alese încât centrul de greutate G se găseşte sub centrul geometric O al sectorului sferic (fig. 6). Se remarcă uşor din fig. 7 şi 8 că în poziţiile date de aceste figuri, se formează cuplul de forţe P (greutatea) şi $N = P$ (reacţiunea mesei orizontale) care aduce jucăria cu axa verticală, prin rotirea ei în jurul punctului de contact A în sensul arătat de săgeată.

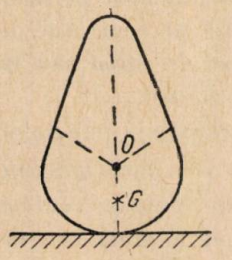


Fig. 6

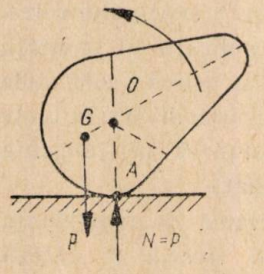


Fig. 7

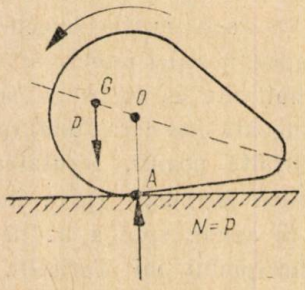


Fig. 8

4°. Un caz deosebit de interesant îl prezintă demonstraţia prin aplicaţia principiului lui *Torricelli* că suprafaţa liberă a unui lichid trebue să fie orizontală. Să considerăm un lichid greu într'un vas paralelipipedic având deocamdată, suprafaţa liberă orizontală (planul P). Centrul său de greutate se va găsi la distanţa $\frac{h}{2}$ de fundul vasului (fig. 9) Să admitem acum că suprafaţa liberă este C. Să notăm cu G greutatea totală a lichidului, cu G_1 greutatea lichidului situat dea-

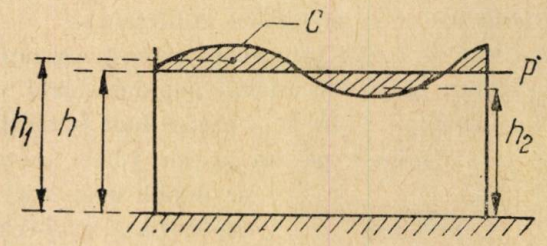


Fig. 9

supra planului P, şi cu $G_2 = G_1$ greutatea lichidului lipsă dedesubtul lui P. Fie $h_1 > h$ cota faţă de fundul vasului al centrului de greutate al greutăţii G_1; $h_2 < h$ cota centrului de greutate al greutăţii G_2 şi z cota corespunzătoare acestor poziţii pentru centrul de greutate al greutăţii totale G.

Avem:

$$z = \frac{G\frac{h}{2} + G_1h_1 - G_2h_2}{G}$$

Dar $G_1 = G_2$:

$$z = \frac{h}{2} + \frac{G_1}{G}(h_1 - h_2) > \frac{h}{2}$$

(deoarece diferenţa $h_1 - h_2$ este pozitivă).

Pentru *minimul* lui z trebue ca $G_1 = G_2 = 0$, adică suprafaţa liberă trebue să fie un *plan orizontal.*

5°. O bară AB grea omogenă, de lungime l se reazemă cu capătul A pe un perete vertical şi pe un cui fix C (distanţa dela cui la perete este a). Să se determine unghiul α pentru poziţia de echilibru, fig. 10).

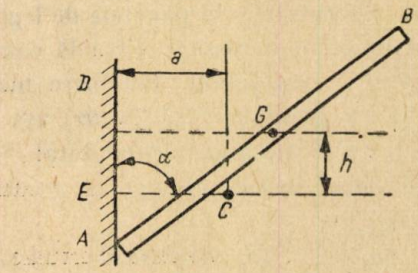


Fig. 10

In raport cu o dreaptă orizontală trecând prin C centrul de greutate G al barei AB are cota h dată de expresia:

$$h = AD - AE = \frac{l}{2}\cos\alpha - a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Conform principiului lui *Toricelli*:

$$\delta h = \left(-\frac{l}{2} \sin\alpha + \frac{a}{\sin^2 \alpha} \right) \delta\alpha = 0.$$

De unde:

$$\sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{2a}{l}}.$$

Poziţia de echilibru este instabilă, G fiind aşezat în punctul cel mai de sus pe traiectoria sa.

6°. O bară omogenă AB de lungime $2a$ şi greutate P este fixată la capătul ei superior printr'o articulaţie de un punct fix A. De capătul ei inferior este prins un fir, trecut peste un scripete mic C aşezat pe aceiaşi orizontală cu A. Firul poartă la extremitatea sa liberă, greutatea Q. Să se afle unghiul $\alpha = \sphericalangle CAB$ ştiind că $CA = AB$ (fig. 11). Să raportăm figura la orizontala AC.

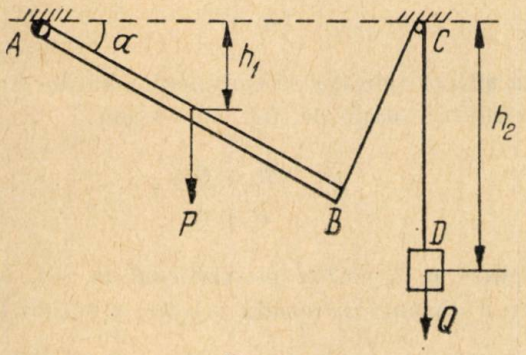


Fig. 11

Centrul de greutate se va găsi la distanţa h de AC dată de relaţia:

$$h = \frac{Ph_1 + Qh_2}{P + Q}.$$

Dar $h_1 = a \sin\alpha$ şi $h_2 = l - 4a \sin\frac{\alpha}{2}$ (l, lungimea firului BCD şi $BC = 4a \sin\frac{\alpha}{2}$). Conform principiului lui *Toricelli* trebue să avem:

$$\delta h = 0 \quad \text{adică} \quad P\delta h_1 + Q\delta h_2 = 0$$

Dar:

$$\delta h_1 = a \cos\alpha \, \delta\alpha \; ; \quad \delta h_2 = -2a \cos\frac{\alpha}{2} \delta\alpha.$$

Rezultă:

$$Pa\cos\alpha = Pa\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = 2aQ\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Sau:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{Q}{P}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

De unde:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + 2P^2}}{2P}. \qquad (6)$$

Figura 11 reprezintă poziţia de echilibru stabil şi corespunde semnului + din formula (6).

Figura 12 reprezintă poziţia de echilibru instabil şi corespunde semnului — din formula (6).

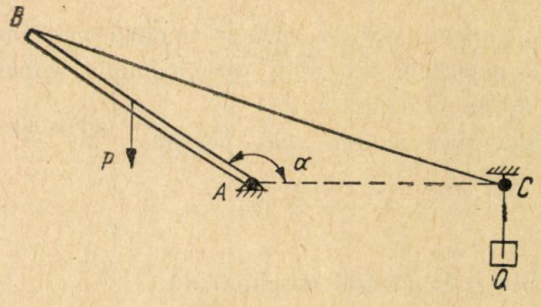


Fig. 12

Vom trece acum să determinăm condiţia de echilibru a maşinilor simple, cu ajutorul principiului lui *Toricelli*.

Multe din maşinile simple nu sunt supuse decât la greutăţile pieselor componente şi la legături cu frecări neglijabile, iar echilibrul lor este adeseori indiferent (deplasate din poziţia de echilibru rămân în echilibru în poziţia deplasată). In asemenea cazuri, conform principiului lui *Toricelli* centrul de greutate al sistemului îşi păstrează nivelul constant, eventual putând rămâne chiar fix. Vom vedea cum aplicând această proprietate, putem determina poziţia de echilibru pentru anumite maşini simple.

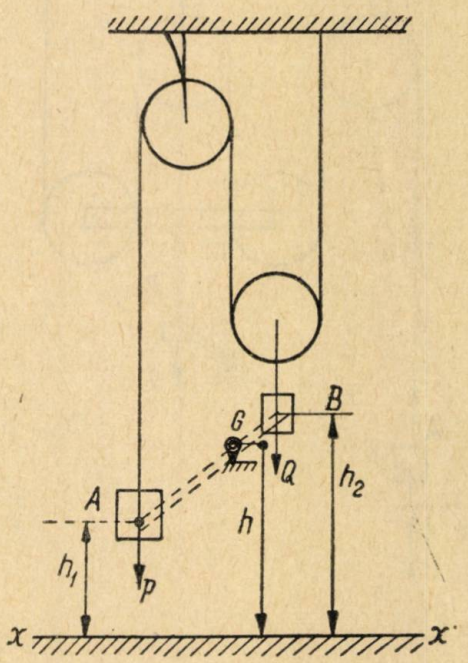


Fig. 13

Astfel, să considerăm sistemul de scripeţi dat de fig. 13, sistem presupus în echilibru. Raportat la orizontala xx', cota h a centrului de greutate

G corespunzător celor două greutăţi P şi Q este dată de relaţia:

$$h = \frac{Ph_1 + Qh_2}{P + Q}.$$

Să punem condiţia ca h să rămână *neschimbat* când deplasăm sistemul, spre exemplu coborîm pe P, cu o distanţa s.

Vom avea pentru noua poziţie:

$$h_1' = h_1 - s \; ; \quad h_2' = h_2 + \frac{s}{2}.$$

Cota h rămânând neschimbată:

$$h = \frac{Ph_1' + Qh_2'}{P + Q} = \frac{P(h_1 - s) + Q\left(h_2 + \frac{s}{2}\right)}{P + Q} =$$

$$= \frac{Ph_1 + Qh_2}{P + Q}$$

rezultă:

$$P = \frac{Q}{2}$$

condiţia de echilibru căutată.

Observăm că centrul de greutate G ocupă o *poziţie fixă în* tot timpul deplasărilor lui P şi Q,

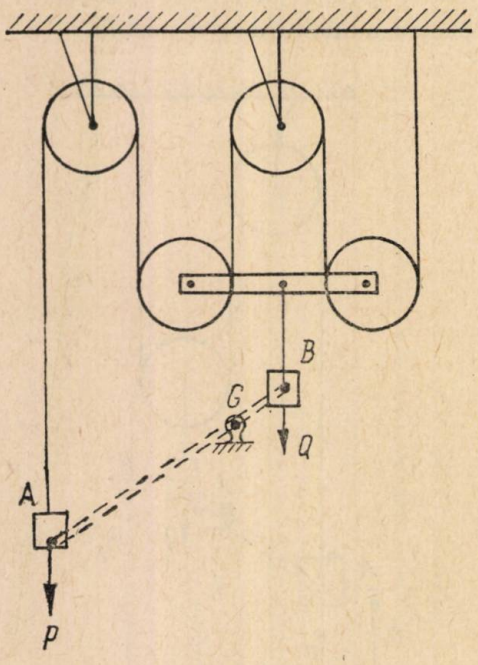


Fig. 14

iar sistemul de scripeţi dat este *echivalent cu o pârghie AGB mobilă în jurul lui G şi aflată în echilibru sub acţiunea forţelor P şi Q* ($AG = 2GB$).

Analog, în cazul sistemului de scripeţi daţi de fig. 14, obţinem condiţia de echilibru $P = \frac{Q}{4}$, centrul de greutate G este deasemenea fix, iar sistemul se comportă ca şi pârghia AGB mobilă în jurul lui G şi în echilibru sub acţiunea lui P şi Q ($AG = 4GB$).

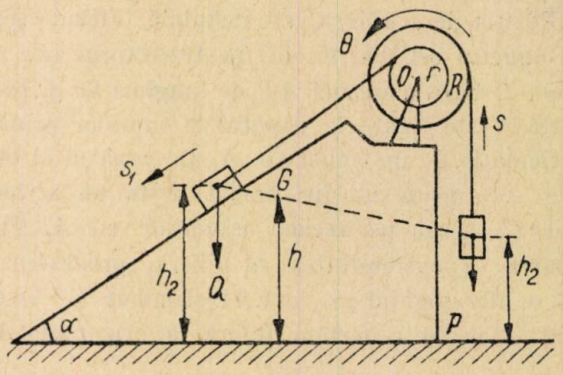


Fig. 15

Ca ultimă aplicaţie să considerăm maşina simplă în echilibru dată de fig. 15. Avem:

$$h = \frac{Ph_1 + Qh_2}{P + Q}.$$

Pentru o deplasare pe verticală în sus, a lui P cu o distanţă s, rezultă o rotire a roţilor O cu un unghi $\theta = \frac{s}{R}$ (R raza roţii mari), o coborîre a firului pe planul înclinat cu o distanţă $s_1 = \theta r = s\frac{r}{R}$ (r raza roţii mici) şi o coborîre pe verticală a greutăţii Q cu $s_1 \sin\alpha = s\frac{r}{R}\sin\alpha$.

Prin această deplasare cotele h_1 şi h_2 au devenit:

$$h_1' = h_1 + s \; ; \quad h_2' = h_2 - s\frac{r}{R}\sin\alpha.$$

Cota h trebuind să rămână aceiaşi, avem:

$$h = \frac{P(h_1 + s) + Q\left(h_2 - s\frac{r}{R}\sin\alpha\right)}{P + Q} = \frac{Ph_1 + Qh_2}{P + Q}$$

de unde:

$$P = Q\frac{r}{R}\sin\alpha$$

condiţia de echilibru căutată.

CALCULUL CU DIFERENȚE FINITE

M. Cotariu
asistent la Institutul Politehnic București

1°. Tehnica pune matematicii o serie întreagă de probleme cu caracter pur practic cum ar fi: problema alcătuirii tabelelor, rezolvarea numerică a ecuațiilor cu coeficienți numerici, problema interpolării, etc.

Pentru rezolvarea acestor probleme, de o mare eficacitate este calculul cu diferențe finite.

2°. *Definiții.* Fie șirul de $n+1$ cantități:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_i,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n \quad (i \leqslant n) \tag{1}$$

Să scădem din fiecare cantitate pe aceea dinaintea ei și să notăm aceste diferențe cu litera grecească Δ (delta mare) urmată de scăzătorul respectiv.

Căpătăm în acest mod un nou șir:

$$\begin{aligned} &\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots \\ &\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

format din n cantități noi, numite diferențele de ordinul întâi ale cantităților date (1).

Deci *numim diferența de ordinul I a unui termen al șirului* (1), *diferența dintre termenul următor și acel termen:*

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \tag{3}$$

Să considerăm acum șirul (2) format din diferențele de ordinul I-ale cantităților (1):

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \ldots,\ \Delta y_i,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} \quad (i \leqslant n-1) \tag{4}$$

Putem calcula în mod analog, diferențele termenilor acestui șir:

$$\begin{aligned} &\Delta(\Delta y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta(\Delta y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \ldots \\ &\ldots,\ \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,\ \ldots, \\ &\Delta(\Delta y_{n-2}) = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Convenind să notăm:

$$\Delta(\Delta y_i) = \Delta^2 y_i \tag{6}$$

vom căpăta șirul:

$$\Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y_i,\ \ldots,\ \Delta^2 y_{n-2} \quad (i \leqslant n-2) \tag{7}$$

care cuprinde $n-1$ cantități, numite diferențele de ordinul II ale cantităților (1).

Calculând diferențele de ordinul I ale termenilor șirului (7) vom obține șirul:

$$\begin{aligned} &\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0\ ; \\ &\Delta^3 y_1 = \Delta(\Delta^2 y_1) = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \ldots \\ &\ldots;\ \Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i; \ldots \\ &\ldots;\ \Delta^3 y_{n-3} = \Delta(\Delta^2 y_{n-3}) = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}; \end{aligned} \tag{8}$$

adică:

$$\Delta^3 y_0,\ \Delta^3 y_1,\ \Delta^3 y_2, \ldots,\ \Delta^3 y_i, \ldots,\ \Delta^3 y_{n-3} \quad (i \leqslant n-3) \tag{8'}$$

conținând $n-2$ termeni.

In mod analog, calculând diferențele de ordinul I ale diferențelor de ordinul III, obținem diferențele de ordinul IV:

$$\Delta^4 y_0,\ \Delta^4 y_1, \ldots,\ \Delta^4 y_i, \ldots,\ \Delta^4 y_{n-4} \quad (i \leqslant n-4). \tag{9}$$

Apoi diferențele de ordinul V, VI și așa mai departe.

Șirul diferențelor de ordinul p va fi:

$$\begin{aligned} &\Delta(\Delta^{p-1} y_0) = \Delta^{p-1} y_1 - \Delta^{p-1} y_0; \\ &\Delta(\Delta^{p-1} y_1) = \Delta^{p-1} y_2 - \Delta^{p-1} y_1; \ldots; \Delta(\Delta^{p-1} y_i) = \\ &= \Delta(\Delta^{p-1} y_{i+1}) - \Delta^{p-1} y_i; \ldots; \Delta(\Delta^{p-1} y_{n-p}) = \\ &= \Delta^{p-1} y_{n-p+1} - \Delta^{p-1} y_{n-p} \end{aligned} \tag{10}$$

și va conține $n-p+1$ termeni:

$$\Delta^p y_0,\ \Delta^p y_1, \ldots,\ \Delta^p y_i, \ldots,\ \Delta^p y_{n-p} \quad (i \leqslant n-p) \tag{10'}$$

Termenii șirului (10') se numesc diferențele de ordinul p ale termenilor șirului (1).

3°. Cu șirurile (1), (4), (7), (8'), (9), (10') etc. putem forma următorul tablou (T_1):

(T_1)

Δ^0	y_0	y_1	y_2	y_3	.....	y_i	..... y_n
Δ^1	Δy_0	Δy_1	Δy_2	Δy_3	.....	Δy_i	..... Δy_{n-1}
Δ^2	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^2 y_3$	.....	$\Delta^2 y_i$	..... $\Delta^2 y_{n-2}$
Δ^3	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^3 y_3$	.....	$\Delta^3 y_i$	..... $\Delta^3 y_{n-3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
Δ^p	$\Delta^p y_0$	$\Delta^p y_1$	$\Delta^p y_2$	$\Delta^p y_3$	.....	$\Delta^p y_i$	..... $\Delta^p y_{n-p}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	
Δ^{n-3}	$\Delta^{n-3} y_0$	$\Delta^{n-3} y_1$	$\Delta^{n-3} y_2$	$\Delta^{n-3} y_3$			
Δ^{n-2}	$\Delta^{n-2} y_0$	$\Delta^{n-2} y_1$	$\Delta^{n-2} y_2$				
Δ^{n-1}	$\Delta^{n-1} y_0$	$\Delta^{n-1} y_1$					
Δ^n	$\Delta^n y_0$						

Cercetând acest tablou observăm următoarele caracteristici: *a)*. Cantităţile din primul rând (linie) constitue termenii daţi sau diferenţele de ordinul O, cantităţile din rândul doi constitue diferenţele de ordinul I, cele din rândul trei constitue diferenţele de ordinul II şi aşa mai departe.

b) Fiecare rând are mai puţin un termen decât rândul precedent, deci vom avea: $n+1$ elemente, n diferenţe de ordinul I, $(n-1)$ diferenţe de ordinul II,..., $(n-p+1)$ diferenţe de ordinul p, $(n \geqslant p)$,..., patru diferenţe de ordinul $n-3$ $(n \geqslant 3)$, trei diferenţe de ordinul $(n-2)$ $(n \geqslant 2)$, 2 diferenţe de ordinul $(n-1)$ $(n \geqslant 1)$ şi o diferenţă de ordinul n $(n \geqslant 0)$.

c) Fiecare coloană conţine diferenţe succesive (dela diferenţa de ordinul O până la aceea de ordinul $(n-k)$ pentru termenul y_k) ale aceluiaşi termen din şirul (1).

d). Un termen oarecare al tabloului, în afară de termenii $y_0, y_1, \ldots, y_n$ care sunt daţi, se obţine scăzând termenul de deasupra din vecinul său din dreapta, conform definiţiei.

4°. *Observare.* Din cauza simetriei liniilor şi a coloanelor dintr'un tablou, putem forma tabloul diferenţelor, schimbând în tabloul (T_1) liniile cu coloanele între ele. Obţinem astfel:

(T_2)

Δ^1	Δ^0	Δ^2	Δ^3	Δ^p	Δ^{n-3}	Δ^{n-2}	Δ^{n-1}	Δ^n
y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^p y_0$ ...	$\Delta^{n-3} y_0$	$\Delta^{n-2} y_0$	$\Delta^{n-1} y_0$	$\Delta^n y_0$
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^p y_1$ ...	$\Delta^{n-3} y_1$	$\Delta^{n-2} y_1$	$\Delta^{n-1} y_1$	
y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^p y_2$ ...	$\Delta^{n-3} y_2$	$\Delta^{n-2} y_2$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				
y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^p y_i$ ...				
⋮	⋮	⋮	⋮					
y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$						
y_{n-1}	Δy_{n-1}							
y_n								

Observaţiile (a), (b), (c), referitoare la tabloul (T_1) sunt valabile şi pentru tabloul (T_2) schimbând cuvintele linie şi coloană între ele.

Observaţia (*d*) devine:

(*d'*). Un termen oarecare al tabloului (T_2), în afară de termenii daţi $y_0, y_1, \ldots, y_n$, se capătă scăzând termenul din stânga lui din cel de sub acesta.

In cele ce urmează ne vom referi la tabloul (T_2) care e mai des întâlnit în practică.

5°. *Exemplu.* Fie dat şirul: 25, 13, 9, 8, 15, −7, 19, 36, −2, 4.

Să formăm tabloul (T_2):

Sume	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9
− 1631	25	−12	8	− 5	10	−52	208	−612	1409	−2610
− 677	13	− 4	3	5	−42	156	−404	797	−1201	−2610
− 166	9	− 1	8	−37	114	−248	393	−404	208	
63	8	7	−29	77	−134	145	−11	−219		
129	15	−22	48	−57	11	134	186			
109	− 7	26	− 9	−46	145	135				
80	19	17	−55	99	104					
42	36	−38	44	36						
4	−2	6	18							
4	4	−21								
Sume	120									

6°. *Exerciţii.* 1. Se dă şirul −29, −14, 13, 0, 2, −1, 1, −1, 7, 5, 4, 2, să se formeze tabloul diferenţelor (T_2).

2. Să se arate că numerele pentru care diferenţele de ordinul II sunt nule sunt în progresie aritmetică. (Pornind dela această observaţie se poate spune că diferenţele sunt o generalizare a progresiilor aritmetice).

3. Să se formeze tabloul (T_2) pentru puterile succesive ale lui 2. Să se arate că toate coloanele sunt identice.

4. Să se calculeze diferenţele de diferite ordine ale termenilor progresiei geometrice având primul termen 1 şi raţia 3.

Să se arate că diferenţele de acelaşi ordin sunt în progresie geometrică cu raţia 3, la fel diferenţele succesive ale aceluiaşi termen, dar cu raţia 2. Să se arate deasemeni că $\Delta^p y_i = 2^p \cdot 3^i$ şi $\Delta^k J_k$ sunt puterile succesive ale lui 6.

5. Generalizarea exerciţiului precedent. Să se calculeze diferenţele de diferite ordine ale progresiei geometrice cu primul termen a şi raţia q. Să se arate că diferenţele de acelaş ordin sunt în progresie geometrică cu raţia q, iar diferenţele succesive ale aceluiaşi termen sunt în progresie geometrică cu raţia $(q-1)$. Să se găsească expresia unei diferenţe oarecare $\Delta^p y_i$. Să se arate că $\Delta^k y_k = a[q(q-1)]^k$.

6. Să se calculeze diferenţele succesive ale şirului lui Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . Să se arate că diferenţele de acelaşi ordin sunt iarăşi termeni ai şirului lui F i b o n a c c i.

7. Să se formeze tabloul (T_2) pentru şirul inverselor numerelor naturale.

7°. *Proprietăţi ale tabloului* (T_2).

Vom pune în evidenţă câteva proprietăţi ale tabloului (T_2). *a*). Să adunăm elementele coloanei a II, adică diferenţele de ordinul I, deci să calculăm suma $\Sigma\Delta^1$. Vom scrie expresiile diferenţelor de ordinul I şi le vom aduna:

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\
\Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\
&\vdots \\
\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\
&\vdots \\
\Delta y_{n-2} &= y_{n-1} - y_{n-2} \\
\Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1} \\
\hline
\Sigma\Delta^1 &= y_n - y_0
\end{aligned} \tag{11}$$

Deci *suma diferenţelor de ordinul I, e egală cu diferenţa dintre ultimul şi primul termen.*

b) Să calculăm suma diferenţelor de ordinul II (suma termenilor din coloana a treia a lui (T_2), adică $\sum\Delta^2$).

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \\
&\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \\
&\vdots \\
&\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\
&\vdots \\
&\Delta^2 y_{n-3} = \Delta y_{n-2} - \Delta y_{n-3} \\
&\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \\
&\overline{\sum\Delta^2 = \Delta y_{n-1} - \Delta y_0 = (y_n - y_{n-1}) -} \\
&-(y_1 - y_0) = y_n - y_{n-1} - y_1 + y_0
\end{aligned} \tag{12}$$

Deci *suma diferenţelor de ordinul II este egală cu diferenţa dintre ultima şi prima diferenţă de ordinul I.*

c) Să calculăm suma diferenţelor de ordinul p (suma termenilor coloanei $(p+1)$ a lui (T_2) adică $\sum\Delta^p$).

$$\begin{aligned}
&\Delta^p y_0 = \Delta^{p-1} y_1 - \Delta^{p-1} y_0 \\
&\Delta^p y_1 = \Delta^{p-1} y_2 - \Delta^{p-1} y_1 \\
&\vdots \\
&\Delta^p y_{n-p} = \Delta^{p-1} y_{n-p+1} - \Delta^{p-1} y_{n-p} \\
&\overline{\sum\Delta^p = \Delta^{p-1} y_{n-p+1} - \Delta^{p-1} y_0}
\end{aligned} \tag{13}$$

Deci *suma diferenţelor de ordinul p e egală cu diferenţa dintre ultima şi prima diferenţă de ordinul* $(p-1)$.

d) Mai mult de cât atât, putem calcula nu numai suma tuturor diferenţelor de un acelaşi ordin dat, ci chiar suma numai a unora din diferenţele de un anumit ordin, însă consecutive.

De exemplu să calculăm $\sum_{k=i}^{k=l} \Delta^p y_k$

$$\begin{aligned}
&\Delta^p y_i = \Delta^{p-1} y_{i+1} - \Delta^{p-1} y_i \\
&\Delta^p y_{i+1} = \Delta^{p-1} y_{i+2} - \Delta^{p-1} y_{i+1} \\
&\vdots \\
&\Delta^p y_l = \Delta^{p-1} y_{l+1} - \Delta^{p-1} y_l \\
&\overline{\sum_{k=i}^{k=l} \Delta^p y_k = \Delta^{p-1} y_{l+1} - \Delta^{p-1} y_i}
\end{aligned} \tag{14}$$

Deci *suma unor diferenţe consecutive de ordinul p este egală cu diferenţa dintre ultima şi prima diferenţă de ordinul* $(p-1)$, *care au intervenit la formarea acestor diferenţe.*

e) Să calculăm suma diferenţelor succesive ale aceluiaşi termen (suma termenilor din aceeaşi linie a tabloului T_2), adică $\sum_{k=0}^{k=n-i} \Delta^k y_i$ $(i = \text{const.})$

Ştim că:

$$\Delta^{p+1} y_{i-1} = \Delta^p y_i - \Delta^p y_{i-1}$$

Deci

$$\Delta^p y_i = \Delta^{p+1} y_{i-1} + \Delta^p y_{i-1} \qquad (15)$$

făcând pe $p = 0, 1, 2, 3, \ldots n-1$, avem:

$$\Delta^0 y_i = \Delta y_{i-1} + \Delta^0 y_{i-1}$$

$$\Delta y_i = \Delta^2 y_{i-1} + \Delta y_{i-1}$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta^3 y_{i-1} + \Delta^2 y_{i-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^{n-1} y_i = \Delta^{n-i+1} y_{i-1} + \Delta^{n-i} y_{i-1}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-i} \Delta^k y_i = 2 \sum_{k=0}^{k=n-i+1} \Delta^k y_{i-1} - \left(\Delta^{n-i+1} y_{i-1} + \Delta^0 y_{i-1}\right) \qquad (15')$$

deci:

Suma diferențelor de toate ordinele posibile ale aceluiași element (suma termenilor depe aceeași linie) e egală cu de două ori suma diferențelor de toate ordinele posibile ale elementului precedent (de două ori suma termenilor din linia de deasupra) minus suma diferențelor extreme ale termenului precedent (suma termenilor extremi din linia precedentă).

f) Să calculăm suma tuturor termenilor tabloului (T_2):

Conform punctului precedent avem pentru fiecare rând:

$$\Sigma\Delta^k y_0 = \Sigma\Delta^k y_0$$

$$\Sigma\Delta^k y_1 = 2\Sigma\Delta^k y_0 - \left(y_0 + \Delta^n y_0\right)$$

$$\Sigma\Delta^k y_2 = 2\Sigma\Delta^k y_1 - \left(y_1 + \Delta^{n-1} y_1\right)$$

$$\Sigma\Delta^k y_3 = 2\Sigma\Delta^k y_2 - \left(y_2 + \Delta^{n-2} y_2\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma\Delta^k y_{n-1} = 2\Sigma\Delta^k y_{n-2} - \left(y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-2}\right);$$

$$y_n = 2\Sigma\Delta^k y_{n-1} - \left(y_{n-1} + \Delta y_{n-1}\right)$$

$$y_n = \sum_i \left(\Sigma\Delta^k y_i\right) - \left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right) - \left(\Delta^n y_0 + \Delta^{n-1} y_1 + \ldots + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta y_{n-1}\right) + \Sigma\Delta^k y_0;$$

deci:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{k=0}^{k=n-i} \Delta^k y_i = \sum_{i=0}^{i=n} y_i + \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta^{n-i} y_i - \sum_{k=0}^{k=n} \Delta^k y_0 \qquad (16)$$

Adunând în ambii membri y_n avem:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=n-i} \Delta^k y_i = \sum_{i=0}^{i=n} y_i + \sum_{i=0}^{i=n} \Delta^{n-i} y_i - \sum_{k=0}^{k=n} \Delta^k y_0. \qquad (16')$$

Insă $\sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=n-i} \Delta^k y_i$ înseamnă toți termenii tabloului, $\sum_{i=0}^{i=n} y_i$ înseamnă suma tuturor elementelor date, $\sum_{i=0}^{i=n} \Delta^{n-i} y_i$ înseamnă suma tuturor elementelor de pe diagonală și $\sum_{k=0}^{k=n} \Delta^k y_0$ suma tuturor elementelor din prima linie:

Deci:

Suma tuturor elementelor tabloului este egală cu suma termenilor dați plus suma cantităților de pe diagonală (a nu se uita că y_n intră de două ori și ca termen în coloana I și ca termen în diagonală), mai puțin suma cantităților din primul rând.

8°. *Verificarea tabloului* (T_2).

Având în vedere proprietățile (*a*) . . . (*f*) ale tabloului (T_2) putem face diferite verificări. De exemplu: adunăm în parte fiecare coloană și fiecare rând și vedem dacă proprietățile (*a*) . . . (*f*) sunt îndeplinite. In caz negativ înseamnă că în tablou s'a strecurat o eroare.

9°. *Exemplu.*

Revenind la exemplul studiat mai sus să calculăm sumele pe linii și coloane și să le scriem sub coloana respectivă și la stânga rândului respectiv (a se vedea în exemplul precedent cantitățile închise în dreptunghiurile îngroșate).

Observăm relativ la proprietățile (a), (b), (c):

$\Sigma\Delta^1 = -21 = 4 - 25$

$\Sigma\Delta^2 = 18 = 6 - (-12)$

$\Sigma\Delta^3 = 36 = 44 - 8$

$\Sigma\Delta^4 = 104 = 99 - (-5)$

$\Sigma\Delta^5 = 135 = 145 - 10$

$\Sigma\Delta^6 = 186 = 134 - (-52)$

$\Sigma\Delta^7 = -219 = -11 - 208$

$\Sigma\Delta^8 = 208 = -404 - (-612)$

$\Sigma\Delta^9 = -2610 = -1201 - 1409$

Relativ la proprietatea (*e*) avem:

$\Sigma\Delta^k y_1 = -677 = 2(-1631) - (25 - 2610) = -3262 + 2585$

$\Sigma\Delta^k y_2 = -166 = 2(-677) - (13 - 1201) = -1354 + 1188$

$\Sigma\Delta^k y_3 = 63 = 2(-166) - (9 - 404) = -332 + 395$

$\Sigma\Delta^k y_4 = 129 = 2 \times 63 - (8 - 11) = 126 + 3$

$\Sigma\Delta^k y_5 = 109 = 2 \times 129 - (15 + 134) = 258 - 149$

$\Sigma\Delta^k y_6 = 80 = 2 \times 109 - (-7 + 145) = 218 - 138$

$\Sigma\Delta^k y_7 = 42 = 2 \times 80 - (19 + 99) = 160 - 118$

$\Sigma\Delta^k y_8 = 4 = 2 \times 42 - (36 + 44) = 84 - 80$

$\Sigma\Delta^k y_9 = 4 = 2 \times 4 - (-2 + 6) = 8 - 4.$

Relativ la proprietatea (f):

Suma tuturor termenilor tabloului o căpătăm adunând sumele tuturor termenilor rândurilor sau coloanelor:

$$\Sigma \text{ col. I} + \Sigma \text{ diag.} - \Sigma \text{ rândul I} =$$
$$= 120 - 3794 - (-1631) = -2043.$$

Observăm că toate proprietăţile se verifică, deci tabloul e bine alcătuit.

10°. *Exerciţii.*

8. Să se verifice proprietăţile tablourilor din exerciţiile 1, 3, 6.

9. Să se formeze tabloul (T_2) pentru şirul:

$$C_5^5;\ C_6^5;\ C_7^5;\ C_8^5;\ C_9^5;\ C_{10}^5.$$

Să se verifice proprietăţile tabloului.

10. Formând tabloul (T_2) pentru şirul

$$C_n^n;\ C_{n+1}^n;\ C_{n+2}^n, \ldots, C_{2n}^n$$

şi aplicând proprietăţile enunţate să se demonstreze relaţiile:

$$a)\quad \sum_{k=n}^{k=2n-1} C_k^{n-1} = C_{2n}^n - C_n^n$$

$$b)\quad \sum_{k=n+p}^{k=m} C_k^{n-i} = C_{m+1}^{n-i+1} - C_{n+p-1}^{n-i+1} \quad (m \leqslant 2n-i)$$

$$c)\quad \sum_{i=n}^{i=2n} \sum_{k=i-n}^{k=n} C_i^k = \sum_{i=2n}^{i=2n} C_i^n + \sum_{i=n}^{i=2n} C_i^{i-n} - \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i.$$

11°. *Simbolul* Δ *ca operator.*

Am văzut că

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

deci Δ urmat de un termen al unui şir indică o operaţie şi anume aceea de scădere a termenului respectiv din cel ce urmează.

Să arătăm că simbolul Δ se comportă ca orice cantitate algebrică, adică e supus legii distributivităţii:

$$\Delta(a_n + b_n + c_n) = \Delta a_n + \Delta b_n + \Delta c_n$$

legii comutativităţii când e combinat cu o constantă:

$$\Delta a y_i = a \Delta y_i$$

şi legii expenenţiale

$$\Delta^m \cdot \Delta^n = \Delta^{m+n}.$$

In adevăr:

$$\Delta(a_n + b_n + c_n) = (a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1}) -$$
$$-(a_n + b_n + c_n) = (a_{n+1} - a_n) + \qquad (17)$$
$$+ (b_{n+1} - b_n) + (c_{n+1} - c_n) = \Delta a_n + \Delta b_n + \Delta c_n$$

Deci:

Diferenţa unei sume de termeni este egală cu suma diferenţelor termenilor sumei.

De asemeni:

$$\Delta a y_i = a y_{i+1} - a y_i = a(y_{i+1} - y_i) = a \Delta y_i \qquad (18)$$

Deci:

Diferenţa produsului dintre o constantă şi o cantitate variabilă este egală cu produsul dintre constantă şi diferenţa variabilei. In ceeace priveşte formula:

$$\Delta^m \cdot \Delta^n = \Delta^{m+n}. \qquad (19)$$

aceasta e valabilă pe baza definiţiei diferenţelor succesive. In concluzie Δ se comportă ca orice cantitate algebrică şi la sfârşitul calculelor trebue să-l interpretăm conform definiţiei lui, (ca diferenţă între termenul ce urmează şi respectivul). Spunem atunci că Δ este un operator.

12°. *Operatorul* $(1 + \Delta)$.

Am văzut că $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ care se poate scrie:

$$y_i + \Delta y_i = y_{i+1}$$

sau simbolic

$$(1 + \Delta) y_i = y_{i+1}. \qquad (20)$$

Relaţia aceasta ne arată că operatorul $(1 + \Delta)$ aplicat unui termen al şirului (1) semnifică termenul următor al aceluiaşi şir. Altfel spus:

Operatorul $(1+\Delta)$ *măreşte cu o unitate indicele termenului asupra căruia se aplică.*

Simbolul $(1+\Delta)$ fiind format din Δ care se comportă algebric mărit cu o unitate, se va comporta şi el însuşi ca orice cantitate algebrică, având grija ca la sfârşitul calculului, să-i redăm semnificaţia respectivă.

13°. *Câteva formule importante.*

Ne propunem să găsim un termen oarecare al şirului (1) cunoscând numai diferenţele succesive ale primului termen.

Am văzut că:

$$y_1 = (1 + \Delta) y_0$$
$$y_2 = (1 + \Delta) y_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_i = (1 + \Delta) y_{i-1}$$

înmulţind aceste relaţii:

$$y_1 y_2 \ldots y_i = (1 + \Delta)^i \cdot y_0 y_1 \ldots y_{i-1}$$

deci

$$y_i = (1 + \Delta)^i y_0 \qquad (21)$$

desvoltând după formula binomului:

$$y_i = y_0 + C_i^1 \Delta y_0 + C_i^2 \Delta^2 y_0 + \ldots + C_i^k \Delta^k y +$$
$$+ \ldots + C_i^i \Delta^i y_0 = \sum_{k=0}^{k=i} C_i^k \Delta^k y_0 \qquad (22)$$

deci, *diferenţa de ordinul i a unui termen se obţine desvoltând binomul* $(1 + \Delta)^i y_0$ *şi considerând puterile lui* Δ *ca ordine de diferenţe.*

Dacă vrem să obținem pe y_t în funcție de diferențele succesive ale lui y_k $(k < i)$ procedăm astfel:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= (1+\Delta)\, y_k \\ y_{k+2} &= (1+\Delta)\, y_{k+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_i &= (1+\Delta)\, y_{i-1} \end{aligned}$$

$$y_{k+1}\, y_{k+2} \cdots y_i = (1+\Delta)^{i-k} y_k\, y_{k+1} \cdots y_{i-1}$$

$$y_i = (1+\Delta)^{i-k} y_k \tag{23}$$

adică

$$\begin{aligned} y_i &= y_k + C^1_{i-k} \Delta y_k + C^2_{i-k} \Delta^2 y_k + \ldots \\ &\ldots + C^p_{i-k} \Delta^p y_k + \ldots + C^{i-k}_{i-k} \Delta^{i-k} y_k = \\ &= \sum_{p=0}^{p=i-k} C^p_{i-k} \Delta^p y_k \,. \end{aligned} \tag{24}$$

Să rezolvăm acum următoarea problemă:

Ni se dau toți termenii șirului (1) și se cere expresia unei diferențe oarecare a primului termen, de ex. $\Delta^i y_0$.

Avem:

$$\Delta = (1+\Delta) - 1$$

deci:

$$\Delta^i y_0 = [(1+\Delta) - 1]^i\, y_0 \tag{23}$$

desvoltând după formula binomului:

$$\begin{aligned} \Delta^i y_0 &= (1+\Delta)^i y_0 - C^1_i (1+\Delta)^{i-1} y_0 + \\ &+ C^2_i (1+\Delta)^{i-2} y_0 - \ldots \\ &\ldots + (-1)^p C^p_i (1+\Delta)^{i-p} y_0 + \ldots \\ &\ldots + (-1)^i C^i_i\, y_0 = \\ &+ \sum_{p=0}^{p=i} (-1)^p C^p_i (1+\Delta)^{i-p} y_0 \end{aligned} \tag{24}$$

Dar ținând seama de semnificația operatorului $(1+\Delta)$:

$$\begin{aligned} \Delta^i y_0 &= y_i - C^1_i\, y_{i-1} + C^2_i\, y_{i-2} - \ldots \\ &\ldots + (-1)^p C^p_i\, y_{i-p} + \ldots + (-1)^i C^i_i\, y_0 = \\ &= \sum_{p=0}^{p=i} C^p_i\, y_{i-p} = (y-1)^i ; \end{aligned} \tag{25}$$

adică:

Diferența de ordinul i a primului termen se află desvoltând binomul $(y-1)^i$ cu convenția de a înlocui exponenții lui y prin indici și pe 1 final cu y_0.

Dacă vrem să aflăm diferența de ordinul i a altui termen de exemplu a lui y_l pornim dela relația:

$$\Delta^i y_l = [(1+\Delta) - 1]^i y_l \tag{26}$$

deci trebue ca în formula (25) să adunăm pe l la indicii lui y.

14°. *Observare.*

Formulele paragrafului precedent se mai pot demonstra și prin inducție completă. Relațiile verificându-se pentru $i = 1, 2, 3$, presupunându-le valabile pentru n, trebue arătat că sunt valabile și pentru $n+1$.

15°. *Diferențele unei funcțiuni.*

Fie funcțiunea:

$$y = f(x) \tag{27}$$

Să dăm argumentului x valorile succesive în progresie aritmetică cu rația h:

$$\begin{aligned} &x_0 - nh,\quad x_0 - (n-1)\,h, \ldots, x_0 - h, \\ &\qquad x_0,\quad x_0 + h, \ldots, x_0 + nh; \ldots \end{aligned} \tag{28}$$

Căpătăm șirul:

$$\begin{aligned} &y_{x_0 - nh},\ y_{x_0 - (n-1)h}, \ldots, y_{x_0 - h}, \\ &\qquad y_{x_0},\ y_{x_0 + h}, \ldots, y_{x_0 + nh}, \ldots \end{aligned} \tag{29}$$

Vom numi diferențe ale funcției (27) pentru valorile argumentului (28), diferențele ce se pot forma cu termenii șirului (29), adică:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_{x_0 + h} - y_{x_0} \\ \Delta^2 y &= \Delta y_{x_0 + h} - \Delta y_{x_0} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^h y &= y_{x_0 + nh} - C^1_n\, y_{x_0 + (n-1)h} + C^2_n\, y_{x_0 + (n-2)h} + \\ &+ \ldots + (-1)^h C^h_n\, y_{x_0}. \end{aligned} \tag{30}$$

16°. *O teoremă fundamentală pentru aplicații.*

Să demonstrăm următoarea teoremă fundamentală pentru aplicații.

Diferența de ordinul n a unui polinom întreg în x, de gradul n pentru valori ale argumentului în progresie artitmetică, e constantă în raport cu variabila x și egală cu $n!\, a_0 h^n$.

In adevăr:

Fie polinomul de gradul n

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \\ &+ a_i x^{n-i} \ldots + a_{n-1} x + a_n \end{aligned} \tag{31}$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = a_0 (x+h)^n + a_1 (x+h)^{n-1} \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1}(x+h) + a_n - a_0 x^n - a_1 x^{n-1} \ldots - a_n \tag{32}$$

$$\Delta y = a_0 x^n + a_0 nhx^{n-1} + \text{polinom de gr. } (n-2) +$$

$$a_1 x^{n-1} + \text{alt polinom de gr. } (n-2) - a_0 x^n -$$

$$- a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n = a_0 nhx^{n-1} + \text{polinom de gr. } (n-2).$$

Deci, diferența Δy este un polinom de gradul $(n-1)$ în raport cu variabila x având ca termen de gradul cel mai mare pe $na_0 hx^{n-1}$.

Atunci $\Delta^2 y$ care este $\Delta(\Delta y)$ va fi un polinom de gradul $(n-2)$ având ca termen de gradul cel

mai mare pe $n(n-1)\,a_0 h^2 x^{n-2}$ deoarece este termenul de gradul cel mai mare din expresia:

$$a_0 nh(x+h)^{n-1} - a_0 nhx^{n-1} + \text{polinom de gr. } (n-3) =$$
$$= a_0 n(n-1)\,h^2 x^{n-2} + \text{polinom de gr. } (n-3). \quad (33)$$

La fel $\Delta^2 y$ va fi un polinom de gradul $(n-3)$ având ca termen de gradul cel mai mare pe $n(n-1)(n-2)\,a_0 h^3 x^{n-3} = A_n^3 a_0 h^3 x^{n-3}$.

Prin acelaşi raţionament ajungem la concluzia că: $\Delta^i y$ va fi un polinom de gradul $(n-i)$ având ca termen de gradul cel mai mare pe $A_n^i a_0 h^i x^{n-i}$.

Deci, $\Delta^n y$ va fi un polinom de gradul $n-n=0$, adică o constantă şi va fi egală cu

$$A_n^n a_0 h^n x^{n-n} = P_n a_0 h^n x^0 = n!\, a_0 h^n.$$

Aplicaţii

a) *Formarea tablourilor.*

17°. *Tabloul patratelor perfecte.*

Considerăm funcţia

$$y = x^2. \quad (34)$$

Dăm lui x valorile $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, y fiind un polinom de gr. II, $\Delta^2 y = 1^2 \cdot 2! \cdot 1 = 2 =$ constantă.

Facem tabloul

x	y	Δ	Δ^2
1	1	3	2
2	4	5	2
3	9	7	2
4	16	9	2
5	25	11	2
7	49	13	2
.....	.....	.....	.....
n	n^2	$2n+1$	2
.....	.....	.....	.....

Se vede că pentru alcătuirea tabloului de mai sus a fost necesar să calculăm direct numai primele două patrate 1; 4 şi prima diferenţă de ordinul I=3. Prin însumarea lui 2 diferitelor diferenţe Δ începând cu prima care este cunoscută, găsim toate diferenţele Δ. Insumând pe acestea la valorile lui y, continuăm tabloul patratelor cât de mult vrem, prin simple adunări.

Exerciţiul 11°. Să se formeze tabloul cuburilor perfecte şi ale puterilor a 4[a].

18°. *Tabloul ariilor cercurilor de diametru variind din cm în cm.*

Se consideră funcţia:

$$S = \frac{\pi n^2}{4}, \quad (35)$$

în care n este diametrul dat din cm în cm. Fiind o funcţie de gr. II în raport cu variabila n, $\Delta^2 S$ este constantă

$$\Delta^2 S = h^2 \cdot 2!\, a_0 = 1^2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708.$$

Tabloul se poate continua oricât dorim, prin simple adunări.

n	S	Δ	Δ^2	Δ^3
1	0,7854	2,3562	1,5708	0
2	3,1416	3,9270	1,5708	0
3	7,0686	5,4978	1,5708	0
4	12,5664	7,0686	1,5708	0
5	19,6350	8,6394	1,5708	0

Exerciţii. 12°. Să se alcătuiască tabloul volumelor sferelor cu diametrele din cm în cm.

13°. Să se alcătuiască tabloul greutăţilor specifice (kg/ml) ale firelor rotunde cu diametre din 2 în 2 mm începând cu ⌀ 6 mm.

14°. Să se alcătuiască tabloul momentelor încovoietoare într'o grindă simplu rezemată, de deschidere l metri, încărcată cu o sarcină uniform repartizată p kg/ml pentru secţiuni din zecime în zecime din deschidere.

Indicaţie. Formula momentului este

$$M = \frac{px}{2}(l-x) = \frac{pl^2}{2}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) = \frac{pl^2}{2}\xi(1-\xi) =$$
$$= K\frac{pl^2}{2} \quad \text{unde} \quad \xi = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9;\ 1{,}0.$$

Valorile lui k sunt date prin tabelă.

b) *Calculul unor sume.*

19. *Suma primelor n numere naturale* S_1.

Considerăm şirul

$$0,\ 0+1,\ 0+1+2,\ \ldots,\ 0+1+2\ldots+n$$

Diferenţele de ordinul II sunt constante şi egale cu 1, celelalte sunt nule. Aplicăm formula (22) şi avem:

$$y_n = y_0 + C_n^1 \Delta y_0 + C_n^2 \Delta^2 y_0 + \ldots$$

în cazul nostru

$$y_0 = 0,\quad \Delta y_0 = 1,\quad \Delta^2 y_0 = 1 \text{ restul } \Delta^k y_0 = 0$$
$$0+1+2+3+\ldots+n = 0 + C_n^1 \cdot 1 + C_n^2,$$

deci,

$$S_1 = C_n^1 + C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

20. *Suma primelor n patrate ale numerelor naturale* S_2.

Considerăm şirul

$$0^2,\ 0^2+1^2,\ 0^2+1^2+2^2,\ \ldots,$$
$$0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2.$$

Diferenţele de ordinul III ale sumei termenilor şirului sunt constante = 2.

$$y_n = y_0 + C_n^1 y_0 + C_n^2 \Delta^2 y_0 + C_n^3 \Delta^3 y_0 + \ldots$$

Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0^2	1	3	2	0
0^2+1^2	4	5		0
$0^2+1^2+2^2$	9			0
$0^2+1^2+2^2+3^2$				0

deci,

$$y_n = 0^2 + C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 3 + C_n^3 \cdot 2 = n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6}$$

deci,

$$s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (37)$$

Exerciţii. 15°. Să se calculeze suma S_3 a cuburilor primelor n numere naturale.

16°. Idem pentru S_4.

21. Să se calculeze suma:

$$S = 1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n+1).$$

Facem tabloul:

Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	2	4	2	0
2	6	6		
8	12			
20				

deci

$$\Delta y_0 = 2,\quad \Delta^2 y_0 = 4,\quad \Delta^3 y_0 = 2,\quad \Delta^4 y_0 = 0$$

$$y_n = y_0 + C_n^1 \cdot \Delta y + C_n^2 \Delta^2 y_0 + C_n^3 \Delta^3 y_0$$

$$y_n = 0 + 2n + \frac{4n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exerciţiu. 17°. Să se calculeze suma:

$$S = 1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 \ldots + n(n+1)(n+2).$$

C) *Rezolvarea numerică a ecuaţiilor cu coeficienţi numerici.*

22. Pentru a rezolva o ecuaţie cu coeficienţi numerici substituim lui x valori consecutive cuprinse între limitele rădăcinilor. Dacă la trecerea dela o valoare la cea consecutivă, ecuaţia ia semne contrarii, între cele două valori se găseşte o rădăcină. Impărţim apoi intervalul dintre aceste numere consecutive într'un număr întreg de părţi, de exemplu în 10 şi substituim noile valori şi aşa mai departe. Substituţiile acestea pentru valori ale lui x în progresie aritmetică se calculează foarte simplu cu ajutorul diferenţelor. Dacă ecuaţia este de gradul n diferenţele de ordinul n sunt constante.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

Calculăm $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... formând un tablou de diferenţe.

x	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
0	−5	2	2	6
1	−3	4	8	6
2	1	12	14	6
3	13	26	20	6
4	39	46	26	6

Deci, rădăcina este cuprinsă între 1 şi 2. Dăm acum lui x valorile succesive 1,0; 1,1; 1,2; ..., 1,9; 2,0 şi calculăm valorile funcţiei cu ajutorul unui tablou de diferenţe.

$\Delta^3 = \frac{6}{10^3} = 0{,}006$. Calculăm direct

$f(1{,}0) = -3{,}000$
$f(1{,}1) = -2{,}789$
$f(1{,}2) = -2{,}552$

restul se capătă prin simple adunări. Deci rădăcina este cuprinsă între 1,8 şi 1,9.

x	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
1,0	−3,000	0,211	0,026	0,006
1,1	−2,789	0,237	0,032	0,006
1,2	−2,552	0,269	0,038	0,006
1,3	−2,283	0,307	0,044	0,006
1,4	−1,976	0,351	0,050	0,006
1,5	−1,625	0,401	0,056	0,006
1,6	−1,224	0,457	0,062	0,006
1,7	−0,767	0,519	0,068	0,006
1,8	−0,248	0,587	0,074	0,006
1,9	0,339	0,661	0,080	0,006
2,0	1,000	0,747	0,086	0,006

Dând acum lui x valorile 1,80; 1,81; 1,82; ... 1,88; 1,89; 190, am obține rădăcina căutată cu 2 zecimale exacte. Procedând astfel de câteva ori la rând, găsim rădăcina cu numărul cerut de zecimale.

Exerciții. 18°. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 7 = 0$$

cu trei zecimale exacte.

19°. Idem pentru ecuația:

$$x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0$$

20°. Idem pentru ecuația:

$$x^3 - x + 1 = 0$$

Aplicații foarte importante ale calculului cu diferențe se găsesc în teoria interpolării. Nu arătăm aci aceste aplicații deoarece teoria interpolării va face subiectul unui articol special.

Calculul cu diferențe poate fi aplicat cu succes și la calculul derivatelor, integrarea mecanică, stabilirea și demonstrarea unor identități, etc.

Pentru cei ce vor să aprofundeze acest capitol le va fi de un real folos studiul tratatului de « *Teoria aproximațiilor* » de Academician *A. N. Crâlov* în limba rusă, a cărții « *Calcule aproximative* » de *I. S. Bezicovici*, tradus de Editura Tehnică și a « *Culegerii de Probleme de Matematici Superioare* » de *Ghiunter și Cuzmin*, vol. III.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 755

Se dau două drepte perpendiculare Ox, Oy. Se ia pe Ox un punct oarecare A și pe Oy un punct oarecare B, apoi se duc cercurile (C_1), (C_2) primul trecând prin A și tangent în B lui Oy, al doilea trecând prin B și tangent în A la Ox. Cercul (C_1) mai taie Ox în A', iar (C_2) mai taie Oy în B'.

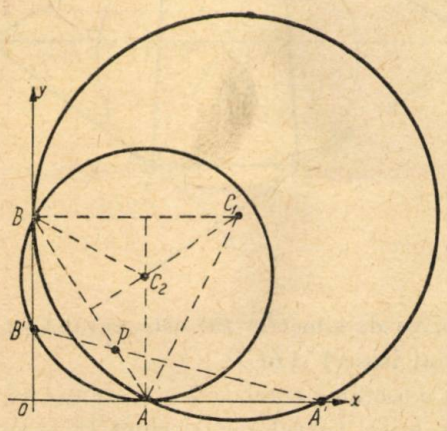
1°. Să se arate că triunghiurile OAB, OA'B' sunt echivalente. 2° Dreptele AB, A' B' se intersectează în P astfel ca dreapta OP este perpendiculară pe AB. 3°. Tangentele în A și B la (C_1), (C_2) respectiv sunt perpendiculare și se taie în Q astfel ca $OQ \parallel AB$.

Cezar Coșniță

Soluție. 1°. Avem:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB}^2; \quad \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA}^2.$$

Prin înmulțirea acestor relații obținem:



$$\overline{OA'} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA} \cdot \overline{OB},$$

relație care ne arată că triunghiurile OAB, $OA'B'$ sunt echivalente.

(Observare. Triunghiurile OAB, $OA'B'$ fiind echivalente și având ca parte comună un patrulater, triunghiurile PAA', PBB' sunt deasemenea echivalente. Rezultă: $\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'}$).

2°. Din $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA'} \cdot \overline{OB'}$ avem:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB'}{OB} \quad \text{sau} \quad AB' \parallel A'B.$$

Putem deci scrie

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AB'}{A'B} = \frac{OA}{OA'} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2}$$

ceeace ne arată că în triunghiul dreptunghic OAB, OP este perpendiculară pe AB.

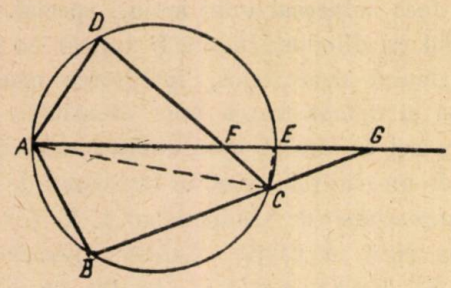
3°. Centrele cercurilor (C_1), (C_2) se găsesc respectiv la intersecțiile mediatoarei segmentului AB cu perpendicularele ridicate în B pe Oy și în A pe Ox. Tangentele în A și B respectiv la (C_1) și (C_2) sunt perpendiculare pe AC_1, BC_2. Dar în triunghiul isoscel BC_1A, C_1C_2 și AC_2 sunt înălțimi, deci $BC_2 \perp AC_1$ sau $\sphericalangle AQB = 90°$. Cum $\sphericalangle QAB = \sphericalangle OBA = \frac{1}{2}$ măs. arc AB, triunghiurile dreptunghice AQB, AOB sunt egale. Rezultă că înălțimile coborîte din O și Q pe AB sunt egale, sau $OQ \parallel AB$.

Problema 776

Să se demonstreze că dacă un patrulater înscris într'un cerc are două laturi adiacente egale, celelalte două laturi împart armonic diametrul ce trece prin vârful comun laturilor egale.

D. C. Panu

Soluție. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil în care $AB = AD$, F și G intersecțiile celorlalte două laturi cu diametrul AE.



Deoarece $AB = AD$, CA este bisectoarea unghiului BCD.

Deasemenea CE, fiind perpendicular pe CA, este bisectoarea unghiului DCG.

Rezultă că fascicolul $C(AFEG)$ este armonic (R.M.F. vol. III pag. 211) deci diviziunea $AFEG$ este armonică.

Problema 799

Fie H punctul de întâlnire al înălțimilor AA', BB', CC' și D, E, F mijloacele laturilor BC, AC, AB ale unui triunghi ABC. Să se stabilească relațiile:

$$\overline{A'D} \cdot \overline{BC} = 2\left(\overline{HE}^2 - \overline{HF}^2\right)$$

$$\overline{BC}^2 - 4\,\overline{A'D}^2 = 4\,\overline{AA'} \cdot \overline{HA'}.$$

D. C. Panu

Soluție. Diferența patratelor a două laturi într'un triunghi oarecare este egală cu dublul produsului dintre a treia latură și proecția pe ea a medianei corespunzătoare.

Aplicând această teoremă în triunghiul HEF obținem prima relație.

Pentru a doua relație observăm că triunghiurile dreptunghice BHA' și $AA'C$ sunt asemenea și găsim

$$\overline{AA'} \cdot \overline{HA'} = \overline{BA'} \cdot \overline{A'C} =$$

$$= \left(\frac{BC}{2} + A'D\right)\left(\frac{BC}{2} - A'D\right)$$

sau

$$4\,\overline{AA'} \cdot \overline{HA'} = \overline{BC}^2 - 4\,\overline{A'D}^2.$$

Problema 809

Un preparat dintr'o substanță radioactivă este pus într'un calorimetru de capacitate calorică 4cal/°C. Cu cât crește temperatura în 10 ore, dacă preparatul are o intensitate de 0,2 Curie și emite particule α având o energie de 5 MeV.

* * *

Soluție. In preparat are loc într'o secundă

$$0{,}2 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{10} = 7{,}4 \cdot 10^{9}$$

desintegrări. Energia de

$$1eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{erg} = 1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0{,}24}{10^7}\ \text{g/cal}.$$

In zece ore se degajă deci din preparat energia

$$E = 7{,}4 \cdot 10^{9} \cdot 5 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{0{,}24}{10^7} \cdot 36000 =$$

$$= 51{,}15\ \text{g/cal}.$$

Impărțind acest număr prin capacitatea calorică a calorimetrului găsim o creștere a temperaturii de 12,78°C.

Observare. Această problemă se găsește în « Culegerea de probleme » de *V. L. Ghinsberg* la pagina 130, numărul 904.

Problema 810

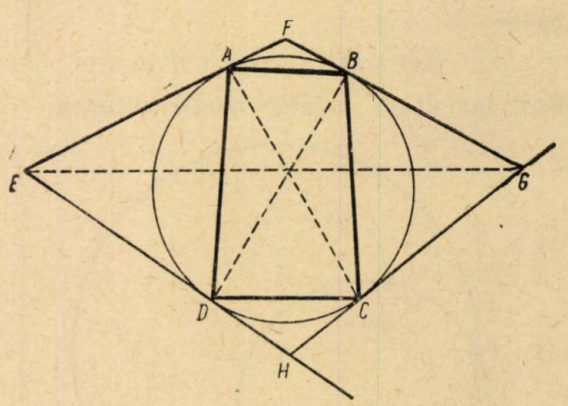
Un trapez $ABCD$ variază rămânând înscris într'un cerc și având AD fixă.

— Să se arate că paralela dusă la baze prin punctul de intersecție al diagonalelor trece printr'un punct fix.

— Să se găsească locul geometric al intersecției dreptei DC cu paralela dusă prin B la AD.

E. Morțun

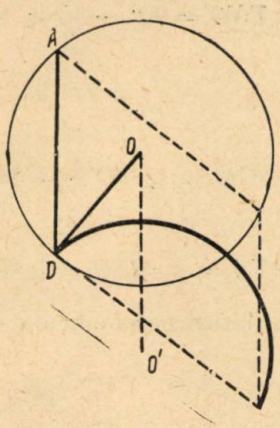
Soluție. Tangentele în punctele A, B, C, D la cercul considerat determină patrulaterul $EFGH$.



Din motive de simetrie EG este paralel cu bazele trapezului isoscel $ABCD$.

După o teoremă corelativă a teoremei lui *Brianchon* în orice patrulater circumscris unui cerc, cele două diagonale și dreptele care unesc punctele de contact de pe laturile opuse, sunt 4 drepte concurente.

Rezultă că EG este paralela la baza dusă prin punctul I de intersecţie al diagonalelor; ea trece deci prin punctul fix E.



Locul geometric al intersecţiei dreptei DC cu paralela prin B la AD este o porţiune din cercul translatat în direcţia segmentului AD cu amplitudinea AD (vezi R.M.F. II Pag. 33).

Această porţiune este delimitată de perpendiculara din D pe OD (vezi figura).

Problema 813

O baterie electrică cu rezistenţa interioară de 10 *ohmi este pusă în circuitul unei sonerii cu o rezistenţă de* 20 *ohmi, dând o intensitate de* 3 *amperi. Se cere: forţa electromotoare, tensiunea la bornele bateriei, puterea cu care merge soneria şi randamentul circuitului.*

I. Davidescu
elev. P. Neamţ

Soluţie

$$E = I(R_1 + R_2) = 3\ (10 + 20) = 90 \text{ volţi}$$

$$U = E - IR_1 = 60 \text{ volţi}$$

$$P = UI = 180 \text{ watt}$$

$$\eta = \frac{U}{E} = 66{,}6\%$$

Problema 816

Se dă un trapez $ABCD$ circumscris unui cerc. Să se arate că cercurile care au ca diametru laturile neparalele AD şi BC sunt tangente într'un punct T situat pe bisectoarea unghiului I format de prelungirea laturilor neparalele ale trapezului.

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. Bisectoarele interioare ale unghiurilor trapezului sunt concurente într'un punct T situat pe linia mijlocie EF a trapezului fiind egal depărtat de cele două laturi. Unghiurile ATD şi BTC fiind drepte, iar punctele E, T, F fiind colineare, cercurile de diametre AD, BC sunt tangente în T.

Punctul T fiind egal depărtat de AD şi BC este situat pe bisectoarea unghiului I.

Problema 818

Într'un lichid de densitate d_1 pluteşte cu baza orizontală un con făcut dintr'o materie neporoasă de densitate d_2. Când pluteşte cu vârful în sus, el se scufundă cu baza la distanţa i_1 de nivelul lichidului; iar când pluteşte cu vârful în jos, se scufundă cu i_2 sub nivelul lichidului.

Să se stabilească relaţia:

$$\frac{i_1^3}{i_2^3} + 3\sqrt{\frac{d_1}{d_2}\left(\frac{d_1}{d_2} - 1\right)} \cdot \frac{i_1}{i_2} = 1$$

Simion St. Petre

Soluţie. Fie h, V_c, V respectiv înălţimea conului, volumul său şi volumul părţii care se scufundă în lichid.

Conform principiului lui Arhimede vom avea:

$$V d_1 = V_c d_2$$

Teorema volumelor asemenea ne dă:

$$(1) \qquad \frac{V_c - V}{V_c} = \frac{(h - i_1)^3}{h^3} = \left(1 - \frac{i_1}{h}\right)^3$$

$$(2) \qquad \frac{V_c}{V} = \frac{h^3}{i_2^3} = \frac{d_1}{d_2}$$

Din (2) avem

$$h = \sqrt[3]{\frac{d_1}{d_2}} \cdot i_2$$

Inlocuind în (1) obţinem:

$$(3) \qquad 1 - \frac{d_2}{d_1} = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{d_2}{d_1}} \cdot \frac{i_1}{i_2}\right)^3$$

$$\frac{i_1^3}{i_2^3} + 3\sqrt[3]{\frac{d_1^2}{d_2^2}}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{d_2}{d_1}} \cdot \frac{i_1}{i_2}\right)\frac{i_1}{i_2} = 1$$

sau, ţinând seamă de (3):

$$\frac{i_1^3}{i_2^3} + 3\sqrt{\frac{d_1}{d_2}\left(\frac{d_1}{d_2} - 1\right)} \cdot \frac{i_1}{i_2} = 1$$

Problema 822

Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{4x^2 + 10x + 4} + \sqrt[3]{2x^2 - 5x - 3} = \sqrt[3]{2x + 1}.$$

A. Tralmac
(Leningrad)

Soluţie. Ecuaţia se poate scrie:

$$\sqrt[3]{(2x+1)(2x+4)} + \sqrt[3]{(2x+1)(x-3)} = \sqrt[3]{2x+1}$$

de unde

$$2x + 1 = 0$$

şi

$$\sqrt[3]{2x + 4} + \sqrt[3]{x - 3} = 1.$$

Ridicând la cub ultima ecuaţie, avem:

$$2x + 4 + x - 3 + 3\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)} \times$$
$$\times (\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{x-3}) = 1$$
$$x = -\sqrt[3]{(2x+4)(x-3)}.$$

La o nouă ridicare la cub, ne dă:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 12 = 0.$$

Rădăcinile ecuaţiei din enunţ, sunt deci:

$$x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 2; \quad x_{3,4} = -2 \pm i\sqrt{2}.$$

Problema 826

Bisectoarele interioare ale unui triunghi oarecare ABC întâlnesc cercul circumscris respectiv în A_1, B_1, C_1. Să se stabilească relaţia:

$$\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} \cdot \overline{CC_1} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)R}{a+b+c}$$

Mihai Roşu
student, Bucureşti

Soluţie. Aplicând teorema lui Ptolomeu în patrulaterele ABA_1C, CBC_1A, BAB_1C, obţinem:

$$\overline{AA_1} = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}; \quad \overline{BB_1} = \frac{a+c}{2\cos\frac{B}{2}}; \quad CC_1 = \frac{a+b}{2\cos\frac{C}{2}}$$

Inmulţind aceste relaţii şi ţinând seama de relaţiile:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} =$$
$$= \frac{pS}{abc} = \frac{p}{4R},$$

obţinem relaţia din enunţ.

Problema 829

Două cercuri au centrele O şi O' se intersectează în punctele A şi B. Dreapta OO' taie cercurile O şi O' în M şi N, astfel că centrele O şi O' sunt între M şi N. Se duce tangenta comună ST şi fie P şi Q intersecţiile dreptei MS cu dreptele NT şi $O'T$. Centrul cercului O se mişcă pe dreapta MN. Punctele M, N şi O' rămânând fixe. Se cere:

a) *Să se arate că punctele P, A şi B sunt colineare.*

b) $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{MN} = \overline{PM}\cdot\overline{PN}\cdot\overline{ST}$ *şi* $\dfrac{\overline{TQ}^2}{\overline{MQ}\cdot\overline{SQ}} =$ *= constant.*

c) *Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului PQ şi locul centrului de greutate al triunghiului MNQ.*

Tiberiu Weszely
elev, Tg. Mureş

Soluţie

1. Unghiul MPN este drept, întrucât

$$\sphericalangle OMS + \sphericalangle TNO' = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle SOM + 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle TO'N$$

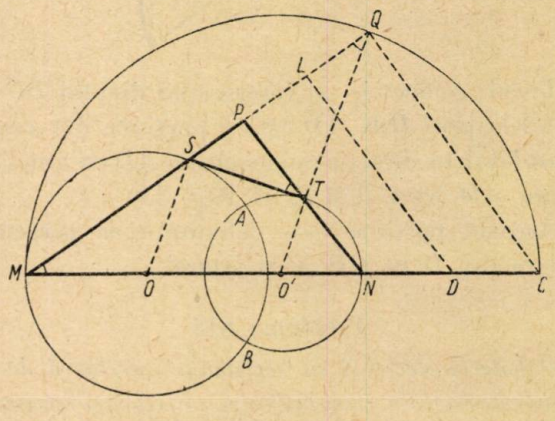
iar

$$\sphericalangle SOM + \sphericalangle TO'N = 180°$$

Mai avem:

$$\sphericalangle PTS = \sphericalangle MSO = \sphericalangle SMO$$

ca unghiuri cu laturi perpendiculare.



Rezultă că triunghiurile PST şi PMN sunt asemenea.

De unde $\overline{PS}\cdot\overline{PM} = \overline{PT}\cdot\overline{PN}$,

deci punctul P se află pe axul radical AB al cercurilor O şi O'

2. Din asemănarea triunghiurilor PST şi PMN avem:

$$\frac{ST}{MN} = \frac{PS}{PN} = \frac{PT}{PM} \text{ sau } \frac{\overline{ST}^2}{MN^2} = \frac{\overline{PS}\cdot\overline{PT}}{PN\cdot PM} \quad (1)$$

Mai avem:

$$\overline{PS}\cdot\overline{PM} = \overline{PA}\cdot\overline{PB} \quad (2)$$
$$\overline{PT}\cdot\overline{PN} = \overline{PA}\cdot\overline{PB} \quad (3)$$

Inmulţind relaţiile (1), (2), (3) obţinem prima relaţie din enunţ.

Pentru a doua remarcăm că:

$\sphericalangle PQT = \sphericalangle PTS = \sphericalangle SMO$ sau $\overline{O'M} = \overline{O'Q}$

Q descrie deci cercul O' $(O'M)$ care retaie pe MN în C. In triunghiul dreptunghic STQ avem $\overline{TQ}^2 = \overline{SQ}\cdot\overline{PQ}$.

Prin urmare:

$$\frac{TQ}{MQ\cdot SQ} = \frac{PQ}{MQ} = \frac{NC}{MC} = \text{constant}$$

3. Locul lui L, mijlocul lui PQ, este cercul de diametru MD unde D este mijlocul lui NC.

Locul lui G centrul de greutate al triunghiului MNQ este cercul $F\left(\frac{1}{2}O'M\right)$ astfel că $\frac{EF}{EO'}\frac{1}{3}$; E fiind mijlocul lui MN.

Problema 832

Să se elimine x *între relaţiile:*

$$\frac{\sin x}{a}+\frac{b}{\cos x}=\frac{\operatorname{tg} x}{c}+\frac{d}{\operatorname{ctg} x}=\frac{\sec x}{e}+\frac{f}{\operatorname{cosec} x}.$$

Gh. I. Bercea
student, Timişoara

Soluţie. Relaţiile se pot scrie:

$$\frac{\sin x}{a}+\frac{b}{\cos x}=\operatorname{tg} x\left(\frac{1}{c}+d\right)=\frac{1}{e\cos x}+f\sin x$$

şi obţinem imediat:

$$\frac{1}{a}\sin x\cos x+b=\left(\frac{1}{c}+d\right)\sin x;$$

$$\left(\frac{1}{c}+d\right)\sin x=\frac{1}{e}+f\sin x\cos x$$

de unde

$$\sin x\cos x=\frac{a(1-eb)}{e(1-af)},$$

$$\sin x=\frac{c(1-abef)}{e(1-af)(1+cd)};$$

$$\cos x=\frac{a(1-eb)(1+cd)}{c(1-abef)};$$

Inlocuind în relaţia $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, obţinem

$$e^2\frac{c^2(1-abef)^2}{(1-af)^2(1+cd)^2}+\frac{a^2(1-eb)^2(1+cd)^2}{c^2(1-abef)^2}=1.$$

Problema 835

Trei elemente galvanice cu f.e.m. *de* 1,3 *V*, 1,4 *V şi* 1,5 *V şi rezistenţă interioară câte* 0,3 ohmi *fiecare, sunt legate în paralel cu circuitul unei rezistenţe exterioare de* 0,6 ohmi. *Să se determine intensităţile curenţilor în fiecare dintre elemente.*

* * *

Soluţie. Avem:

$$U=E_1-I_1r_i=E_2-I_2r_i=E_3-I_3r_i$$

şi

$$\frac{E_1-U}{r_i}+\frac{E_2-U}{r_i}+\frac{E_2-U}{r_i}=\frac{U}{r_e}.$$

Inlocuind datele din enunţ obţinem:

$$U=1{,}2\text{ Volţi}$$

apoi

$$I_1=\frac{1}{3}A;\quad I_2=\frac{2}{3}A;\quad I_3=1A.$$

Problema 836

O lunetă compusă dintr'un obiectiv cu distanţa focală $f'=50$ *cm. şi un ocular cu distanţa focală* $f''=2$ *cm., este ajustată pentru infinit. Să se calculeze unghiul sub care se vede discul lunii prin lunetă, ştiind că privind cu ochiul liber, aceasta ne apare sub unghiul de* 30'. *Cu ce distanţă trebue deplasat ocularul lunetei pentru a vedea clar obiectele la o distanţă de* 50 *cm.?*

* * *

Soluţie. Grosismentul lunetei este

$$G=\frac{f'}{f''}=25.$$

Fie α unghiul sub care se vede discul lunii prin lunetă. Vom avea:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=25\operatorname{tg}15'$$

$$\alpha=12^\circ 27'\,2''.$$

Fie Δl deplasarea ocularului. Avem:

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f'+\Delta l}$$

unde

$$d=50\text{ m.}=5\,000\text{ cm.}$$

Inlocuind, găsim $\Delta l\approx 0{,}5$ cm.

Problema 837

Două discuri de hârtie se găsesc fixate pe acelaş ax de rotaţie la 3,5 *metri unul de altul. Un mobil se deplasează cu viteză constantă paralel cu axul, străbătând cele două discuri de hârtie în două puncte ale căror raze fac între ele unghiul de* 30°. *Ştiind că axul face* 1.200 *ture pe minut, să se afle viteza mobilului.*

N. Stănescu

Soluţie. Mobilul străbate spaţiul de 3,5 m. în timp ce discurile fac

$$\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{12}\text{ ture.}$$

Viteza de rotaţie a discurilor fiind 20 ture/s., rezultă că mobilul parcurge 3,5 m în

$$\frac{1}{12}\times\frac{1}{20}\text{ secunde.}$$

Viteza este deci:

$$V=3{,}5+12\times 20=840\text{ m/s.}$$

Problema 839

Un fierbător electric cu rezistența de 22 ohmi funcționează cu un curent electric de 5 amperi. Randamentul fierbătorului fiind 0,85, să se calculeze timpul necesar pentru a transforma 200 gr. ghiață la — 20°C în stare de vapori.

Iancu Faibiș
elev, Piatra Neamț

Soluție. Ghiața absoarbe

$$Q = 200\,(20 \times 0{,}5 + 80 + 100 \times 1 + 539)$$

$$Q = 145\,800 \text{ cal.}$$

Fierbătorul va produce

$$Q_1 = 0{,}85 \times 0{,}24 \times 25 \times 22 \times t \text{ cal.}$$

Va trebui să avem $Q = Q_1$ de unde

$$t = 21 \text{ min. } 39 \text{ s., } 4.$$

Problema 840

Se măsoară viteza luminii cu metoda roții dințate, distanța dintre roată și oglindă fiind 10 Km. iar numărul dinților roatei fiind 720. Prima extincție apare la o turație de 624 ture pe minut. Care este viteza luminii? La ce turație are loc extincția de ordinul al doilea?

Soluție. Viteza luminii este dată de formula:

$$C = \frac{4\,DZN}{2n - 1} \text{ km/s.}$$

unde D este distanța între roată și oglindă (km), Z numărul dinților, N numărul turațiilor pe secundă și n ordinul extincției.

Găsim:

$$C \approx 2{,}99.10^5 \text{ km/s.}$$

Extincția de ordinul doi apare la o turație de

$$3 \times 624 = 1.872 \text{ ture/minut.}$$

Problema 844

Ce cantitate de căldură se degajă la comprimarea izotermă a 7 gr. de azot la presiunea normală de 1,033 Kgf/cm² până la presiunea de 51,65 Kgf/cm² temperatura fiind de 25°C.

Soluție. Volumul inițial al azotului este

$$V_1 = \frac{7\,(1 + \alpha t)}{\rho} = \frac{7\left(1 + \frac{25}{273}\right)}{0{,}00125} = = 6113 \text{ cm}^3.$$

$$V_1 = 0{,}006113 \text{ m}^3;$$

$$p_1 = 10\,330 \text{ kgr/m}^2.$$

Lucrul mecanic al gazului este:

$$W = - p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Deci

$$Q = - \frac{p_1 v_1 \ln p_2/p_1}{427,} \text{ kcal.}$$

Inlocuind găsim:

$$Q = - 0{,}5785 \text{ kcal.}$$

Problema 850

Până la ce temperatură trebuie încălzit aerul la 15°C, pentru ca volumul lui să se mărească de două ori, iar presiunea să rămână aceiași?

* * *

Soluție.

$$\frac{V_t}{V_{15°}} = \frac{1 + \alpha t}{1 + 15\,\alpha} = 2$$

unde

$$\alpha = \frac{1}{273}.$$

Găsim

$$t = 303°\text{C}$$

Problema 851

Fie S_1 și V_1 suprafața laterală și volumul unei piramide patrate regulate de volum maxim înscrisă într'o sferă de rază R și fie S_2 și V_2 suprafața laterală și volumul piramidei patrate regulate circumscrise aceleiași sfere și de volum minim. Să se stabilească relația:

$$S_1 V_2 = \sqrt{5}\, S_2 V_1$$

Florin S. Torjescu
elev, Ploiești

Soluție. Fie x distanța centrului sferei circumscrise primei piramide la baza piramidei. Vom avea:

$$V_1 = \frac{2\,(R^2 - x^2)\,(R + x)}{3}$$

$$V_1 = \frac{2}{3}\,(R + x)^2\,(R - x)$$

V_1 este maxim când

$$\frac{R + x}{2} = R - x \quad \text{deci} \quad x = \frac{R}{3}.$$

Rezultă

$$V_1 = \frac{64}{81} R^3 \quad \text{și} \quad S_1 = \frac{16\sqrt{5}}{9} R^2.$$

Fie y distanța centrului sferei înscrise în cea de a doua piramidă la vârful piramidei. Vom avea:

$$V_2 = \frac{(R+y)\dfrac{4R^2(R+y)^2}{y^2-R^2}}{3} =$$

$$= -\frac{4R^2}{3}(R+y)^2(R-y)^{-1}$$

V_2 este minim când $-V_2$ este maxim, deci când

$$\frac{R+y}{2} = \frac{R-y}{-1}$$

$$y = 3R.$$

Rezultă

$$V_2 = \frac{32}{3}R^3 \quad \text{și} \quad S_2 = 24R^2$$

și relația se verifică imediat.

Problema 852

Pentru câte curse ale unei pompe de capacitate 40 cm³ se poate goli un balon de 2 litri, astfel ca presiunea să scadă dela o atmosferă la 0,1 milimetri Hg?

* * *

Soluție

Avem:

$$p = p_0\left(\frac{R}{R+C}\right)^n.$$

In cazul problemei

$p_0 = 760$ mm Hg; $\quad p = 0{,}1$ mm Hg

$R = 2.000$ cm³; $\quad C = 40$ cm³.

Obținem:

$$n = \frac{\log 7600}{\log 51 - \log 50}$$

deci $n \approx 452$ curse.

Problema E: 231

Să se găsească numerele de 2 cifre care să fie egale cu de 4 ori suma cifrelor sale.

Aurel Nicolescu

Soluție: Avem

$$10x + y = 4(x+y)$$

De unde

$$6x = 3y,$$

sau

$$x = \frac{y}{2},$$

Deci y este număr par

$y = 0, 2, 4, 6, 8,$ și

$x = 0, 1, 2, 3, 4.$

Numerele de forma $\overline{xy}$ sunt:

12; 24; 36; 48.

Problema E: 262

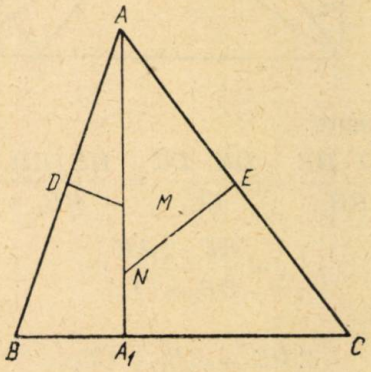
Se dă triunghiul oarecare ABC. Mediatoarele laturilor AB și AC intersectează înălțimea AA_1 respectiv în punctele M și N. Să se demonstreze relația

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Popescu Mihail
elev, Craiova

Soluție: Notăm cu D și E mijloacele laturilor AB și AC. Din asemănarea triunghiurilor ADM și ABA_1 obținem: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AD}{AA_1}$, dar $AD = \dfrac{AB}{2}$ și deci $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AB}{2AA_1}$, sau:

$$2AM \cdot AA_1 = AB^2 \qquad (1)$$



Deasemenea, triunghiurile ANE și ACA_1, sunt asemenea.

Raportul de asemănare ne dă:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AE}{AA_1}.$$

Ținând seama că $AE = \dfrac{AC}{2}$, obținem:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AC}{2AA_1}, \text{ sau } 2AN \cdot AA_1 = AC^2. \qquad (2)$$

Impărțind relațiile (1) și (2) obținem

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Problema E: 265

In triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$) ducem înălțimea AD și mediana AE. Ducem din D perpendiculara pe AE și pe această perpendiculară proecțiile vârfurilor B și C în B_1 și C_1. Să se arate că:

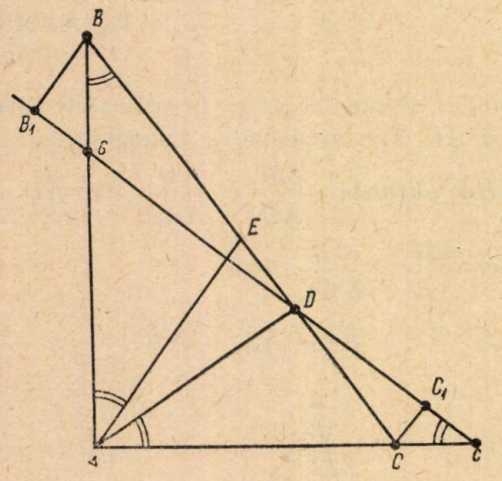
$$\overline{DE} = \overline{BB_1} + \overline{CC_1}.$$

Gh. I. Bercea

Soluție: Triunghiurile DBB_1, DCC_1 și ADE sunt asemenea fiindcă $\sphericalangle AED = \sphericalangle DCC_1$, $\sphericalangle AED = \sphericalangle DBB_1$.

Din asemănarea triunghiurilor de mai sus deducem:

$$\frac{DE}{BB_1} = \frac{AE}{BD} \quad \text{și} \quad \frac{DE}{CC_1} = \frac{AE}{DC}.$$



Prin urmare:

$$AE = \frac{BD \cdot DE}{BB_1} = \frac{DE \cdot DC}{CC_1} = \frac{DE\,(BD + DC)}{BB_1 + CC_1} =$$

$$= \frac{DE \cdot 2\,AE}{BB_1 + CC_1}.$$

De unde:

$$2\,DE = BB_1 + CC_1.$$

Problema E: 293

In cercul O, de rază R se duc diametri perpendiculari AB și CD. Tangenta în A la cerc întâlnește tangenta în C în punctul F și pe BC în E. Dreapta ED, taie pe OF în I.

a) *Să se demonstreze că I este mijlocul lui OF.*

b) *M și N fiind intersecțiile dreptei ED respectiv cu CF și OA, avem:*

$$\frac{MF}{MC} = \frac{ON}{NA} = \frac{1}{2}.$$

c) *Să se arate că suprafața triunghiului CME este a treia parte din suprafața triunghiului CDE.*

St. M. Fotă

Soluție. a) Se observă ușor că:

$$OD = FA = EF = R.$$

Mai avem:

$\sphericalangle IEF = \sphericalangle IDO$ (alterne interne) și

$\sphericalangle IFE = \sphericalangle IOD$ (alterne interne).

Deci triunghiurile IOD și IEF sunt egale. Rezultă că $IO = IF$ și prin urmare I este mijlocul lui OF.

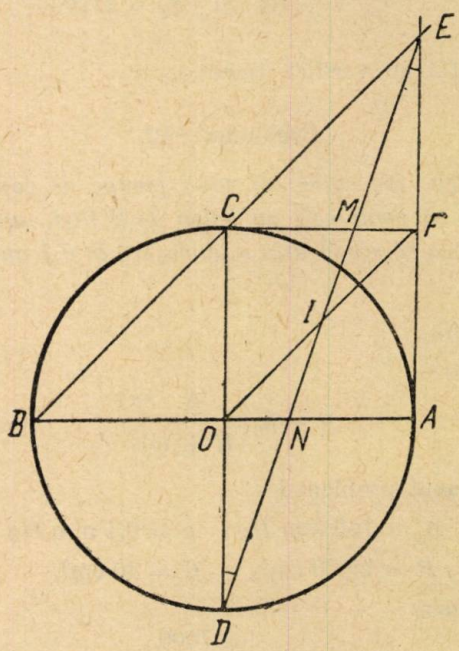
b) Triunghiurile OIN și IMF sunt egale pentrucă au: $OI = IF$; $\sphericalangle OIN = \sphericalangle MIF$ ca opuse la vârf și $\sphericalangle NOI = \sphericalangle MFI$ ca alterne interne. Deci $MF = ON$. Dar $CF = OA$; rezultă imediat că $MC = NA$.

Din asemănarea triunghiurilor MCD și MEF avem:

$$\frac{MF}{MC} = \frac{EF}{CD} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

Deci:

$$\frac{MF}{MC} = \frac{ON}{NA} = \frac{1}{2}.$$



c) Înălțimea triunghiului DCE este $DB = R\sqrt{2}$, (DB fiind latura patratului înscris).

Deasemeni:

$$CE^2 = 2R^2; \quad CE = R\sqrt{2}.$$

Atunci:

$$\text{Sup. } DCE = \frac{R \cdot \sqrt{2} \cdot R\sqrt{2}}{2} = R^2.$$

Mai avem:

$$S_{.ECM} = \frac{CM \cdot EP}{2}.$$

Din: $\frac{MF}{MC} = \frac{1}{2}$; avem; $\frac{MF + MC}{MC} = \frac{3}{2}$;

$\frac{CF}{MC} = \frac{3}{2}$ sau $\frac{R}{MC} = \frac{3}{2}$. De unde $MC = \frac{2R}{3}$.

Deasemeni $EF = R$. Atunci:

$$S_{ECM} = \frac{\frac{2R}{3} \cdot R}{2} = \frac{R^2}{3}.$$

Deci: $S_{DCE} = 3\,S_{ECM}$.

PROBLEME PROPUSE

1117. Se consideră o rețea plană de patrate de laturi a. Se întreabă dacă există drepte din plan care trecând prin vârful unui patrat să nu mai întâlnească nici un alt vârf al vreunui patrat din rețea. Deasemenea, dacă rețeaua este formată din triunghiuri echilaterale.

Ing. Alexandru Matei

1118. Cu 20 lei să se cumpere 20 kg fructe de trei calități: prima calitate costă 3 lei kg, a doua 2 lei kg și a treia 0,50 lei kg. Câte kg de fiecare calitate exprimate în numere întregi se pot cumpăra.

Sălan Nicolae
student

1119. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\frac{x(x+z)+y(x-z)}{(x+z)(x+y)} = \frac{a}{y+z}$$

$$\frac{y(y+x)+z(y-x)}{(y+x)(y+z)} = \frac{b}{z+x}$$

$$\frac{z(z+y)+x(z-y)}{(z+y)(z+x)} = \frac{c}{x+y}.$$

M. I. Iavorski, Moscova

1120. Să se afle valorile întregi ale lui n pentru care polinomul:

$$P(n) = 6n^9 + n^8 + 3n^7 + 2n^3 + 5n^2 + 11n + 3$$

să fie divizibil cu 35.

Marius V. Iosifescu
elev, Pitești

1121. Să se determine m astfel ca ecuația

$$mx^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

să admită rădăcini subunitare.

Alex. Dan Popescu
elev, Reșița

1122. Să se calculeze diferențele de diferite ordine ale progresiei geometrice cu primul termen a și rația q. Să se arate că diferențele de același ordin sunt în progresie geometrică cu rația q, iar diferențele succesive ale aceluiași termen sunt în progresie geometrică cu rația $q-1$. Să se găsească expresia unei diferențe oarecare $\Delta^p y_i$. Să se arate că $\Delta_k y_k = a[q(q-1)]^k$.

(Pentru rezolvare se va citi articolul „Calculul cu diferențe finite" apărut în acest număr al revistei).

M. Cotariu

1123. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x^3 + y^3 + xy\sqrt{xy} = 73$$

$$x^3 + z^3 + zx\sqrt{xz} = 757$$

$$y^3 + z^3 + yz\sqrt{yz} = 1009.$$

I. M. Kacenovscki, Moscova

1124. Să se rezolve ecuația

$$\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sin 3x \cos 4x.$$

Gh. D. Simionescu

1125. Să se arate că perimetrul triunghiului ortic al unui triunghi oarecare ABC este egal cu $8p \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$.

Petcu C. Victor
student, București

1126. Să se rezolve sistemul

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos(x+y) = 1$$

$$x - y = 60°.$$

Mihalcea C. Ștefan
student, București

1127. In triunghiul dreptunghic ABC perpendiculara în B pe BC taie latura AC în C_1 și perpendiculara în C pe BC taie latura AB în B_1. Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC taie pe BC_1 și CB_1 respectiv în F și E. Să se arate că patrulaterele FC_1B_1E și $FECB$ sunt echivalente.

S. V. Ionescu
elev, Pitești

1128. Fie un patrat $ABCD$ de latură a. Prin vârful C se duce paralela la diagonala BD care taie prelungirea laturii AD în E. Pe diagonala BD se ia punctul M astfel ca $5\overline{DM} = 3\overline{MB}$. Dreapta AM întâlnește pe EC în F. Să se arate că suprafața triunghiului AEF și a patrulaterului $AFCB$ sunt echivalente și să se exprime aceste suprafețe.

Mircea Mănescu
elev, Câmpulung Muscel

1129. Să se arate că dacă din cele trei centre ale circumferințelor exînscrise unui triunghi coborîm perpendiculare pe laturile respective, ele sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului format de aceste centre.

* * *

1130. Să se construiască un triunghi ABC cunoscând mediana şi simediana aceluiaşi vârf precum şi unghiul cuprins între ele.

Constantinescu Florin
elev, Cluj

1131. Să se construiască un triunghi cunoscând mijlocul M al laturei BC, mijlocul N al segmentului AM şi punctul A' de tangenţă al cercului înscris triunghiului cu latura BC.

Tiţa I. Nicolae
student, Bucureşti

1132. Să se construiască un triunghi ABC astfel ca cele trei puncte de intersecţie, dintre înălţimile AA', CC' şi bisectoarea BB', să fie vârfurile unui triunghi echilateral şi echivalent cu ABC. In acest caz latura triunghiului echilateral este media geometrică a laturilor BA şi BC.

Gh. Bazacov

1133. Fie G centrul de greutate al tetraedrului oarecare $A_1A_2A_3A_4$. Notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4 respectiv centrele de greutate ale feţelor opuse vârfurilor A_1, A_2, A_3, A_4.

Ştiind că M este un punct în interiorul tetraedrului, iar M_1, M_2, M_3, M_4 sunt respectiv simetricele lui M faţă de G_1, G_2, G_3, G_4 se cere:

1°. Să se demonstreze că dreptele A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 sunt concurente într'un punct P.

2°. Să se arate că punctele M, G, P sunt coliniare şi există relaţia: $3 \cdot \overline{GM} = 5 \cdot \overline{GP}$.

Popescu I. Mihail
student, Bucureşti

1134. Fie două plane P_1 şi P_2 care se intersectează după o orizontală, făcând cu planul orizontal unghiurile α şi β cunoscute. O bară omogenă grea AB situată într'un plan perpendicular pe cele două plane P_1 şi P_2 se reazimă pe aceste plane. Se cere unghiul format de bară cu planul orizontal în poziţia de echilibru.

* * *

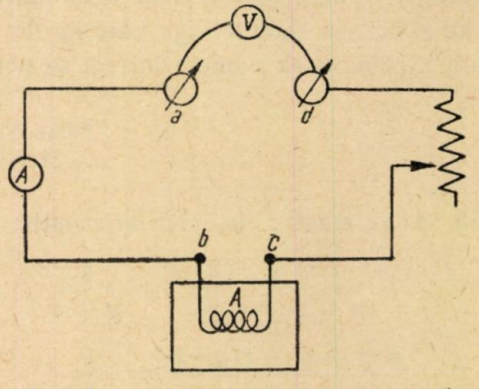
1135. Intr'un vas emisferic neted de rază $OC = r$ este aşezată o bară omogenă AB de lungime $2a$ şi greutate P. Să se determine unghiul φ format de bară cu planul orizontal pentru poziţia de echilibru. (Se poate aplica principiul lui Toricelli).

* * *

1136. Trei bare articulate la capete formează un triunghi oarecare ABC. Pe axele articulaţiilor din vârfurile A,B,C sunt fixaţi câte un scripete. Peste aceşti scripeţi este trecut un cablu închis şi care prin strângere (scurtare) este supus la o tensiune T. Frecarea în axul scripeţilor fiind neglijabilă să se afle forţele de reacţiune din articulaţii.

C. Ionescu-Ţiu

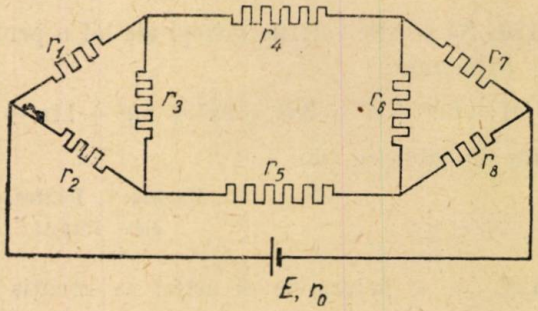
1137. In cât timp 460 gr apă aflată într'un vas A se încălzeşte dela 16°C la 100°C dacă prin ampermetrul A trece un curent de 4 amp; voltmetrul arată 120 volţi, rezistenţa porţiunii $ab = 0{,}1$ ohm, rezistenţa porţiunii $cd = 4{,}9$ ohmi iar pierderea prin radiere prezintă 16% din cantitatea de căldură furnizată de spirală.



(Se aplică legea lui *Ohm* pentru o porţiune de circuit, legea *Joule-Lenz* şi legea descreşterii tensiunii dealungul circuitului).

* * *

1138. Un circuit are următoarea schemă:



Se cunosc:

$r_0 = 0{,}35$ ohmi; $r_1 = 1{,}5$ ohmi; $r_2 = 2$ ohmi;
$r_3 = 0{,}5$ ohmi; $r_4 = 4$ ohmi; $r_5 = 4$ ohmi;
$r_6 = 6$ ohmi; $r_7 = 8$ ohmi; $r_8 = 2$ ohmi;
$E = 2V$.

Se cere: curentul total, puterea sursei, căldura desvoltată în unitate de timp şi randamentul circuitului.

Braşovan Ioan
elev, Timişoara

1139. Puterea mecanică a unui electromotor în plină sarcină este 350 C.P. Ştiind că sub tensiunea de 3800 volţi absoarbe 90 amperi şi că randamentul este 90%, să se afle puterea absorbită de motor şi factorul de putere al acestui motor.

Stoica C. Marin
elev, Piteşti

EXERCIŢII PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E: 384. Câte pagini are o carte dacă pentru numerotarea paginilor s'au întrebuinţat 2893 semne.

Zaharescu Marius
elev, Tr. Severin

E: 385. In peretele lateral al unui vapor s'a format un orificiu de 0,08 m². Cu ce forţă presează apa pe cusătura aşezată pe orificiu dacă centrul acestei cusături se află la adâncimea de 2 metri sub apă?

* * *

E: 386. Pentru a înconjura o roată de lemn cu o bandă de fier, aceasta din urmă se încălzeşte până la 400° C. De câte ori este mai mare diametrul roţii decât diametrul benzii de fier? Se va ţine seama de coeficientul de dilatare al fierului.

* * *

E: 387. La o cooperativă s'a adus un anumit număr de kg. de zahăr din care au mai rămas 2 kg după ce s'a distribuit din cantitate timp de 3 zile. Ştiind că în prima zi s'a distribuit un sfert din întreaga cantitate şi încă 3 kg; a doua zi, o treime din rest şi încă 1 kg; iar a treia zi, o jumătate din rest şi încă 1 kg. Să se afle câte kg au fost aduse la început.

Şerb Gh. A. Gabriel
elev, Piteşti

E: 388. O bucată paralelipipedică de ghiaţă pluteşte pe mare, rămânând afară 12 cm. Densitatea apei de mare fiind 1,025 şi a gheţei de 0,930, se cere grosimea gheţei.

* * *

E: 389. Un butoi cu apă este gol pe 3/4 din capacitatea lui. Dacă se pun 5 dal de apă, el se umple pe 2/3 din capacitatea lui. Care este capacitatea butoiului? Verificare.

* * *

E: 390. Să dă un cerc cu centrul în punctul O şi de rază R. Dintr'un punct A exterior la distanţa $OA=d$ să se ducă o tangentă AT şi o secantă AMN de aceeaşi parte a punctului O, astfel ca aria triunghiului AOT să fie egală cu aria triunghiului ATN.

C. I. Ţ.

E: 391. Cu ce număr trebuie să împărţim pe 0,642 spre a-l mări cu 0,108?

* * *

E: 392. Care este cel mai mare număr cu care împărţind numerele 6355, 1705, şi 1271 găsim resturile 55, 25, 11?

* * *

E: 393. Să se arate că

$$\frac{(m-a^2)(n-a^2)}{a^2(a^2-x^3)}+\frac{(m-x^3)(n-x^3)}{x^3(x^3-a^3)}=1+\frac{mn}{a^2x^3}.$$

Willy Paraschiv

E: 394. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\ldots=\frac{10}{81}.$$

Se vor transforma termenii mai întâi în fracţii zecimale.

Pantea Alexandru
elev, Petroşani

E: 395. Care este arcul cel mai mare care are un număr exact de secunde şi care se cuprinde exact în 90° şi în arcul de 5°2′24″?

* * *

E: 396. Două autobuse pornesc din Bucureşti către Oraşul Stalin. Primul pleacă la orele 8,30 dim., având o viteză de 36 km/oră; iar al doilea pleacă la orele 9,20 dim., având o viteză de 48 km/oră. Se cere să se afle la ce oră şi la ce distanţă de Bucureşti se vor întâlni cele două autobuze?

O. Stănăşilă

E: 397. Să se găsească fracţiile care nu-şi schimbă valoarea dacă se adaugă 12 la numărător şi 36 la numitor.

O. Stănăşilă

E: 398. Să se găsească cel mai mic multiplu comun al fracţiilor:

$$\frac{5}{16};\ \frac{8}{12};\ \frac{6}{9};\ \frac{10}{24}.$$

* * *

E: 399. Un ceas avansează cu două minute la 16 ore, iar un altul întârzie un minut la 12 ore. Dacă cele două ceasornice arată aceeaşi oră Luni la orele 8 dimineaţa, să se afle ziua şi ora indicată de fiecare ceas, atunci când diferenţa între orele indicate de cele două ceasornice este de 12 minute şi 30 secunde.

* * *

E: 400. Cei patru sateliţi ai lui Jupiter fac o rotaţie complectă în jurul planetei respectiv în 42 ore, 85 ore, 172 ore şi 400 ore.

Presupunând că la un moment dat cei 4 sateliţi s'ar găsi pe o aceiaşi linie dreaptă, cu Jupiter se cere:

a) să se afle timpul după care cei patru sateliţi vor ocupa iarăşi o aceiaşi poziţie;

b) să se afle de câte ori se va roti în acest timp, în jurul planetei, fiecare satelit.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Dela 15 Septembrie 1953 la 15 Octombrie 1953 s'au primit cel puţin cinci soluţii bune la problemele propuse în ultimele şase numere ale Revistei Matematice şi Fizice, dela rezolvitorii la cari sunt trecute numerele problemelor rezolvate după numele fiecăruia, probleme propuse (P) articole (A) şi note (N) după cum urmează:

ALEXANDRIA. Clasa X-a. Georgescu I. Emil (744, 871, 872, 938, 1000, E: 289, 317, 326).

ARAD. Clasa XI-a, Oniţă I. Aurel (766, 777, 778, 779, 780, 787, 873, 946, 950, 954, 972, 974, 975), Şcoala Pedagogică, anul IV. Vlagiu Ionel (707, 710, 719, 877, 880, 881, 885, 900, 942).

BACĂU. Şcoala medie tehnică de Construcţii, anul III. Stanciu Pavel (765, 770, 788, 823, 824, 839, 845, 867, 887, 882, 897, 907, 910, 912, 915, 916, 919, 927, 928, 932, 999, 1004, E: 261, 313, 317, 322), clasa IX-a. Iorga Sergiu (871, 872, 873, E: 277, 285, 286, 289, 294), Clasa XI-a. Tofan V. Ion (875, 879, 880, 881, 882, 885, 889, 895, 896, 897, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 913, 931, 933, 934, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942).

BAIA MARE. Clasa X-a. Pop Gheorghe (770, 774, 775, 788, 799, 804, 807, 837, 838, 839, 844, 846, 850, 852, 853, 854, 857, 864, 866, 871, 872, 873, 874, 876, 944, 963, 964, 965, 968, 973, 974).

BÂRLAD. Clasa IX-a. Chicoş Liviu (703, 704, 705, 711, 713, 716, 718, 721, 724, 727, 739, 740, 744, 745, 746, 748, 762, 765, 770, 775, 787, 791, 792, 793, 794, 800, 822, 823, 825, 834, 835), Clasa X-a, Bichir Constantin (746, 950, 952, 959, 963, 971, 972, 974, 988, 992, 993, 994, 997, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1012, E: 321, 323, 324, 326).

BEIUŞ. Clasa X-a. Sandor Dionisie (787, 788, 792, 793, 819, 823, 837, 871, 872, 901, 904, 910, 944, 946, 950, 994, 950, 1025, E: 324), Ordentlich Ştefan (766, 770, 779, 871, 872).

BOTOŞANI. Clasa X-a Avram Lucia (972, 992, 1000, E: 286, 288, 324). Potolog Rodica (956, 959, E: 321, 323, 324), Şcoala Medie Textilă anul III, Roller Zlata (950, E: 278, 292, 294, 300, 305), Şcoala Medie Tehnică de Drumuri, anul I. Băiceanu Gheorghe (E: 303, 305, 306, 321), 335), Dumitru M. Constantin (E: 300, 303, 305, 306, 321, 335), Mahalu Clara (E: 305, 306, 309, 312, 335), Pintilie Nicolae (E: 303, 305, 306, 321, 335), Prăjinaru Vasile (E: 303, 305, 306, 321, 329, 335), Rădulescu Elena (E: 302, 305, 306, 309, 355), Rosenţveig Saul (E: 292, 303, 305, 306, 335), Solomon Alfred (E: 303, 305, 306, 312, 335), Anul II, Hetriuc Dorica (E: 305, 306, 309, 314, 335), Hudescu Eugenia (E: 303, 305, 306, 314, 335), Hurduc Minodora (E: 292, 302, 303, 305, 306, 309, 314, 335), Pincovici Morel (E: 303, 305, 306, 312, 335), Anul III, Rosenţveig Izu (878, 950 E: 290, 292, 306), Anul IV, Gaiser Eva (E: 290, 305, 306, 314, 333), Clasa X-a liceu, Bălan Sergiu (822, 878, 904, 908, 956, E: 309, 321, 324), Clasa XI-a, Butnaru Strul (904, 910, 912, E: 306, 318), Modreanu Mircea (904, 908, 910, 915, 916, 923).

BRĂILA. Clasa XI-a, Avramescu Valeriu (745, 904, 906, 908, 913, 938, 950, E: 243, 305, 306, 312, 313, 324.)

BUCUREŞTI. *Liceul 1 fete*, clasa X-a, Cruceanu Viorica (768, 770, 834, 865, 868, 872, 873, 904, 910, 913, 930, 938, 946, 950, 952), Filimon V. Rodica (770, 822, 863, 864, 865, 871, 872, 873, 874, 904, 910, 913). *Liceul 1 băieţi*, clasa VIII-a, Schileru I. Dinu (878, 888, 1005, 1018, E: 275, 301, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 311, 312, 313, 314, 316, 317, 318, 320, 322, 323, 325, 326, 328, 331, 334, 335, P), clasa IX-a, Litinschi Mihai (812, 823, 906, 950, 964, 971, 974, 992, 1025, E: 284, 285, 296, 311, 315, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 326, 327, 328, 329, 333, 335, 336, P), clasa X-a, Zamfirescu Mihnea (770, 800, 834, 853, 999, 1000, 1001, 1012, 1015 E: 301, 306, 329 P), clasa XI-a, Istinie Crăciunel (897, 913, 932, 1000, 1005, 1019, 1025, E: 309, 329, 335, 336). *Centrul şcolar 2-10-13 fete*, clasa X-a, D, Gongea Valentina (1025, E: 268, 286, 292, 303, 305, 306, 309, 335), Roceric Maria (904, 906, 907, 910, 911, 913, 915, 916, 917, 919), *Liceul 2 băieţi*, clasa XI-a, Brecher Vigdor (795, 813, 819, 842, 878, 904, 905, 906, 908), Liceul 3 băieţi, clasa VIII-a Tomescu Dan (768, 907, 915, 916, 964, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 993, 999, E: 248, 258, 304, 306, 312, 313, 314, 316, 318, 321, 324), Clasa X-a, Radu I. Dumitru (751, 765, 768, 780, 808, 823, 827, 838, 857, 878, E: 270, 271, 272), Clasa XI-a, Radu Gh. Nicolae (905, 908, 909, 910, 929, 931, 937, 950, 962, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 993, 999, 1025), *Liceul 4 fete*, clasa IX-a, Iancu Elisabeta (904, 913, 971, 972, E: 302, 305, 306, 309, 310, 311, 312, 313), *Liceul 6 băieţi*, clasa VIII-a, Popovici I. Radu (794, 919, 927, 399, 987, 988, 989, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, E: 253, 320, 327, 329, 330, 332, 335, 336), clasa X-a, Kestenband Barbu (701, 776, 777, 778, 779, 806, 831, 837, 857, 888, 890, 893, 908, 910, 911, 915, 916, 917, 921, 931, 932, 938, 940, 950, 952, 953, 954, 958, 995, 962, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 971, 972, 974, 975, 976, 978, 984, 992, 1012, 1014, 1017, 1025, E: 246, 253, 264, 265, 284, 300, 310, 317, 318, 322). *Liceul 7 băieţi*, clasa X-a, Stoleru Gheorghe (872, 915, 971, 973, 999, 1001, 1004, E: 317, 320, 322), *Liceul 8 băieţi*, absolvent, Teodosiu Cristian (766, 767, 778, 802, 831, 839, 842, 871, 872, 873, 876, 878, 879, 880, 881, 882, 887, 888, 897, 904, 906, 908, 914, 916, 923, 934, 938, 940, 946, 950, 952, 959, 968, 971, 972, 974, 976, 1007, 1023, 1025), *Şcoala Medie Tehnică de Drumuri*, Fomov Toma Mihai (873, 878, 895, 912, 919, 971, 972, 988, 999, 1001, E: 307, 324, 330, 332, 333, 334, 335), *Şcoala Medie Tehnică Mecanică Nr. 2*, anul III, Schwartzkopf Hella (758, 766, 767, 807, 833, 837, 838, 850, 871, 872, 873, 875, 876, 878, 881, 898, 904, 905, 906, 910, 913, 915, 917, 923, 927, 928, 931, 938, 971, 974, 976, 988, 950, 970, 986, 991, 999, 1000, 1009). *Liceul 10 băieţi « Aurel Vlaicu »* Clasa VIII-a, Nistreanu N. Valeriu (871, 873, 973, E: 216, 220, 266, 292, 294, 305, 306, 309, 314, 315, 316, 317, 318, 328, 335), Clasa IX-a Stănăşilă Octavian (723, 724, 863, 864, 872, 904, 905, 907, 908, 909, 910, 912, 913, 914, 929, 938, E: 257, 266, 268, 270, 271, 274, 279, 280, 286, 290. 292, 293, 294, 295, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 316, 318, 319, 327, 329, 335, 336), Clasa X-a, Andreescu Gh. Radu (764, 769, 771, 781, 784, 806, 821, 835, 864, 865, 866, 867, 868, 929, 960, 961, 966, 969, 970, 977, 978, 980, 987, 988, 991, 992, 993, 994, 995, P) Clasa XI-a Alexe M. Gheorghe (787, 792, 999, E: 266, 329), Manach Octavian (950, E: 318, 324, 329, 335), Mohor Mircea (819, 823, 837, 881, 986, E: 328, 331, 335), Nica Nicolae (1000, 1025, E: 329, 335, 336), Radu Negru Lucian (787, 974, 999, E: 320, 324, 327, 329), Stroescu Gheorghe (944, 999, E: 315, 317, 322, 325), Stoica Mişu (950, E: 318, 323, 324, 329, 335), Vlădescu Gheorghe (765, 766, 767, 768, 770, 787, 788, 792, 813, 819, 823, 904, 950, 954, 971, 972, 973, 974, 975, E:

267, 269, 275), Wentzel Anton Mihai (787, E: 268, 305, 306, 324, 335), Şcoala de 7 ani Nr. 45 băieţi, clasa VII-a, Teodorescu Radu (768, 871, 876, 912, 925, 937, 939, 941, 971, 988, E: 251, 271, 273, 278, 305, 308, 309, 316, 318, 321, 323, 324, 325, 326, 327, 330, 332, 333, 335), *Şcoala mixtă Chitila* clasa VII-a, Chiţimia M. Eustaţiu (E: 252, 254, 255, 259, 260), *Şcoala de Măsurători Terestre*, anul III C, Tănase Dumitru (887, 900, 908, 926, 931, 946, 948, 950, 964, 966, 967, 971, 972, 973, 974, 976, 979, 984, 985, 986, 988, 989, 992, 993, 994, 996, 1000, 1001, 1002, 1004, 1005, 1023, 1025, E: 304, 316, 318, 319, 323, 324, 327, 329, 332, 333, 335, 336) *Studenţi*: Andreescu Gh. Mircea (769, 771, 781, 786, 805, 812, 817, 829, 833, 838, 844, 846, 848, 851, 853, 854, 859, 861, 870-880, 888, 889, 890, 891, 894, 895, 898, 900, 902, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 918, 928), Moraru V. Victor (703, 704, 705, 707, 710, 717, 722, 724, 727, 728, 729, 743, 744, 745, 748, 757, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 780, 787, 792, 793, 794, 813, 819, 823, 834, 835, 838, 839, 850, 851, 852, 853, 861, 868, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 881, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 912—917, 923, 925, 927, 928, 934, 937, 938, 940-944, 950, 954, 971, 972-976, 982, 1007, 1008), Hammer Ladislau (742, 749, 769, 785, 800, 804, 805, 826, 857, 861, 863 879, 881, 882, 885, 888, 897, 899, 901, 902, 904—917, 919, 921, 923, 925—928, 929—942), Tiţa I. Nicolae (783, 800, 806, 810, 813, 814, 817, 827, 831, 837, 845, 878, 879, 880, 881, 882, 888, 894, 901, 904, 905, 906, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 921, 923, 925-934, 937—944, 946, 950, 953, 954, 955, 957, 969-976 P) Popescu I. Mihail (791, 794, 795, 797—800, 804, 806, 808, 810, 814, 816, 820, 824, 826, 831, 833, 834, 835, 863, 864, 875, 881, 887—890, 893, 894, 900, 904—911, 913, 915, 918, 923, 927, 946, 950, 952, 954, 978, 1012, 1022, 25, 26, P).

BUZĂU. Clasa IX-a. Ioniţă Aurelia (829, 904, E: 281, 305, 306, 330, 335), Clasa XI-a, Duţu Alexandru (813, 824, 882, 904, 905, 908, 910, 913, 915, 923), Golianu Petru (878, 879, 882, 888, 891, 892, 899, 905, 906, 925, 941, 950, 952, 972, 973, 974, 998, 999, 1000, 1007, 1025).

CĂLĂRAŞI. Clasa VII-a, Nicolescu Dan (E: 235, 237, 238, 241, 247, 257, 259, 260, 264, 266, 268, 272, Rădulescu Ion (863, 871, 872, 873, 874, 878, 882, 890, 915, 934, 942, 950, 952, 974), Mazilu V. Constantin (791, 863, 905, 911, 913, E: 268, 274, 281, 282, 286, 293, 300, 323, 324), Parotă Nicolae (906, 908, 921, 923, 936), Şcoala Medie de Mecanizarea Agriculturii, Ianoş Caverin (788, 835, E: 289, 292, 298), Moraru Marilena (E: 290, 294, 305, 306, 318, 327), Petrovici Gheorghe (871, 873, 937, E: 292, 294, 305, 306, 327, 335).

CÂMPINA. Şcoala Medie Tehnică de Petrol Nr. 1, anul II, Florea C. Gheorghe (E: 235, 243, 278, 299, 318, 321, 323, 324), Robitu Nicu (871, 872, 873, 908, 1025, E: 285, 289, 298, 301, 303, 314, 315, 326, 328, 331, P), clasa IX-a Liceu, Popovici Leonard (845, 854, 863, 992, 993, 1000, 1025).

CÂMPULUNG-MUŞCEL. Şcoala Medie Tehnică de Comerţ. Savin Dan (766, 767, 770, 778, 780, 787, 806, 986, 987, 988, 996, 999, 1000, 1001, E: 271, 285, 289), Şcoala Pedagogică, anul IV, Duţă I. Gheorghe (925, 941, 976, 988, 999, 1001), Clasa X-a Liceu, Mănescu C. Mircea (701, 706, 708, 717, 728, 729, 732, 733, 735, 742, 747, 749, 750, 751, 752, 753, 757, 758, 760, 762, 766, 767, 768, 783, 784, 785, 788, 789, 794, 799, 800, 801, 802, 804, 813, 816, 819, 823, 827, 831, 834, 835, 839, 840, 842, 847, 850, 857, 861, 863, 864, 866, 867, 873, 874, 881, 883, 900, 944, 945, 946, 950, P).

CARACAL. Clasa X-a, Stănescu I. Rodica (888, 904, 905, 913, E: 294, 305, 308, 309, 329, 335, 336).

CLUJ. Clasa VIII-a, Costin Lucia (937, E: 284, 285, 286, 289, 294, 304, 322, 328), Spârchez Monica (878, 904, 913, 1025, E: 308, 312, 323, 325), Clasa X-a, Constantinescu Florin (892, 894, 900, 904, 946, 950, 952, 959, 960). *Şcoala Pedagogică*, anul IV. Moldovan Maria (904, 916, 937, 938, 940, 971, 973, 974, 975, 976, 999, 1001). *Şcoala Specială de 2 ani*, anul II, Sfârlea Vasile (*E*: 250, 280, 292, 294, 306), Szappanos Mihai (E: 250, 279, 280, 292, 294, 306). Szentanay Arpad (913, E: 242, 292, 294, 312), Soita Viorel (873, E: 268, 292, 294, 306).

CONSTANŢA. Clasa IX-a, Iordache I. Dan (834, 841, 845, 847, 863, 871, 872, 873, 878, 888, 904, 905, 906, 907, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 919, 938, 952, 959, 971, 973, 974, 976), anul I, Vasiliev Lucia (E: 304, 305, 306, 309, 310, 314), anul II, Ştefan Ion (937, E: 263, 268, 270, 294, 305, 306), anul III, Lambă Stelian (948, 954, E: 286, 303, 305, 323, 324, 329, 335, 336).

CORABIA. Clasa X-a. Bădănac M. Alexandru (716, 717, 735, 746, 765, 757, 759, 762, 769, 771, 817, 820, 823, 824, 825, 827, 831, 846, 847, 848, 853, 878, 881, 887, 892, 915, 916, 917, 921, 923, 931, 941, P), Boarţă Victor (871, 872, 873, E: 301, 306, 312, 328, 335).

CRAIOVA. Şcoala Medie Eletrotehnică, anul II, Dinu Gheorghe (727, 749, 800, 850, 863, 871, 872, 873, 904, 905, 913, 916, 938, E: 269 275, 277, 289, 292, 293, 294, 295, 297, 298, 300, 305, 306, 310, 311, 312 313). *Şcoala Medie Tehnică de Drumuri şi Poduri*, anul III, Ghirlea Costel (986, 988, 999, 1001, 1004), *Colegiul Popular*, clasa X-a, Iliescu C. Florian (787, 813, 823, 835, 878, 904, 915, 917, 923), Absolvent Câmpeanu I. Aurel (804, 808, 834, 835, 853, 888, 897, 904, 905, 906, 908, 910, 913, 923, 950, 952, 959, 968), Liceul Nr. 2, clasa XI-a, Florescu Gh. Mircea 908, 819, E: 268, 281, 286, 289). *Liceul 1 fete*. Clasa VIII-a Ionescu N. Marioara (E: 285, 316, 318, 324, 344).

FOCŞANI. Clasa XI-a, Robănescu N. Adrian (767, 768, 813, 823, 835, 871, 872, 873, 874, E: 315, 322, 324, 327, 328, 329, 331, 335, 336), *Şcoala Profesioanală Industria Lemnului Gugeşti*, anul II, Munteanu C. Nicolae (1004, E: 245, 253, 255, 257, 258, 259, 260, 261, 26, 279, 303, 306, 309, 314, 316, 335). Clasa X-a Liceu, Baieră Bogdan (755, 766, 776, 784, 788, 816, 819, 835, 838, 864, 872, 872, 901, 905, 911, 911, 913, 916, 923, 931, 939, 989, 999, 1004, E: 263, 270, 271, 272, 276, 281, 289, 291, 293, 298, 301, 303, 305, 306, 324, 331, 335), Pandrea Nicolae (806, 810, 842, 865, 889, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 911, 912, 913, 916, 918, 919, 923, 927, 937, 942, 946, 950, 952, 954, 971, 972, 973, 976).

GALAŢI. Clasa X-a, Balaban Emil (735, 736, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 752, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 782, 783, 787, 788, 791, 792, 794, 795, 797, 798, 799, 804, 806).

GIURGIU. Clasa VIII-a, Mateescu Doina (768, 787, 794, 838, E: 260, 266), Clasa X-a, Drăgan St. Marin (E: 235, 236, 237, 241, 244, 247, 276, 277, 290, 291, 292, 298, 315, 320, 322, Bătineţu M. Dumitru (767, 774, 787, 788, 854, 860, 864, 871, 872, 873, 804, 905, 912, 919, 937, 938, 940, E: 263, 268, 272, 275, 286, 290, 291, 292, 295, 298, 299), Stanciu Em. Mirel (819, 823, 986, 999, 1018), Clasa XI-a, Fotă M. Stan 831, 838, 842, 845, 852, 870, 871, 875, 878, 881, 883, 888, 891, 904, 906, 907, 908, 910, 923, 929, 931, 938, 940, 942, 944, 946, 948, 950, 959, 964, 974, 992, 996, 1009, 1012, 1019, 1023, 1025, P), Petcu I. Dumitru

(878, 944, 946, 949, 950, 952, 954, 957, 958, 961, 963, 965, 968, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 986, 992, 999, 1000, 4, 7, 9, 11, 15, 24, 25, P).

HUNEDOARA. Absolvent, Cimporescu Doinel (991, 992, 993, 994, 1007, 12, 18, 19, 22, 26).

IAŞI. Clasa VIII-a, Ropot Paul (E: 261, 270, 274, 292, 327), clasa IX-a B, Arsintescu I. Virgil (718, 722, 723, 724, 726, 745, 767, 770, 776, 787, 788, 823, E: 253, 256, 262, 263, 265, 267, 269, 271, 277), Serbescu Gh. Constan-, tin (744, 745, 748, 768, 770, 779, 794, 800, 838, 854, 864, 871, 873, 876, 888, 905, 906, 907, 913, 916, 920, 929, 938, 971, 972, 973, P) Antohi I. Eugen (O metodă simplă pentru determinarea longitudinii locului).

ORADEA. Clasa IX-a, Bocu Mircea (895, 904—943, 946, 948—950), Buzuloiu Vasile (764, 767, 771, 772, 773, 777, 778, 779, 780, 782, 792, 793, 795, 797, 798, 799, 804, 805, 807, 813, 816, 818, 820, 823, 824, 825, 826, 831, 833, 834).

ORAŞUL STALIN. Cochinţoiu Nicolae (1005, 25, E; 258, 327, 335). Clasa XI-a. Ghiţescu Simona (814, 820, 826, 831, 900); Absolventă liceu (Codlea) Tofan Liliana (703, 704, 705, 707, 717, 722, 728, 729, 780, 787, 793, 794, 813, 851, 853, 861, 868, 882, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 923, 925, 927, 929, 931, 934, 937, 938, 940, 941, 942, 943, 946, 954, 971, 972, 973, 974, 975, 976, *Student* Mihălcescu V. Ion (768, 770, 787, 838, 845, 916, E: 257, 258, 263, 268). *Liceul de băieţi.* Clasa IX. Coşa Dan (731, 787, 791, 792, 793, 794, 800, 804, 821, 823, 831, 834, 861, 863, 878, 881, 888, 895, 897, 898, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 919, 921, 923, 926, 927, 929, 930, 931, 932, 937, 938, 939, 940).

PETROŞANI. *Şcoala de topografie.* Pantea N. Alexandru (702, 703, 704, 705, 706, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, P).

(Urmează în numărul viitor).

EVIDENŢIAŢI

Dintre rezolvitorii de probleme dela care s'au primit, soluţii între 15 Septembrie 1953 şi 15 Octombrie 1953, se evidenţiează:

Iosifescu V. Marius (Piteşti), **Popescu I. Mihail** (student, Bucureşti), **Bocu Mircea** (Oradea), **Mănescu C. Mircea** (Campulung Muscel), **Dogaru Iulian** (Ploeşti), **Galaţki Gheorghe** (Târgovişte), **Coşa Dan** (Oraşul Stalin), **Moraru V. Victor** (student, Bucureşti), **Tiţa I. Nicolae** (student, Bucureşti), **Hammer Ladislau** (student Bucureşti), **Tofan Liliana** (absolventă, Codlea), **Rădulescu Gh. Const.** (Ploeşti), **Miclăuş Vasile** (Roşiorii de Vede), **Brezeanu Ioanin** (Târgovişte), **Lazăr Dumitru** (Rădăuţi), **Tofan V. Ioan** (Bacău), **Teodorescu Cristian** (R. Sărat), **Uţă Marin** (Predeal), **Andreescu G. Mircea** (absolvent, L.B. 10, Bucureşti), **Balaban Emil** (Galaţi), **Matei Nicolae** (Tg. Mureş), **Torjescu Florin** (Ploeşti), **Weszely Tiberiu** (Tg. Mureş), **Duţu Gh.** (Predeal), **Fotă M. Stan** (Giurgiu), **Kestenband Barbu** (L. B. 6 Bucureşti), **Bobeică I. Dumitru** (Târgovişte), **Braşovan Ioan** (Timişoara), **Baieră Bogdan** (Focşani), **Zigulescu D. Marin** (R. Vâlcea), **Tănase Dumitru** (Şcoala măsurători terestre, Bucureşti), **Peteu I. Dumitru** (Giurgiu), **Buzuloiu Vasile** (Oradea), **Serb G. Adrian** (Ploeşti), **Teodosiu Cristian** (absolvent L. B. 8, Bucureşti), **Chicoş Liviu** (Bârlad), **Silion Dinu** (Ploeşti), **Pandrea Nicolae** (Focşani), **Iordache I. Dan** (Constanţa), **Stănăşilă Octavian** (L. B. 10 Bucureşti, **Bădănac M. Alexandru** (Corabia), **Schwartzkopf Hela** (Şcoala de mecanică 2 Bucureşti), **Andreescu Gh. Radu** (L. B. 10 Bucureşti), **Pantea N. Alexandru** (Petroşani).

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebue făcută separat cu aplicaţiile necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie, iar fiecare soluţie să fie precedată de numărul de ordine al problemei şi enunţul complect. După soluţionarea problemei, scrieţi citeţ numele, clasa şi şcoala unde urmaţi şi trimiteţi problemele aşezate în ordinea lor numerică.

— Se mai primesc *soluţii* numai la problemele cu numărul de ordine 943 şi următoarele, iar pentru exerciţiile elementare dela E: 301, şi următoarele, adică din ultimele cinci numere din R.M.F.

PREMIILE R.M.F. PE ANUL 1953

— *Pentru premierea rezolvitorilor* de probleme din R.M.F. pe anul 1953 se va ţine seamă de toate soluţiile primite între 1 Noembrie 1952 şi 1 Noembrie 1953, de calitatea soluţiilor şi de modul lor de redactare, precum, şi de clasa pe care o urmează rezolvitorul.

— *Evidenţiaţii* în ultimele 12 numere ale revistei fiind consideraţi concurenţi la premiile R.M.F. sunt rugaţi să întocmească câte o fişă cuprinzând numele, adresa actuală şi tabel de toate problemele ce au rezolvat, în ordinea lor numerică şi anunţate la rubrica rezolvitorilor începând cu numărul 11 din Noembrie 1952 până în prezent. Soluţiile ce se vor anunţa la rubrica rezolvitorilor în cursul anului 1954, se vor socoti la premierea pe anul 1954.

* * *

— *Problemele ce se propun* **de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste, iar trimiterea lor să se facă odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au soluţionat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica.**

— Fiecare cetitor al R.M.F. este rugat a face cunoscută revista şi altor cunoscuţi, pentru a mări astfel, numărul colaboratorilor.

— Reclamaţiile de neprimirea R.M.F. sau cereri de numere vechi se pot face Oficiului Special de expediere a Presei din Bucureşti, str. Constantin Mille nr. 14, telefon 5-28-90.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice şi fizice, articole, dări de seamă asupra activităţii cercurilor de matematică şi fizică, pentru elevi, cereri, sugestii şi propuneri, etc. se trimit pe adresa: *REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ*, **str. Dionisie Lupu Nr. 40, raionul Stalin, Bucureşti.**

TABLA DE MATERII
A REVISTEI MATEMATICE ŞI FIZICE. ANUL IV (1953)

I. ARTICOLE

Pag.

1. VIRGIL ATANASIU: Luminiscenţa 62
2. I. BARBĂLAT: Reciprocele teoremelor relative la relaţiile metrice fundamentale în triunghiurile dreptunghice 25
3. N. BĂRBULESCU: Legi fizice lineare..... 134
4. MARCEL COTARIU: Calcul cu diferenţe finite 305
5. PETRE DEMILANO: Magnetofonul 249
6. MAXIMILIAN FRÄNKEL: Oscilograful catodic 31
7. H. M. IONESCU: Valori medii 55
8. OSCAR KREINDLER: Operaţii aritmetice cu puncte 79
9. MIRCEA MALIŢA: Nicolai Copernic 161
10. ELENA MAVRODIN: Inversiunea 217
11. N. N. MIHĂILEANU: Despre axiomatica Geometriei 247
12. M. MOSCOVICI: Utilizarea «sciotului» pentru cele patru operaţii aritmetice 138
13. V. PAVLU: Metoda polarografică, o nouă metodă fizică de analiză a materialelor..... 116
14. CONSTANTIN RABEGA: Tensiunea superficială 8
15. CONSTANTIN RABEGA: Structura metalică 164
16. N. RĂDULESCU: Construcţia şi principiul transformatorului electric 257
17. N. STĂNESCU: Stroboscopia, metodă de cercetare a mişcărilor periodice 85
18. AL. STOENESCU: Principiul deplasărilor virtuale 190
19. AL. STOENESCU: Principiul lui Toricelli ... 300
20. IMRE TOTH: S'au împlinit 150 ani dela naşterea marelui matematician Ianoş Bolyai 2
21. GANEA TUDOR: Ce este şi ce urmăreşte Topologia 273
22. Lenin a trăit, Lenin trăieşte, Lenin va trăi.... 1
23. Tov. Iosif Vissarionovici Stalin a încetat din viaţă 51
24. Facultăţile de Matematică şi Fizică..... 77
25. Despre profesia de matematician, după un articol al Academicianului sovietic A. N. Colmogorov 109
26. Marile întâlniri ale tineretului lumii pentru pace şi prietenie 133
27. Apelul celui de al III-lea Congres Mondial al tineretului către Tineretul lumii 189
28. Structura atomică a unei substanţe, după articolul lui A. I. Chitaigorodschi..... 223
29. Etapele de desvoltare a geometriei, după artcolul «Geometria» din Marea Enciclopedie Sovietică 245
30. Construcţia unor dispozitive pentru experienţe de electromagnetism, după A. I. Glazârin ... 278
31. A şasea aniversarea a Republicii Populare Române 297

II. DIVERSE

1. Noutăţi din Ştiinţa şi Tehnica Sovietică

Pag.

1. Utilizarea substanţelor artificiale radioactive la studiul proceselor ce se produc în metale şi aliaje 200
2. Noul tractor gazogenerator 200
3. Lagăre pe rulmenţi în transportul pe căile ferate. 258
4. Noi tractoare Beloruse..... 283
5. Electromotoare puternice 283

2. Cercurile de matematică şi fizică

— Construcţia unui motor electric pentru curent continuu (N. Rădulescu) 36
— Construirea prin mijloace proprii a unui aparat pentru demonstrarea undelor staţionare (V. Paviu) 91
— Construcţia roţii Barlow (N. Rădulescu) 120
— Pentru cercurile de matematică 198
— Construirea cu mijloace proprii a uuni aparat pentru verificarea calitativă a legii Joule-Lenz (N. Rădulescu)..... 111

3. Poşta Redacţiei 186; 214; 241

III. CHESTIUNI DE EXAMEN

1. Examenul de admitere la Facultatea de Matematică şi Fizică din Bucureşti, 1953 16
2. Concursul de Matematică — 1953, etapa I în regiunea Bucureşti..... 121
3. Concursul de Matematică — 1953, etapa I în regiunea Cluj 143
4. Concursul de Matematică — 1953, etapa II în regiunea Bucureşti 175
5. Concursul de Matematică — 1953, etapa II în regiunea Iaşi 201
6. Concursul de Matematică — 1953, etapa II în regiunea Timişoara 203
7. Examenul de admitere la Institutul de Petrol şi Gaze din Bucureşti la 25 August 1953 260
8. Examenul de admitere în Facultatea de Matematică şi Fizică din Bucureşti la 25 August 1953 şi Septembrie 1953 285
9. Examenul de admitere în Institutul de Construcţii din Bucureşti la 25 August 1953 285

4. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

1. **Probleme propuse:** Nr. (735—757) (pag. 19); (758 — 762) (pag. 16); (763—783) (pag. 42); (784—806) (pag. 71); (807—835) (pag. 99); (836—862) (pag. 127); (863—876) (pag. 121); (877—903) (pag. 151); (904—942) (pag. 143); (943—962) (pag. 184.); (963—976) (pag. 175); (977—1004) (pag. 201); (1005—1027) (pag. 211); (1028—1052) (pag. 238); (1053—1077) (pag. 265); (1078—1083) (pag. 260); (1084—1091) (pag. 285); (1092—1116) (pag. 290); (1117 — 1139) (pag. 321).

2. **Exerciţii şi probleme propuse pentru şcolile de 7 ani:** Nr. (242—251) (pag. 21); (252—265) (pag. 44); (266 — 275) (pag. 73); (276—289) (pag. 101); (290—300) (pag. 129); (301—314) (pag. 154); (315—324) (pag. 186); (325—336) (pag. 213); (337—351) (pag. 240); (352—368) (pag. 267);(369—383) (pag. 293); (384—400) (pag. 323).

3. **Probleme rezolvate:** [1]) 284 (92); 285 (92); 315 (92); 394 (93); 418 (93); 451 (93); 472 (148) 473 (176); 481 (148);

[1]) In paranteză este trecută pagina unde s'a publicat soluţia problemei.

492 (149); 500 (149); 504 (177); 509 (94); 521 (149); 524 (69); 531 (70); 533 (150); 547 (17); 550 (17); 552 (70); 553 (17); 554 (38); 555 (38); 556 (150); 557 (94); 558 (94); 561 (18); 563 (18); 565 (39); 567 (40); 568 (40); 569 (40); 570 (71); 571 (40); 572 (41); 573 (18): 574 (41); 575 (95); 576 (95); 577 (41); 578 (41); 579 (42); 580 (42); 582 (150); 583 (177); 584 (177); 586 (71); 587 (178); 588 (178); 589 (95); 590 (95); 591 (96): 592 (96); 594 (96); 595 (96); 596 (97); 597 (98); 598 (98); 599 (98); 601 (205); 605 (231); 606 (123); 607 (206); 611 (206); 620 (206); 622 (123); 624 (123); 625 (123); 629 (124); 632 (124); 633 (124); 634 (124); 635 (125); 637 (260); 639 (125); 640 (178); 643 (125); 644 (125); 645 (231); 646 (126); 647 (126); 648 (126); 649 (126); 650 (178); 651 (179); 652 (179); 653 (180); 654 (180) 655 (181); 657 (181); 658 (182); 659 (182); 661 (182); 662 (182); 663 (183); 664 (183); 665 (184); 666 (233); 667 (233); 668 (233); 670(234); 671 (234); 673 (234); 674 (235); 675 (235); 676 (235); 679 (236); 682 (207); 685 (207); 690 (207); 691 (208); 693 (208); 694 (208); 695 (209); 696 (209); 697 (209); 699 (210); 701 (210); 703 (261); 707 (210); 708 (261); 709 (262); 713 (263); 717 (263); 718 (286); 719 (211); 721 (237); 722 (237); 723 (286); 726 (264); 727 (286); 728 (237); 731 (238); 732 (264); 736 (287); 743 (287); 749 (287); 752 (287); 753 (288); 755 (313); 772 (288); 775 (288); 776 (313); 777 (289); 778 (289); 782 (289); 798 (290); 799 (314); 801 (290); 807 (290); 809 (314); 810 (314); 813 (315); 816 (315); 818 (315); 822 (315); 826 (316); 829 (316); 832 (317); 835 (317); 836 (317); 837 (317); 839 (318); 840 (318); 844 (318); 850 (318); 851 (318); 852 (319).

E. 231 (319); 250 (238); 262 (319); 265 (319); 293 (320).

4. **Rubrica rezolvitorilor de probleme:** Pag: 22; 45; 75; 103; 130; 155; 187; 215; 242; 268; 294; 324.

5. **Redactarea soluţiilor:** Pag: 24, 48, 76, 108, 132, 159, 188, 216, 244, 272, 296, 330.

6. **Premierea rezolvitorilor:** Pag. 74, 272, 297, 326.

7. **Tabelul propunătorilor de probleme:** Alexandru Matei (1117), Dumitru Arcanu (889; 1098), Dan M. Angelescu (767), Eftimie Gr. Bălescu (885), Oprea Banghea (849), Dan Barbilian (773), Alex. T. Bărbulescu (757; 805), F. Bartenev (1005); 1037), Gh. Bazacov (1112; 1132), Gh. I. Bercea (740; 803; 832; 887; 1040; 1097), Const. Berdan (830; 903), A. P. Bondarenco (1093), S. Bernstein (945), R. Bernstein (1023), Ionel Bichir (879), Ioan Braşovan (1138), Ioanin Brezeanu (881, 1104) M. Cotariu (1122), I. T. Bulduri (779), B. Casin (1033), Cecilia Cetăţeanu (1106), N. Cernov (853), N. C. Ciomu (861, 1072, 1099), Irinel Codreanu (1059), Mircea Constantinescu (739, 957), Florin Constantinescu (1130), Cezar Coşniţă (755), C. V. Costăchescu (738, 763, 802, 895, 1046, 1116), Ion I. Cristea (1044, 1058), Gh. Gh. Dănilă (792), Ilie Davidescu (813), A. Dobrescu (741), C. Dragomir (764, 821, 877, 1102), Florea Dudiţă (751, 782, 804, 831), Apostol C. Economu (862), Iancu Faibiş (839), S. Fiterman (1029), M. Filonenco Borodici (812), Stan M. Fotă (791, 882, 1032), George Fusaru (1107), Gheorghe Galaţky (1031), M. Ghermănescu (737, 828, 896), Eugen I. Gheţia (798), N. Gheorghiu (772), Ion Gligor (1026), Alex. Golescu (747), L. Hammer (778, 891), I. Iavorschi (Moscova) (1064; 1092; 1119), C. Ionescu-Ţiu (744; 775; 787; 801; 816; 843; 847; 888; 947; 952; 1021; 1022; 1034; 1055; 1056; 1095; 1111; 1136), Savin V. Ionescu (784; 1065; 1127), Mihail G. Ionescu (899), Marius V. Iosifescu (750; 771; 893; 956; 1019; 1036; 1061; 1100; 1120), V. Isacov (845), I. Izosumov (1013), Barbu Kestendand (780, 1063), Ioan Licea (769, 789; 809; 857; 890; 1045; 1071; 1103) L. Lopovoc (943), Ilie Loziciu (859; 898) I. M. Kacenovschi (Moscova) (1123), Anatolie Mândru (785; 897; 954), Mircea Mănescu (1128), C. St. Mihalcea (748, 794, 1113, 1126) Ştefan Mihăilescu (894), A. Mikisa şi V. Michelson (735), P. S. Modenov (Moscova) (1053; 1094), Emil Morţun (810), Filipoiu Miu (1110), Matei I. Nazarie (743; 1043), Maria Neuman (1025; 1039; 1068), Gh. Niculescu (817), Eugen Onofraş (752), Miron Oprea (1070), Petre Padar (793), Alex. Pantea (756), Dan C. Panu (753; 776; 799; 892; 962), Willy Paraschiv (781), Emil Pârvulescu (742), Gheorghe G. Păun (795). N. Păun (959; 1014; 1101), Petcu I. Dumitru (1114), Victor C. Petcu (1125), I. C. Petrea (765), S. Petrov (824; 1054), S. Pevzner (808), Alex. Dan Popescu (1121), Cornel Popescu (788), Gabriel Popescu (1108) Mihail I. Popescu (796; 961; 1008; 1038; 1062; 1133), C. Em. Racoveanu (886), Valentin Racoceanu (1096), K. Reabenco (1006), Nicolar Sălan (811; 1067; 1118), P. Savciuc (736), C. Scutelnicu (834), Emil Secoşan (1012), Ion Şerban (1077), Mihai Silişteanu (800), Gh. D. Simionescu (955; 960; 1010; 1017; 1028; 1060; 1124), Petre St. Simon (746; 770; 818; 841; 950; 1042; 1069), A. I. Stan (777), Stanciu N. Toma (820), N. Stănescu (807; 837; 856), Marin C. Stoica (1139), I. Stepanov (1030), Gheorghe I. Stoian (1041), Dumitru T. Stoicescu (1066), Emil Surdu (1076), Emil D. Tătaru (806, 884), George Teodoru (783), Al. Ţigănoiu (745), Nicolae I. Tiţa (1131), Florin S. Torjescu (766; 797; 851; 1057), A. Tralmac (822), Valeriu St. Udrescu (754; 790; 1035), Virgil Vârgolici (768), Petrică Zamfira (900), Tiberiu Weszely (749; 829; 1048).

7. **Tabelul propunătorilor de exerciţii şi probleme pentru şcoala de 7 ani:** Dumitru Bătineţu (E: 337), Gh. I. Bercea (E: 265, 327, 361, 370), Ioanin Brezeanu (E: 324, 339), Florin Buruiană (E: 264), Ştefan Cimpoca (E: 256), Ştefan Ciocoiu (E: 357), Florea C. Constantin (E: 288, 299), Istinie C. Crăciunel (E: 284), Gh. Gh. Dănilă (E: 276), Aurel Dedu (E: 358), Bogdan Didiv (E: 343), Valentin Dihoru (E: 270), Dragomir Donescu (E: 362), C. Dragomir (E: 312, 321), Stan M. Fotă (E: 293), Şerb. A. Gabriel (E: 387), N. Giurea (E: 316), Ion Horvat (E: 296), Ioan D. Ioan (E: 342), C. Ionescu-Ţiu (E: 244, 246, 258, 261, 273, 274, 279, 280, 281, 294, 308, 310, 319, 330, 333, 341, 345, 356, 373, 380, 390), Savin V. Ionescu (E: 253, 323), Ioan Licea (E: 336), Ilie Loziciu (E: 302, 353) Anatolie Mândru (E: 266, 338), Ioan St. Muşat (E: 252), Matei I. Nazarie (E: 300), Petru Nicola (E: 251), Alex. Pantea (E: 394), Willy Paraschiv (E: 393), Gheorghe G. Păun (E: 325), Mihail I. Popescu (E: 262, 272, 378), Marin I. Predoescu (E.: 304), Dinu I. Schileru (E: 359), Petre St. Simon (E: 254), Dinu Silion (E: 360), Gh. Stănăşilă (E: 397, 398), Emil Surdu (E: 314), Marius Zaharescu (E: 354, 384), Petrică Zamfira (E: 268), Vasile Tifui (E: 340), Nicolae I. Tiţa (E: 355), Tiberiu Weszely (E: 292, 313).

EVIDENŢIAŢI CA REZOLVITORI DE PROBLEME

1. Abdulamit Mutlu (Constanţa) (pag. 22, 105).
2. Acatincăi Eugen (C. Lung Muscel) (pag. 45).
3. Andreescu Gh. Mircea (Bucureşti) (pag. 244, 268, 296, 326).

4. Andreescu Gh. Radu (București) (pag. 244, 268, 296, 326).
5. Andreiță P. Constantin (Slatina) (pag. 105).
6. Anton Vasile (București) (pag. 188).
7. Bădănac M. Alexandru (Corabia) (pag. 326).
8. Badea N. Alexandru (Buzău) (pag. 105).
9. Baieră Bogdan (Focșani) (pag. 326).
10. Balaban Emil (Galați) (pag. 326).
11. Banghea Oprea (Câmpina) (pag. 105, 268)
12. Bălescu Gr. Eftimie (Târgoviște) (pag. 155, 216).
13. Bercea I. Gheorghe (Oravița) (pag. 22).
14. Bichir Constantin (Bârlad) (pag. 296).
15. Bichir Ilie (Bârlad) (pag. 105).
16. Bichir Ionel (Bârlad) (pag. 155).
17. Bobeică I. Dumitru (Târgoviște) (pag. 326).
18. Bocu Mircea (Oradea) (pag. 105, 155, 244, 268 296, 326).
19. Bocu Monica (Oradea) (pag. 244, 268).
20. Bonciu I. Ioan (Orașul Stalin) (pag. 45).
21. Botezat Radu (Rădăuți) (pag. 75).
22. Brașovan Ion (Timișoara) (pag. 328)
23. Brener Marian (București) (pag. 45).
24. Brezeanu I. Ioanin (Târgoviște) (pag. 22, 216, 268, 326).
25. Bucur D. Gheorghe (Brănești) (pag. 244).
26. Budin I. Constantin (Predeal) (pag. 45).
27. Buzdugan Ion (Aiud) (pag. 75).
28. Buzuloiu Vasile (Oradea) (pag. 105, 296, 326).
29. Călinescu I. G. Șerban (Ploești) (pag. 300).
30. Cavaleru Alexandru (Pitești) (pag. 22 75, 155).
31. Cazanacli Nicolae (Craiova) (pag. 268).
32. Cetățeanu Cecilia (Craiova) (pag. 296).
33. Chelba Constantin (Rădăuți) (pag. 216).
34. Chicoș Liviu (Bârlad) (pag. 326).
35. Chifan Aurel (Rădăuți) (pag. 105, 296)
36. Cimporescu Doinel (Hunedoara) (pag. 244).
37. Ciucă Alexandru (Tecuci) (pag. 45, 105).
38. Cividjian Grigore (Craiova) (pag. 105).
39. Codreanu Irinel (Buzău) (pag. 105).
40. Condrea Nelu (Bârlad) (pag. 188).
41. Constantinescu D. Mircea (București. (pag. 244).
42. Constantinescu Gr. Florin (Cluj) (pag. 268).
43. Constantinescu Vasile (Pitești) (pag. 45).
44. Costache Titus Romanus (Pitești) (pag. 22, 105, 216).
45. Covaci Fl. Andrei (Oradea) (pag. 75).
46. Cristea I. Ioan (Constanța) (pag. 244).
47. Cristian Ionel (Ploești) (pag. 105, 155).
48. Coșa Dan (Orașul Stalin) (pag. 326).
49. Cozma Mihai (Bacău) (pag. 75).
50. Cucurzeanu P. Ioan (Pitești) (pag. 155).
51. Dănilă Sofia Monica (Giurgiu) (pag. 75)
52. Dănilă Gh. (Giurgiu) (pag. 155).
53. Dăscălescu Gheorghe (Ploești) (pag. 105)
54. Davidescu S. Ilie (P. Neamț) (pag. 75, 105).
55. Dărămuș N. Teodor (Aiud) (pag. 75).
56. Dobre Dan (Buzău) (pag. 155).
57. Dobrescu A. Marcel (Târgoviște) (pag. 105).
58. Dogaru Iulian (Ploești) (pag. 326).
59. Dogaru T. Mihai (Ploești) (pag. 22, 268).
60. Donescu Dragomir (Focșani) (pag. 188, 268, 296).
61. Dihoru Valentin (Buzău) (pag. 105).
62. Drăghici Aurel (Aiud) (pag. 105).
63. Drăgan Marin (Giurgiu) (pag. 300).
64. Drăgan T. Gheorghe (Târgoviște) (pag. 105).
65. Drăghicescu D. C. (Petroșani) (pag. 155).
66. Dragomir Constantin (Pitești) (pag. 45, 105, 216).
67. Dumitrescu Ștefan (București) (pag. 155).
68. Dumitru A. Florin (Orașul Stalin) (pag. 45).
69. Dumitru I. Adrian (Orașul Stalin) (pag. 188).
70. Duțu Gh. (Predeal) (pag. 326).
71. Economu C. Apostol (Caracal) (pag. 188, 244).
72. Ene Gh. Apostol (Craiova) (pag. 244).
73. Enescu Dumitru (Pitești) (pag. 75, 155.
74. Făgăraș Constantin (Ploești) (pag. 155, 216).
75. Filimon Ștefan (Turnu-Severin) (pag. 105, 216).
76. Florescu M. Sanda (București) (pag. 268).
77. Fotă M. Stan (Giurgiu) (pag. 22, 188, 328).
78. Fusaru Gheorghe (Pitești) (pag. 268).
79. Găină Stelian (Turnu Măgurele) (pag. 105).
80. Galațki Gheorghe (Târgoviște) (pag. 326).
81. Georgescu Ioan (București) (pag. 244).
82. Gheția I. Eugen (București) (pag. 244).
83. Golianu Petru (Buzău) (pag. 268).
84. Grecu Dan (Cluj) (pag. 188).
85. Hammer Ladislau (Timișoara) (pag. 45, 155, 268, 326).
86. Ioan D. Ioan (Focșani) (pag. 75, 105, 244).
87. Ionescu I. Ion (Târgoviște) (pag. 216)
88. Ionescu V. Savin (Pitești) (pag. 105. 268).
89. Iosifescu V. Marius (Pitești) (pag. 22, 105, 155, 216, 268, 326).
90. Istrate Mircea (Focșani) (pag. 244).
91. Iordache I. Dan (Constanța) (pag. 326).
92. Kestenband Barbu (București) (pag. 45, 326).
93. Lazăr Aldo Ioram (Roman) (pag. 45, 216).
94. Lazăr C. Dimitrie (Rădăuți) (pag. 105, 326).
95. Licea Ioan (Galați) (pag. 22, 75, 155, 244).
96. Lungu I. Ștefan (Brăila) (pag. 296).
97. Lupuțiu Ioan (Ploești) (pag. 216, 296).
98. Mihai T. Iulian (Ploești) (pag. 22, 75, 105, 216).
99. Mudin Sureia (Constanța) (pag. 22).
100. Munteanu Marcel (Dorohoi) (pag. 45).
101. Mihăiescu I. Alexandru (Turnu Măgurele) (pag. 45).
102. Mihăilescu N. Ștefan (București) (pag. 45, 244, 268).
103. Mândru Anatolie (București) (pag. 75).
104. Mănescu C. Mircea (Câmpulung Muscel) (pag. 328).
105. Mardare Petru (Bacău) (pag. 75).
106. Mitu Velicu (Giurgiu) (pag. 75, 296).
107. Moreanu N. Rudy (Ploești) (pag. 105).
108. Miclăuș Vasile (Roșiorii de Vede) (pag. 105, 216, 296, 326).
109. Marinescu C. Gheorghe (Pitești) (pag. 105, 216).
110. Moraru Liliana (Codlea, R. Stalin) (pag. 155).
111. Moraru Victor (București) (pag. 326).
112. Marinescu Petre (Ploești) (pag. 155).
113. Matei T. Gheorghe (Curtea de Argeș) (pag. 188).
114. Miu Gh. Filipoiu (Curtea de Argeș) (pag. 188, 268).
115. Mănescu C. Mircea (Câmpulung Muscel) (pag. 188, 268).
116. Matei Nicolae (Târgu Mureș) (pag. 216, 326).
117. Măgureanu Iulian (Giurgiu) (pag. 244).
118. Morozan Teodor (Tecuci) (pag. 300).
119. Nicolae Alexandru (București) (pag. 105, 268).
120. Namolovan Virgil (Pitești) (pag. 105).
121. Negulescu A. Paul (Buzău) (pag. 105).
122. Nichifor Gh. Gheorghe (Câmpulung Moldovenesc) (pag. 105, 188).

123. Nan Stelian (Orașul Stalin) (pag. 244).
124. Niculescu Gheorghe (Ploești) (pag. 296).
125. Olariu Grigore (Târgu Jiu) (pag. 296).
126. Olteanu Victor (Arad) (pag. 105).
127. Oprea A. Aurel (Târgoviște) (pag. 105, 296).
128. Oprea A. Constantin (Târgoviște) (pag. 155).
129. Pantea Alexandru (Petroșani) (pag. 326).
130. Păun Gheorghe (Pitești) (pag. 22, 105).
131. Panaitescu Alexandru (Ploești) (pag. 75).
132. Păuneacu D. Ion (Turnu Severin) (pag. 105).
133. Pandrea Nicolae (Focșani) (pag. 188 268, 326).
134. Pascu E. Eugen (Turda) (pag. 216).
135. Pârvulescu L. Emil (Turnu Severin) (pag. 216).
136. Parciu Mircea (Câmpina) (pag. 244, 268).
137. Petrovici Radu (Focșani) (pag. 22, 75, 188, 268).
138. Petrică Zamfira (București) (pag. 75, 105, 155, 244, 296
139. Petrovici Liviu (Oradea) (pag. 105).
140. Petcu I. Dumitru (Giurgiu) (pag. 188, 244, 296, 326)
141. Peteanu Vasile (Aiud) (pag. 45, 155).
142. Prică Gh. Constantin (Predeal) (pag. 45).
143. Popescu Alex. Dan (Reșița) (pag. 268, 296).
144. Popescu I. Mihai (Craiova) (pag. 45, 105, 188, 326).
145. Popescu G. Sergiu (Turnu Severin) (pag. 268).
146. Popescu Milița (Craiova) (pag. 75).
147. Popovici I. Radu (București) (pag. 244, 268).
148. Predețeanu Nicolae (Caracal) (pag. 244).
149. Popescu St. Doru (Ploești) (pag. 75, 105, 268).
150. Pupăzan Nicolae (Predeal) (pag. 45, 155, 268).
151. Pupăză Nicolae (Târgu Mureș) (pag. 105, 216).
152. Puşcaşu Alexandru A. (Ploești) (pag. 300).
153. Rădulescu G. Const (Ploești) (pag. 326).
154. Radu Al. Corneliu (Pitești) (pag. 45, 216).
155. Racoveanu Constantin (Turnu Severin) (pag. 75, 268).
156. Radu Stroe (Ploești) (pag. 216).
157. Răileanu Gheorghe (Câmpulung Moldovenesc) (pag. 244).
158. Savin Dan (Câmpulung Muscel) (pag. 105, 268).
159. Satrapel Taşcu (Constanța) (pag. 45).
160. Saraci M. Dumitru (Pitești) (pag. 105).
161. Scutelnicu Constantin (Dorohoi) (pag. 45, 105).
162. Schwartzkopf Hela (București) (pag. 326).
163. Șerb Gh. Adrian (Ploești) (pag. 326).
164. Șerban Ion (Pitești) (pag. 105, 216).
165. Schileru I. Dinu (București) (pag. 22, 105, 268).
166. Silion Dinu (Ploești) (pag. 326).
167. Șincan Corneliu (București) (pag. 22, 105, 296).
168. Stănășilă Octavian (București) (pag. 326).
169. Stanciu Em. Mirel (Giurgiu) (pag. 296).
170. Stănuleț Mihai (Turnu Severin) (pag. 216).
171. Stanciu N. Toma (Ploești) (pag. 268, 296).
172. Stoian I. Gheorghe (Târgoviște) (pag. 216).
173. Stoicescu T. Dumitru (Buzău) (pag. 244, 268).
174. Stoicescu Teodor (București) (pag. 105).
175. Stamatiu I. Alexandru (Râmnicu Sărat) (pag. 296).
176. Tătaru D. Emil (Aiud) (pag. 22, 105, 155, 244, 268).
177. Tănase Dumitru (București) (pag. 45, 244, 296, 326).
178. Torjescu S. Florin (Ploești) (pag. 75, 105, 268, 296, 326).
179. Tifui Vasile (Piatra Neamț) (pag. 75, 268).
180. Tița I. Nicolae (Craiova) (pag. 75, 105, 268, 326).
181. Tofan V. Ioan (Bacău) (pag. 105, 188, 296).
182. Tița D. Constantin (Tg. Jiu) (pag. 105).
183. Trifu V. Romulus (Făgăraș) (pag. 188).
184. Truță Coriolan (Craiova) (pag. 244).
185. Teodosiu Cristian (București) (pag. 244, 326).
186. Tofan Liliana (Codlea) (pag. 268, 326).
187. Teodorescu Cristian (Râmnicu Sărat) (pag. 326).
188. Uță Marin (Predeal) (pag. 45).
189. Udrescu Valeriu (Pitești) (pag. 75).
190. Uță Florian (Predeal) (pag. 155, 326).
191. Ungureanu Ștefan (Câmpulung Moldovenesc) pag. 155).
192. Vrejoiu Constantin (Craiova) (pag. 75, 105).
193. Vasilescu Vasile (Pitești) (pag. 105).
194. Vârcol Alexis (București) (pag. 155).
195. Vasiliu Gheorghe (Galați) (pag. 188, 244).
196. Vasilescu Constantin (Călărași) (pag. 244, 296).
197. Zenovie Grigore (Pitești) (pag. 75, 105).
198. Zaharescu Marius (Turnu Severin) (pag. 105, 268).
199. Zorilescu M. Dan (Turnu Severin) (pag. 105, 216).
200. Zidăroiu G. Corneliu (București) (pag. 155).
201. Zigulescu D. Marin (Slatina) (pag. 216, 326).
202. Weszely Tiberiu (Târgu Mureș) (pag. 45, 105, 216, 326).

ABONAMENTELE PE ANUL 1954

se primesc la toate Oficiile Poștale dela orașe și sate, prin factorii poștali, prin propagandiști precum și la secțiile raionale de difuzare a presei. Tarif pentru profesori, muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 1645. – INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. – BUCUREȘTI **Lei 1.—**